Timischl
Kaiser

Ingenieur-Mathematik

2

E. DORNER

Wolfgang Timischl
Gerald Kaiser

Ingenieur-Mathematik 2

E. DORNER

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten, Zl. 43.695/1-III/D/13/98, für den Unterrichtsgebrauch an technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen für die 2. Klasse im Unterrichtsgegenstand Mathematik sowie an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den II. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik sowie für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den II. Jahrgang nach den derzeit geltenden Lehrplänen im Unterrichtsgegenstand Mathematik und Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Buch-Nr. 3998

Timischl – Kaiser
Ingenieur-Mathematik 2

Ungargasse 35, 1030 Wien
Tel.: 01 / 533 56 36, Fax: 01 / 533 56 36-15
E-Mail: office@dorner-verlag.at
www.dorner-verlag.at

ISBN 978-3-7055-**0156**-0

Dazu ist lieferbar:
Ingenieur-Mathematik 2 Lösungen
Buch-Nr. 5603, **ISBN** 978-3-7055-**0208**-6
Ingenieur-Mathematik 2
Durchgerechnete Lösungen
Buch-Nr. 120 711, **ISBN** 978-3-7055-**0633**-6

7. Auflage, 2009
Alle Drucke sind im Unterricht parallel verwendbar.

Wir danken den Herren DI Hubert Fackner, DI Max Hammerl, Mag. Berndt Hortig, DI Hansjörg Vaupetitsch und Mag. Bruno Zavertanik für wertvolle Anregungen.

Niemand ist perfekt …
… natürlich auch wir nicht. Umso dankbarer sind wir daher allen Verwendern dieses Werkes, wenn sie uns
- auf Fehler hinweisen,
- zu Verbesserungen anregen.

Wolfgang Timischl **Gerald Kaiser**

E-Mail:
wolfgang.timischl@schule.at
gerald.kaiser@inode.at

Umschlag, Satz, Computergraphik, Repro und Montage: DOKU-Consult GmbH, Wien
Gesamtherstellung: Verlag E. DORNER GmbH, Wien

Inhalt

1 Funktionen

1.1 Wiederholung der Grundbegriffe

Funktionen werden zur Darstellung und Beschreibung von Abhängigkeiten und Zusammenhängen zwischen Größen benötigt. Diese Abhängigkeiten lassen sich in bestimmten Fällen genau oder näherungsweise durch Formeln beschreiben.

In "Ingenieur-Mathematik 1" haben wir bereits den Funktionsbegriff definiert:

> **Bei einer Funktion wird jedem Element aus der Definitionsmenge D genau ein Element aus der Wertemenge W zugeordnet.**
>
> Man schreibt dafür: $f\colon D \to W$ oder $f\colon x \mapsto y$ oder $y = f(x)$

Man bezeichnet x als **unabhängige Variable** und y als **abhängige Variable**. Die unabhängige Variable x wird als **Argument** oder Stelle und die abhängige Variable y als **Funktionswert** an der Stelle x bezeichnet.

Definitionsmenge: Menge der Elemente, durch die die unabhängige Variable ersetzt werden kann.

Wertemenge (oder Bildmenge): Menge der Elemente, durch die die abhängige Variable ersetzt werden kann.

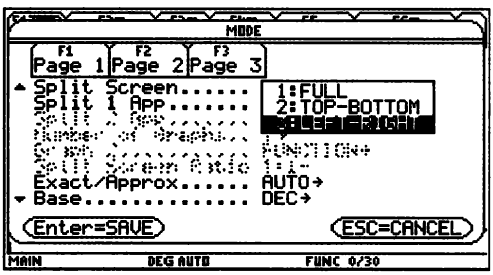
Die Darstellung von Funktionen kann beispielsweise durch Wertetabellen, Formeln oder graphisch im kartesischen Koordinatensystem erfolgen.

Beispiel 1.1 : Darstellungsformen einer Funktion mit dem Voyage 200

Die lineare Funktion $y = 2x + 1$ soll durch eine Wertetabelle und im kartesischen Koordinatensystem graphisch dargestellt werden.

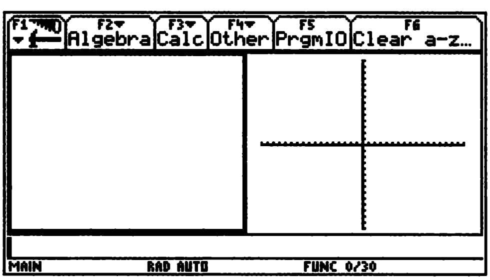
Lösung

Wir teilen den Bildschirm, vom leeren Homebereich ausgehend, zunächst in zwei Teile.



Durch Drücken von MODE F2 und durch Drücken des Cursors bei Split Screen nach rechts erhält man drei Auswahlmöglichkeiten. Möchte man den Bildschirm vertikal teilen, so hat man zwei Möglichkeiten:

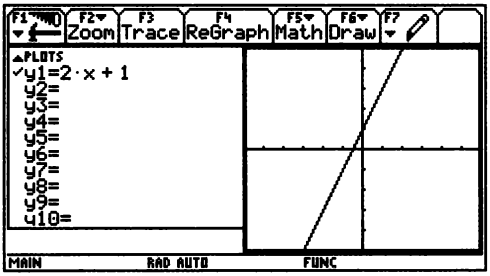
1) Drücken von 3 ENTER .
2) Man wählt 3: LEFT–RIGHT mit dem Cursor aus und drückt ENTER ENTER .



Man erhält die nebenstehende Darstellung.

Mit 2ND APPS kann man zwischen den einzelnen Fenstern hin- und her schalten.

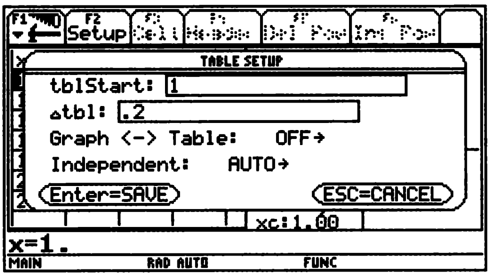
Um das aktive Fenster ist der Rahmen stärker gezeichnet.



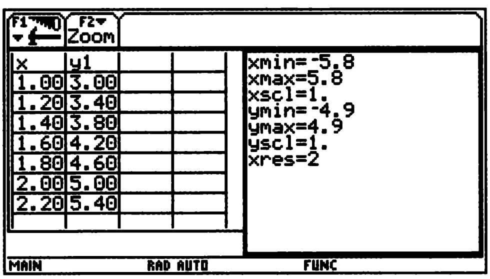
Mit ◆ W wird im aktiven Fenster der y-Editor aktiviert. Der Funktionsterm wird eingegeben: 2·x + 1

Mit 2ND APPS wird die lineare Funktion dargestellt.

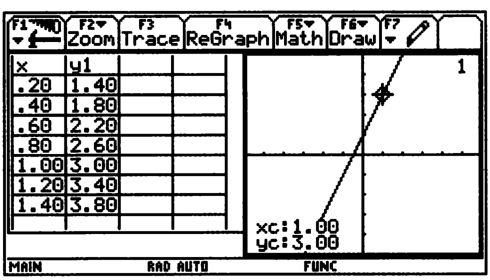
In der nächsten Darstellung soll in einem Fenster die Wertetabelle der Funktion und im zweiten Fenster der Graph der Funktion dargestellt und abgetastet werden. Dabei sollen die abgetasten Werte mit jenen in der Wertetabelle verglichen werden.



Mit 2ND APPS wird der y-Editor aktiviert und mit ◆ Y wird die Wertetabelle, der im y-Editor eingegebenen Funktion(en) dargestellt. Mit F2 kann der Startwert (tblStart)und die Schrittweite (Δtbl) geändert werden. Mit ENTER werden die Einstellungen bestätigt.



Drückt man im aktiven Fenster ◆ E, kann die Schrittweite beim Abtasten geändert werden. Um eine dezimale Schrittweite zu erhalten, drückt man F2 4 (4: ZoomDec). Diese hängt vom Wert von xres ab. Z.B. xres = 2 ergibt eine Schrittweite von 0,2.



Mit ◆ R wird im aktiven Fenster der Funktionsgraph dargestellt. Mit F3 wird der Graph der Funktion schrittweise abgetastet und mit den Werten in der Tabelle verglichen.

Die Rückstellung auf *ein* Fenster kann wieder mit MODE F2 und durch Drücken des Cursors bei Split Screen nach rechts 1 und ENTER hergestellt werden. Dabei wird das gerade nicht aktive Fenster als Ganzes dargestellt. Mit den bereits bekannten Tastenfolgen kann jedes beliebige Fenster aktiviert werden.

Bei Darstellung im Zweifenstermodus gelangt man durch Drücken von 2ND ESC 2ND ESC immer in den Homebereich.

1.2 Eigenschaften von Funktionen

In "Ingenieur-Mathematik 1" haben wir einige Grundbegriffe von Funktionen kennengelernt. Nach einer kurzen Wiederholung folgen einige weitere Eigenschaften.

Nullstellen

> Die **Nullstellen** einer Funktion $y = f(x)$ sind jene Stellen (also x-Koordinaten), an denen der Funktionsgraph die x-Achse schneidet oder berührt.
> D.h. es gilt $f(x) = 0$.

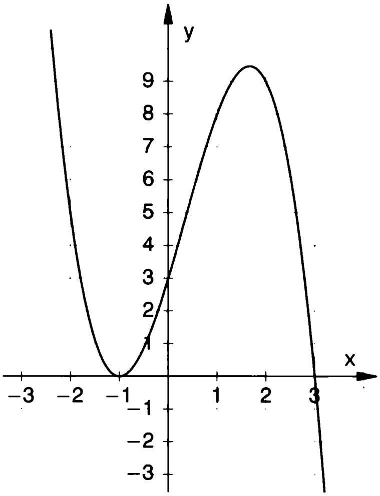


Abb. 1.1 Nullstellen einer Funktion

Monotonieverhalten

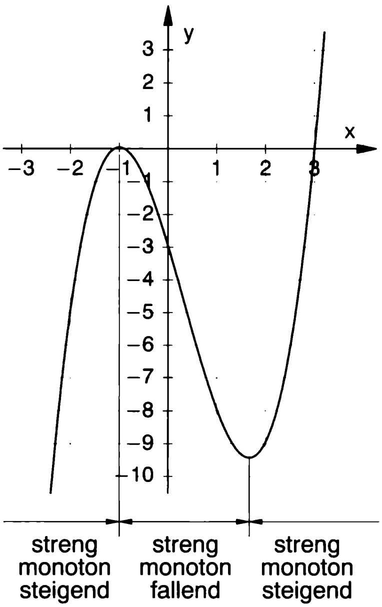


Abb. 1.2 Monotonieverhalten einer Funktion

> Gilt für zwei beliebige Stellen x_1, x_2 eines Intervalls I mit der Eigenschaft $x_1 < x_2$, dass *stets* $f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f in I **streng monoton steigend**. Ist dagegen *stets* $f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f in I **streng monoton fallend**.

Symmetrieverhalten

Wir befassen uns mit zwei Fällen:

a) Der Funktionsgraph ist symmetrisch bzgl. der y-Achse. Eine solche Funktionen heißt **gerade Funktion**.

b) Der Funktionsgraph ist punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs. Eine solche Funktion heißt **ungerade Funktion**.

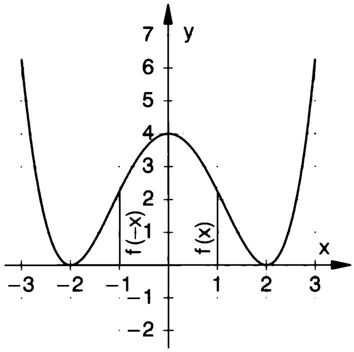


Abb. 1.3 Gerade Funktion

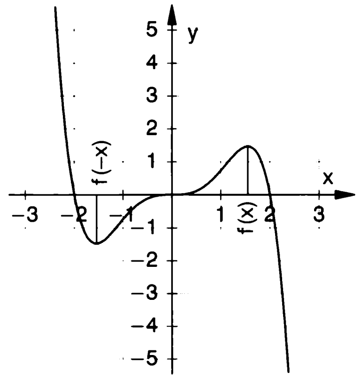


Abb. 1.4 Ungerade Funktion

Aus Abb. 1.3 und Abb. 1.4 erkennt man:

> Eine Funktion y = f (x) ist genau dann
> - **gerade**, wenn f (x) = f (−x); (Abb. 1.3)
> - **ungerade**, wenn f (x) = −f (−x).(Abb. 1.4)

Periodische Funktionen

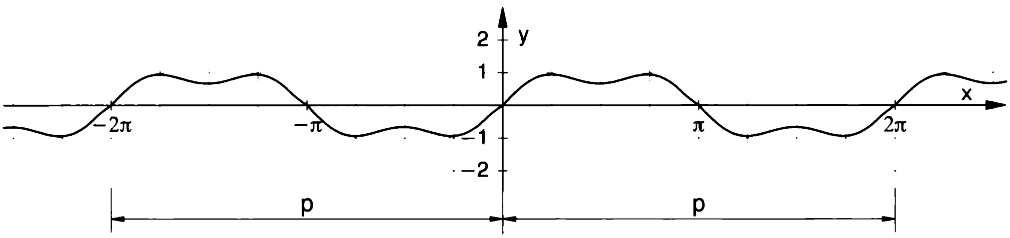


Abb. 1.5 Periodische Funktionen

Wir definieren:

> Eine Funktion f (x) heißt **periodisch** mit der Periode p, wenn f (x) = f (x + k · p) mit $k \in \mathbb{Z}$.

Maximum und Minimum

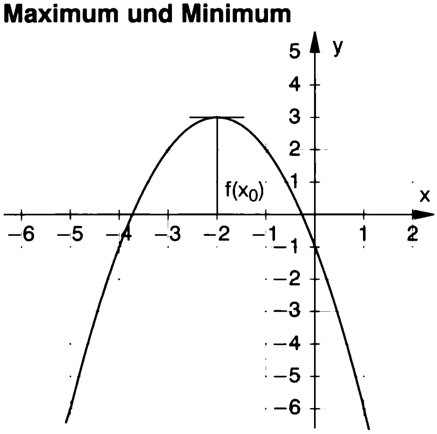


Abb. 1.6 Maximum einer Funktion

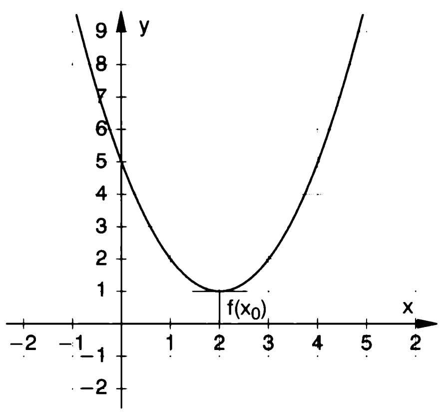


Abb. 1.7 Minimum einer Funktion

Wir definieren:

Eine Funktion f (x) besitzt an der Stelle x_0 ein lokales **Maximum** f (x_0) bzw. lokales **Minimum** f (x_0), wenn für alle $x \neq x_0$ in einer Umgebung von x_0 gilt: $\mathbf{f(x_0) > f(x)}$ **bzw.** $\mathbf{f(x_0) < f(x)}$.

Einteilung der elementaren Funktionen

- Reelle Funktionen
  - Rationale Funktionen
    - Ganzrationale Funktionen
      - z.B. Lineare Funktionen, Quadratische Funktionen
    - Gebrochenrationale Funktionen
      - z.B. $y = \frac{1}{x+1}$
  - Nichtrationale Funktionen
    - Wurzel-Funktionen
      - z.B. $y = \sqrt{x}$
    - Transzendente Funktionen
      - z.B. Kreisfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen

Beispiel 1.2 : Eigenschaften von Funktionen

Lies aus dem Graphen der Funktion in Abb. 1.8 die Eigenschaften der Funktion ab!

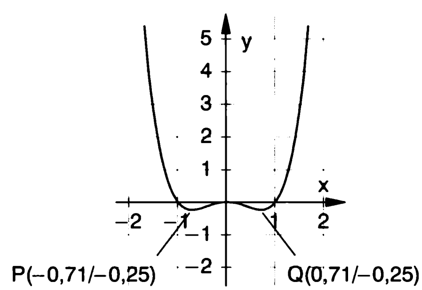


Abb. 1.8 Zu Beispiel 1.2

Lösung

(1) *Nullstellen*: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$. D.h. der Funktionsgraph schneidet oder berührt die x-Achse in den Punkten $N_1(-1/0)$, $N_2(0/0)$ und $N_3(1/0)$.

(2) *Monotonie*: Die Funktion ist in den Intervallen $]-\infty, -0{,}71]$, $[0, 0{,}71]$ streng monoton fallend und in den Intervallen $[-0{,}71, 0]$ und $[0{,}71, \infty[$ streng monoton steigend.

(3) *Symmetrie*: Die Funktion ist eine gerade Funktion, da für alle x aus dem Definitionsbereich $f(x) = f(-x)$ gilt.

(4) *Periodizität*: Sie ist im dargestellten Bereich nicht periodisch.

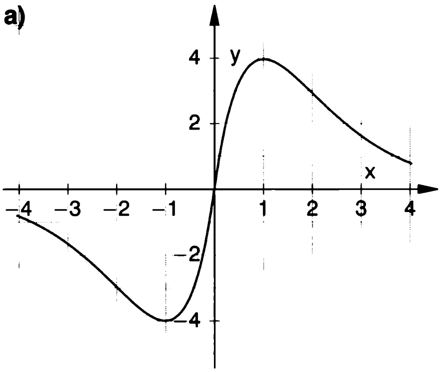
(5) *Maximum und Minimum*: Die Funktion besitzt an der Stelle $x = -0{,}71$ ein lokales Minimum, da in einer Umgebung der Stelle $x = -0{,}71$ alle sonstigen Funktionswerte größer als $-0{,}25$ sind. Entsprechendes gilt für die Stelle $x = 0{,}71$. Weiters besitzt die Funktion an der Stelle $x = 0$ ein lokales Maximum, da in einer Umgebung der Stelle $x = 0$ alle sonstigen Funktionswerte kleiner als 0 sind.

Wir werden in "Ingenieur-Mathematik 3" Rechenmethoden kennen lernen, mit deren Hilfe wir ohne Zeichnung diese Eigenschaften von Funktionen ermitteln können.

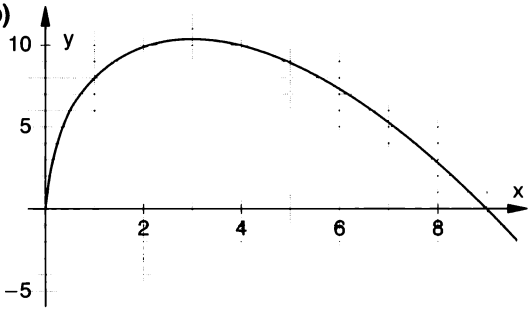
Aufgaben

1.1 Ermittle etwaige Nullstellen, Maxima, Minima, Symmetrieeigenschaften und Monotoniebereiche der Funktionen im Rahmen der Zeichengenauigkeit!

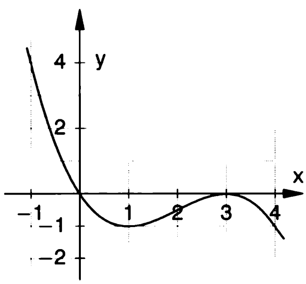
a)



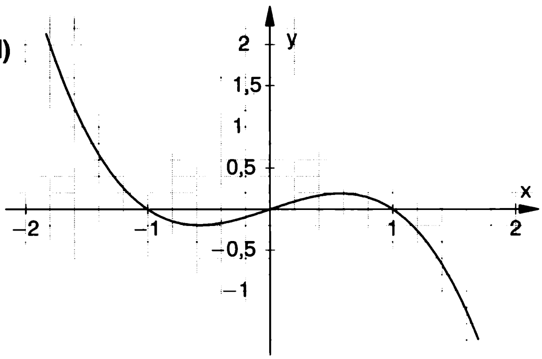
b)



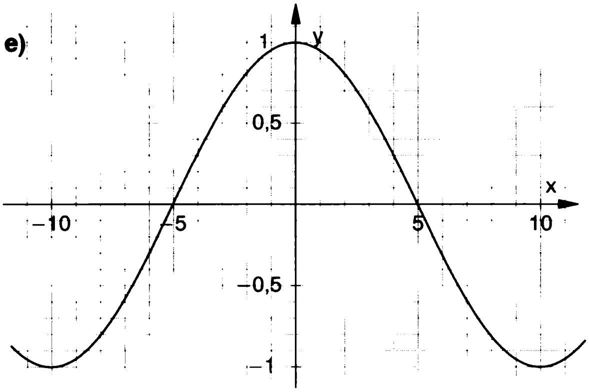
c)



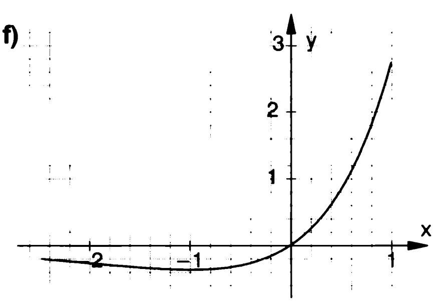
d)



e)

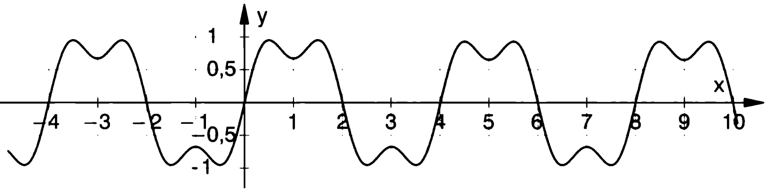


f)

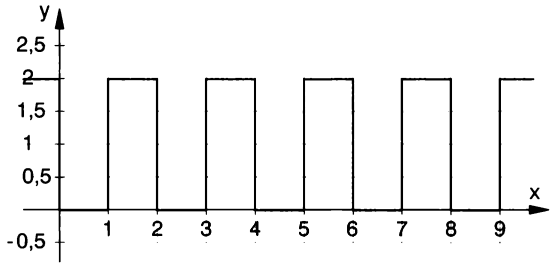


1.2 Ermittle die Periode folgender ausschnittsweise gezeichneter Graphen!

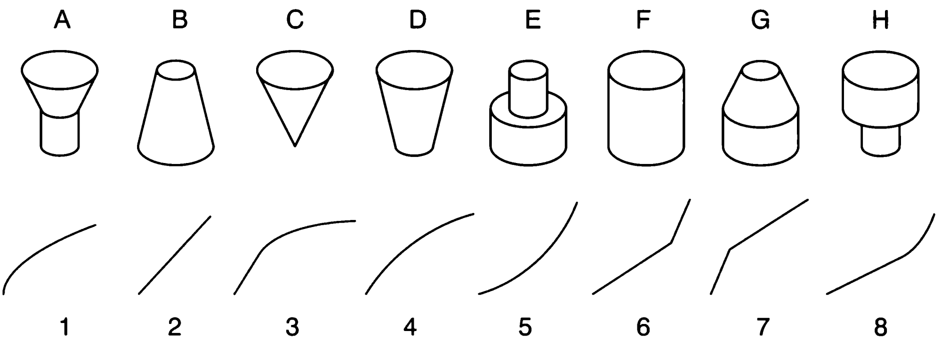
a)



b)



1.3 Acht verschiedene Behälter A, B, ..., H werden bei konstanter Wasserzufuhr gefüllt. Für jeden dieser Behälter ergibt sich eine andere Abhängigkeit der Wasserstandshöhe von der Fließzeit. Welcher Graph gehört zu welchem Behälter? [1]



1.4 Ein kugelförmiger Behälter wird von oben bei konstanter Wasserzufuhr gefüllt. Wie könnte der Graph aussehen, der die Abhängigkeit der Wasserstandshöhe von der Fließzeit angibt?

1.5 Abb. 1.9 zeigt die Benzinmenge im Tank eines Autos während einer längeren Fahrt. [2]

a) Mit welchem Benzinstand wurde die Fahrt begonnen?

b) Wie viel wurde während der Fahrt getankt?

c) Wie viel Benzin wurde während der Fahrt verbraucht?

d) Bei einer Stadtfahrt wird mehr Benzin verbraucht. Wurde die Fahrt in einer Stadt begonnen?

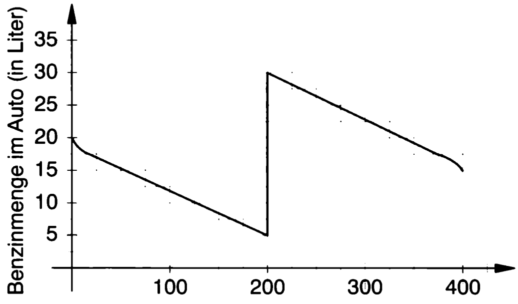


Abb. 1.9

e) Wurde in einer Stadt getankt oder an einer Tankstelle auf offener Strecke?

f) Endete die Fahrt in einer Stadt?

1.3 Umkehrfunktion

Beispiel 1.3 : Weg-Zeit-Funktion

Ein Fahrzeug besitzt eine konstante Geschwindigkeit von 60 kmh^{-1}. Welche Wegstrecke *s* legt es innerhalb einer bestimmten Zeitspanne *t* zurück?

Lösung

t in Stunden	*s in km*
0	0
1	60
2	120
3	180
4	240

Input *t* → $s = 60 \cdot t$ → Output *s*

Jeder Zeitspanne *t* ist ein eindeutig bestimmter Weg zugeordnet. **Der Weg s ist eine Funktion der Zeit *t*.** Als Definitionsmenge kann man etwa wählen: **D** = [0 h, ∞[; dann ist die Wertemenge **W** = [0 km, ∞[.

Aber auch zu jeder zurückgelegten Wegstrecke s gehört eine ganz bestimmte Zeitspanne *t*. In diesem Fall ist auch die "Umkehrung", also die **Zeit *t* eine Funktion des Weges s**. Solche Funktionen nennt man Umkehrfunktionen .

s in km	*t in Stunden*
0	0
60	1
120	2
180	3
240	4

Input *s* → $t = \frac{1}{60} \cdot s$ → Output *t*

Es ergeben sich zwei Fragen:

1) Besitzt eine gegebene Funktion stets eine Umkehrfunktion?
2) Wenn ja, wie erhält man die Gleichung der Umkehrfunktion?

Aus dem obigen Beispiel kann man erkennen, dass die ursprüngliche Definitionsmenge zur Wertemenge und die ursprüngliche Wertemenge zur Definitionsmenge wird. Bezeichnen wir – wie gewohnt – die Elemente der Definitionsmenge mit x und jene der Wertemenge mit y, so bedeutet dies, dass man die Variablen vertauschen muss, um zur Gleichung der Umkehrung zu gelangen.

Wir betrachten eine lineare und eine quadratische Funktion und vertauschen die Variablen.

- $f(x) = y = 2 \cdot x + 3,\ x \in \mathbb{R}$
  Auflösung nach x: $x = \frac{1}{2} \cdot y - \frac{3}{2}$.
  Das Vertauschen der Variablen führt zur Gleichung $y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$.
  Zu jedem x-Wert lässt sich genau *ein* y-Wert bestimmen. Die Umkehrung ist also eine Funktion.
- $f(x) = y = x^2,\ x \in \mathbb{R}$
  Auflösung nach x: $x = \pm\sqrt{y}$.

Das Vertauschen der Variablen führt zur Gleichung: $y = \pm\sqrt{x}$.

Mit Ausnahme von $x = 0$ lassen sich zu jedem (nichtnegativen) x-Wert zwei y-Werte bestimmen. Damit ist die Umkehrung keine Funktion; $y = x^2$ besitzt daher in $\mathbb{R}$ keine Umkehrfunktion.

Diese Sachverhalte lassen sich graphisch veranschaulichen.

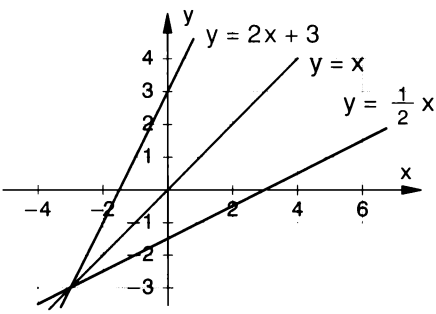


Abb. 1.10 Lineare Funktion

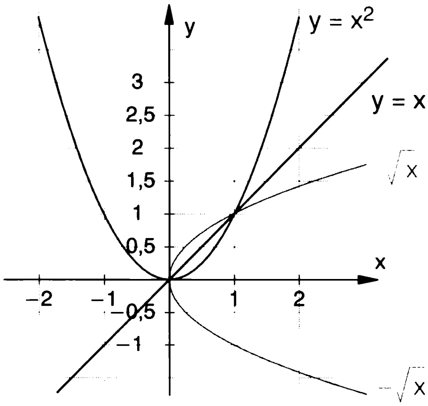


Abb. 1.11 Quadratische Funktion

Der Graph der Umkehrung ist eine Funktion, da es *keine* senkrechte Linien gibt, die mit diesem Graphen mehr als einen Schnittpunkt haben.

Der Graph der Umkehrung ist keine Funktion, da es senkrechte Linien gibt, die mit diesem Graphen mehr als einen Schnittpunkt haben.

Allgemein gilt:

> Ist eine Funktion $y = f(x)$ entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend, so hat sie eine Umkehrfunktion.

Was bedeutet die Vertauschung der Variablen x und y geometrisch?

Vertauscht man z.B. beim Punkt P (2/5) die x- mit der y-Koordinate, so erhält man den Punkt Q (5/2). Man überzeugt sich leicht, dass P und Q in einem kartesischen Koordinatensystem spiegelbildlich zur Geraden $y = x$, der sogenannten 1. Mediane, liegen. Vertauschung der x-Koordinate mit der y-Koordinate bedeutet somit in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch eine Spiegelung an der 1. Mediane. Dies ist der Grund, dass gilt:

> Die Umkehrung einer Funktion erhält man graphisch durch Spiegelung an der 1. Mediane (bei gleichen Einheiten auf den beiden Achsen).

Aufgaben

1.6 Gegeben ist die Gleichung einer linearen Funktion. Stelle gegebenenfalls die Gleichung ihrer Umkehrfunktion fest.

a) $y = 2x$ **b)** $y = -\frac{x}{2} + 3$ **c)** $2x + 3y = 6$ **d)** $y = 3$

1.7 Ermittle gegebenenfalls die Gleichung der Umkehrfunktion folgender Funktionen:

a) $y = \frac{1}{x-1}$ **b)** $y = x^2 + 1$ **c)** $y = \frac{x}{2x+1}$ **d)** $y = \frac{x-2}{x+1}$

1.8 Überlege anhand des Graphen von $y = |x - 1|$, ob diese Funktion eine Umkehrfunktion besitzt.

2 Potenzen und Potenzfunktionen

2.1 Wiederholung: Potenzen

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n … Faktoren, n = 1,2,3, …)
a … Grundzahl oder Basis, n … Hochzahl oder Exponent, a^n … Potenz

Für $a \neq 0$ ist: $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Die 5 Potenzgesetze $(m, n \in \mathbb{Z})$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\quad a \neq 0$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\quad b \neq 0$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Beispiel 2.1 : Potenzrechnung

a) Vereinfache: $2x^2 + (2x)^2 - 2x$

b) Berechne: $3^{-1} \cdot (-3)^2 - 2^{-2} \cdot 3^2$

c) Berechne: $\frac{(3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (4 \cdot 10^2) \cdot 10}{3 \cdot 10^{-1}}$

d) Schreibe ohne negative Hochzahlen und vereinfache: $\left(\frac{1}{2a} + 2a^{-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-2}$

e) Zerlege durch Herausheben in ein Produkt: $x^n + 2 \cdot x^{n+1}$

Lösung

Zu **a)** $2x^2 + (2x)^2 - 2x = 2x^2 + 4x^2 - 2x = 6x^2 - 2x = 2x \cdot (3x - 1)$

Zu **b)** $3^{-1} \cdot (-3)^2 - 2^{-2} \cdot 3^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 - \frac{1}{4} \cdot 9 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

Zu **c)** $\frac{(3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (4 \cdot 10^2) \cdot 10}{3 \cdot 10^{-1}} = \frac{9 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 10}{3 \cdot 10^{-1}} = \frac{36 \cdot 10^{-1}}{3 \cdot 10^{-1}} = 12$

Zu **d)** $\left(\frac{1}{2a} + 2a^{-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2a} + \frac{2}{a}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{5}{2a} \cdot a^2 = \frac{5a}{2}$

Zu **e)** $x^n + 2x^{n+1} = x^n + 2x^n x = x^n(1 + 2x)$

Aufgaben

2.1 Schreibe ohne negative Hochzahlen und vereinfache gegebenenfalls:

a) $2^{-1} \cdot 3^{-2}$ **b)** $\frac{a \cdot b^{-2}}{2c^{-1}}$ **c)** $3 \cdot (x - y)^{-1}$ **d)** $\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}}$ **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

2.2 Berechne:

a) $(0{,}5 \cdot 10^2)^{-1}$ **b)** $(-3 \cdot 10^{-1})^{-2}$ **c)** $\frac{(2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 5 \cdot 10^2}{10^{-2}}$ **d)** $\frac{(3 \cdot 10^{-1})^2 \cdot \frac{4}{10^{-1}}}{10^{-1}}$

2.3 Vereinfache:

a) $(2a^2)^2 \cdot \frac{1}{2a^3} \cdot \frac{1}{a^{-1}}$ **b)** $\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{-1} : x$ **c)** $\frac{(2x^2)^2}{5x^3} \cdot \left(\frac{6x}{5}\right)$

d) $\left(a^2 \cdot \frac{b^{-2}}{c^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{(2c)^2}{2b}\right)^{-1}$ **e)** $\left(x^{-1} + \frac{1}{3x}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} + 1\right)^{-1}$ **f)** $\left(\frac{x}{2} - \frac{x^{-1}}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{1 + x^{-1}}{2x}$

2.4 Faktorisiere:

a) $2^{n+1} + 2^n$ **b)** $3^{n+1} + 2 \cdot 3^n$ **c)** $3^{x+3} - 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2}$ **d)** $a^{n+2} - a^n$ **e)** $x^m + x^{2m}$

2.5 Die Erde hat einen Radius von 6370 km und eine mittlere Dichte von 5,5 $g \cdot cm^{-3}$. Die Sonnenmasse ist $2 \cdot 10^{30}$ kg. Wie oft ist die Erdmasse in der Sonnemasse enthalten?

2.2 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Beispiel 2.2 : Bremsweg

Wird ein Körper der Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der Verzögerung a gleichmäßig gebremst, so gilt für den Bremsweg $s = \frac{v_0^2}{2 \cdot a}$.

Bei einer Notbremsung eines PKW soll eine Bremsverzögerung a = 7,5 m/s^2 angenommen werden. Stelle den Bremsweg als Funktion der Geschwindigkeit v_0 (in km/h) des PKW graphisch dar für $v_0 \geqslant 0$ km/h.

Bei dieser Aufgabe wird der sogenannte Vollbremsweg berechnet. Der gesamte Anhalteweg enthält noch zusätzlich den Reaktionsweg und ein Wegstück, das zwischen dem Beginn des Bremsvorganges bis zum Erreichen der vollen Bremsverzögerung gefahren wird.

Lösung

Aus der Formel sieht man, dass der Bremsweg s mit dem Quadrat der Geschwindigkeit v_0 zunimmt. Zu beachten ist, dass die Geschwindigkeit v_0 in m/s einzusetzen ist.

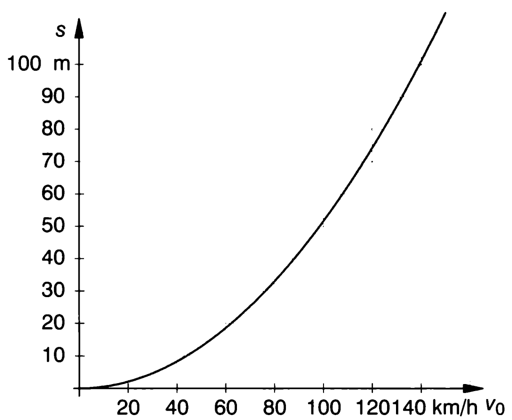
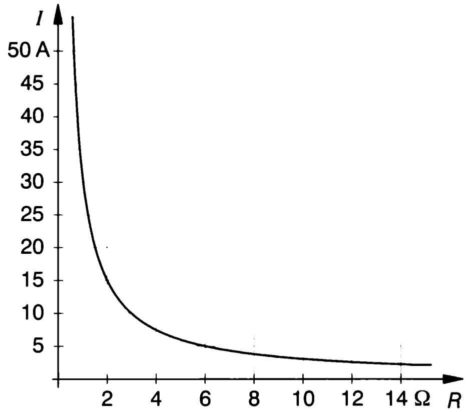


Abb. 2.1 Bremsweg s in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v_0

Beispiel 2.3 : Ohm'sches Gesetz

In einem Gleichstromkreis gilt für die elektrische Stromstärke $I = \frac{U}{R}$. Stelle die Stromstärke I bei konstanter Spannung $U = 30$ V in Abhängigkeit vom elektrischen Widerstand R für $R > 0\ \Omega$ graphisch dar.



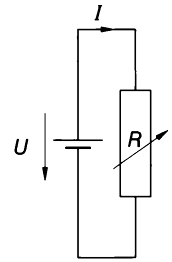


Abb. 2.2 Elektrische Stromstärke I als Funktion des Widerstandes R

Bei anwendungsorientierten Funktionen ist die Definitionsmenge meistens $\mathbb{R}^+$, da z.B. Längen, Widerstände usw. immer positiv sind.

Die Funktionen in den Beispielen 2.2 und 2.3 können auf den Funktionstyp $y = c \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $c \neq 0$ zurückgeführt werden. In den Anwendungen beschreibt dieser Funktionstyp den oft bestehenden proportionalen Zusammenhang zwischen einer Größe y und einer *Potenz* x^n.

Weitere Beispiele sind: Geometrische Formeln (nenne einige!), Trägheitsmomente, Kraft zwischen zwei punktförmigen Massen oder elektrischen Ladungen, kinetische Energie, usw.

> Eine Funktion mit der Gleichung $\mathbf{y = c \cdot x^n}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und einem beliebigen Faktor $c \neq 0$ nennt man eine **Potenzfunktion (mit ganzzahligem Exponenten n).**

Potenzfunktionen sind bei positiven Exponenten für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, bei negativen Exponenten ist $x \neq 0$ vorauszusetzen. Letzteres gilt auch für den Exponenten $n = 0$, da 0^0 nicht definiert ist! Wir werden etwas später auch Potenzfunktionen mit nichtganzzahligen Exponenten zulassen. Zuvor sollen nun die Eigenschaften der Funktionen $y = c \cdot x^n$ mit ganzzahligen Exponenten näher untersucht werden.

Potenzfunktionen mit geraden Exponenten (und c = 1)

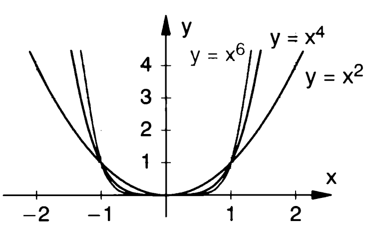


Abb. 2.3 Potenzfunktionen mit *positiven* geraden Exponenten

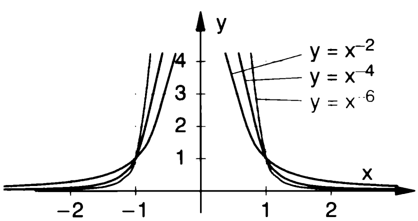


Abb. 2.4 Potenzfunktionen mit *negativen* geraden Exponenten

- Abb. 2.3 und Abb. 2.4 zeigen Graphen von Potenzfunktionen mit geraden Exponenten. Sie liegen *symmetrisch zur y-Achse*. Dies gilt für alle Potenzfunktionen mit **geraden** Exponenten, da $f(-x) = f(x)$ ist; solche Potenzfunktionen sind daher **gerade Funktionen** (siehe Seite 6).
- Potenzfunktionen mit negativen Exponenten, etwa $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, sind für $x = 0$ nicht definiert. Sie besitzen dort eine *Unendlichkeitsstelle*.
- Wegen des geraden Exponenten sind die Funktionswerte **nicht** negativ.

Ist n positiv, so ist die Wertemenge der Potenzfunktion gleich $[0, \infty[$; ist n negativ, so ist die Wertemenge gleich $]0, \infty[$. Die Potenzfunktion x^0 ist für alle $x \neq 0$ definiert.

Die Funktionsgraphen gehen durch die Punkte (1/1) und (–1/1), da 1^n und $(-1)^n$ für gerades n gleich 1 ist.

Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten (und c = 1)

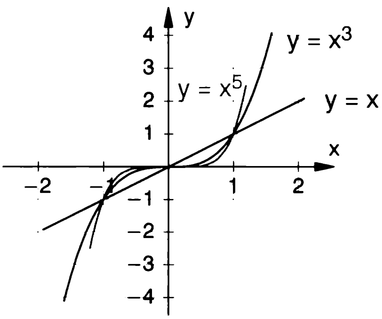


Abb. 2.5 Potenzfunktionen mit *positiven* ungeraden Exponenten

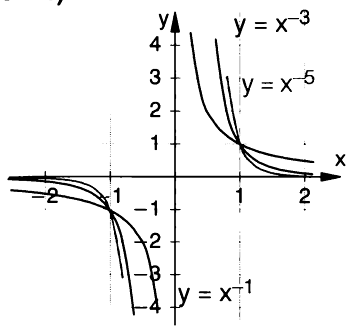


Abb. 2.6 Potenzfunktionen mit *negativen* ungeraden Exponenten

- Abb. 2.5 und Abb. 2.6 zeigen Graphen von Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten. Sie liegen *punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs*. Dies gilt für alle Potenzfunktionen mit **ungeraden** Exponenten, da nun $f(-x) = -f(x)$ ist; solche Potenzfunktionen sind daher **ungerade Funktionen** (siehe Seite 6).
- Auch Potenzfunktionen mit negativen Exponenten, etwa $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, sind für $x = 0$ nicht definiert. Sie besitzen dort eine Unendlichkeitsstelle.

Die Funktionsgraphen gehen ferner durch die Punkte (1/1) und (–1/–1), da $1^n = 1$ und $(-1)^n = -1$ für ungerades n ist.

Bedeutung des Koeffizienten c

Wir wählen n = 2 (Abb. 2.7) sowie n = 3 (Abb. 2.8) und variieren c, etwa $c = 1, 2, \frac{1}{2}$ und –1.

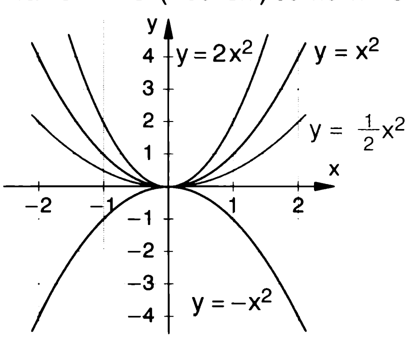


Abb. 2.7 Potenzfunktionen mit n= 2 und $c = 1, 2, \frac{1}{2}$ und –1

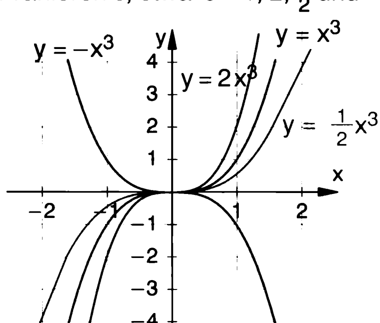


Abb. 2.8 Potenzfunktionen mit n= 3 und $c = 1, 2, \frac{1}{2}$ und –1

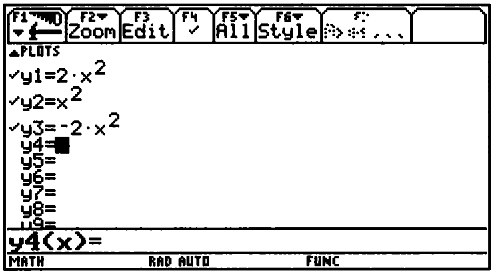
Voyage 200

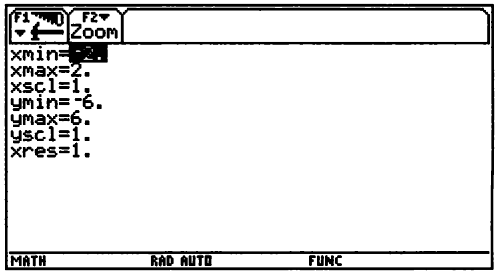
> Bedeutung des Faktors c für den Graphen von $y = c \cdot x^n$:
>
> (1) $|c| > 1$: Streckung in y-Richtung.
>
> (2) $|c| < 1$: Stauchung in y-Richtung.
>
> Ist $c < 0$, so kommt es außerdem zu einer Spiegelung an der x–Achse.

Die Graphen der Potenzfunktionen mit $y = c \cdot x^2$ sind **Parabeln**, der Graph von $y = x^2$ heißt *Grundparabel*.

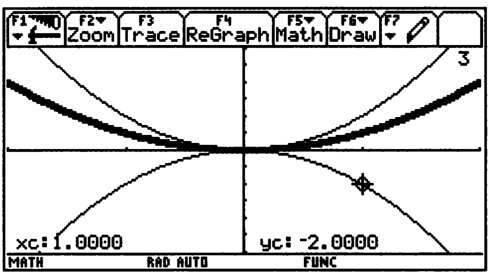
Ist $|c| > 1$, so ist die Parabel $y = c \cdot x^2$ steiler als die Grundparabel, ist $|c| < 1$, so ist sie flacher. Eine Parabel mit $c < 0$ ist gegenüber jener mit $y = |c| \cdot x^2$ an der x-Achse gespiegelt.

Die Graphen der Potenzfunktionen mit $y = c \cdot x^{-1} = \frac{c}{x}$ sind **Hyperbeln**.



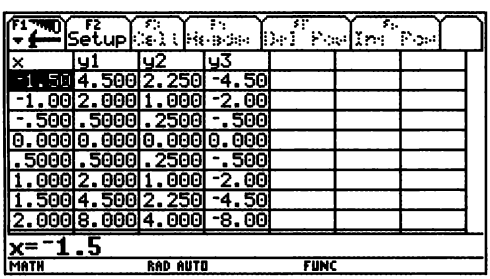


Mit dem y-Editor (◆ W) werden die Funktionsterme und mit dem Window-Editor (◆ E) die Parameter für den Zeichenbereich eingegeben. Die Linienstärke der Funktion y2 = x^2 wird im y-Editor mit F6 3 (3: Square) geändert.



Mit ◆ R werden die Funktionsgraphen dargestellt. Mit F5 1 (1: Value) gibt man bei xc einen x-Wert ein und durch Drücken von ENTER wird der dazugehörige y-Wert yc angezeigt. Durch Bewegen des Cursors nach oben bzw. unten werden bei den einzelnen Graphen der Funktionen die y-Werte angegeben.

Eine weitere Möglichkeit, die Bedeutung des Faktors c zu erkennen, bietet eine Wertetabelle.



x	y1	y2	y3
-1.50	4.500	2.250	-4.50
-1.00	2.000	1.000	-2.00
-.500	.5000	.2500	-.500
0.000	0.000	0.000	0.000
.5000	.5000	.2500	-.500
1.000	2.000	1.000	-2.00
1.500	4.500	2.250	-4.50
2.000	8.000	4.000	-8.00

x=-1.5

Mit ◆ Y werden die Wertetabellen der Funktionen erstellt, die mit dem y-Editor eingegeben wurden.

Im Überblick: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Funktionen mit der Gleichung $y = c \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $c \neq 0$ nennt man **Potenzfunktionen (mit ganzzahligen Exponenten)**.

Potenzfunktionen mit **geraden** ganzzahligen Exponenten n sind **gerade Funktionen**, d.h. ihre Graphen liegen symmetrisch zur y-Achse.

Potenzfunktionen mit **ungeraden** ganzzahligen Exponenten n sind **ungerade Funktionen**, d.h. ihre Graphen liegen punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Ist n negativ, dann ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Sie besitzt hier eine *Unendlichkeitsstelle*.

Bedeutung des Faktors c für den Graphen von $y = c \cdot x^n$:
$|c| > 1$: Streckung in y–Richtung; $|c| < 1$: Stauchung in y-Richtung.
Ist $c < 0$, so kommt es außerdem zu einer Spiegelung an der x-Achse.

Die Graphen von $y = c \cdot x^2$ sind **Parabeln**, der Graph von $y = x^2$ heißt *Grundparabel*.
Die Graphen von $y = c \cdot x^{-1} = \frac{c}{x}$ sind **Hyperbeln**.

Aufgaben

2.6 Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle in [–2, +2] die Potenzfunktionen:

a) $y = 0{,}1 \cdot x^3$ **b)** $y = -x^2$ **c)** $y = \frac{1}{8} \cdot x^4$ **d)** $y = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3$

e) $y = \frac{3}{x}$ **f)** $y = -\frac{2}{x^2}$ **g)** $y = \frac{2}{x^3}$ **h)** $y = -\frac{1}{2x}$

2.7 Gib bei den folgenden Potenzfunktionen $y(x) = c \cdot x^n$ den Faktor c und den Exponenten n an:

a) $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$ **b)** $W(v) = \frac{m \cdot v^2}{2}$ **c)** $F(v) = \frac{1}{2} c_W A \varrho v^2$

d) $P(T) = \sigma \cdot A \cdot T^4$ **e)** $P(R) = \frac{U^2}{R}$ **f)** $F(r) = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$

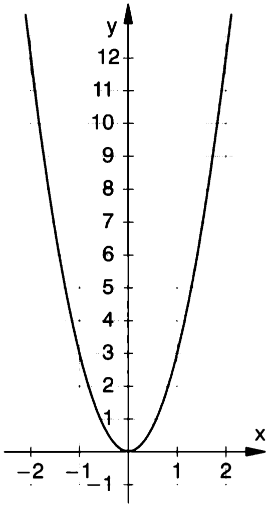
2.8 Das Massenträgheitsmoment J eines Vollzylinders mit der Masse m und dem Radius r beträgt $J = \frac{1}{2} \cdot m r^2$. Stelle für eine zylindrische Scheibe aus Stahl ($\varrho = 7{,}85$ kgdm^{-3}) mit der Dicke h = 2 cm das Trägheitsmoment J in Abhängigkeit vom Radius r für $0 < r \leq 10$ cm graphisch dar.

2.9 Für die magnetische Feldstärke H eines stromdurchflossenen Leiters im Abstand r gilt: $H = \frac{I}{2\pi r}$. Stelle H als Funktion von r graphisch dar, wenn für $I = 10$ A und r aus dem Intervall [0,1 m, 0,5 m] ist!

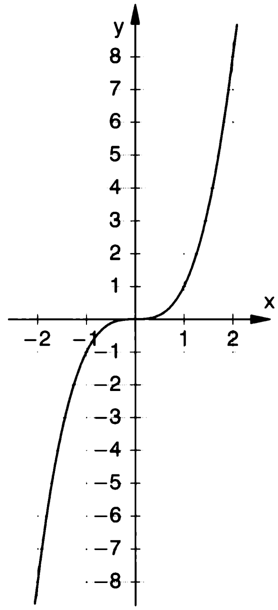
2.10 Welcher Graph gehört zu welcher Potenzfunktion?

a) $y = x^3$ **b)** $y = \frac{1}{x}$ **c)** $y = 3 \cdot x$ **d)** $y = -\frac{1}{x^3}$ **e)** $y = 3 \cdot x^2$ **f)** $y = \frac{1}{2} \cdot x^5$

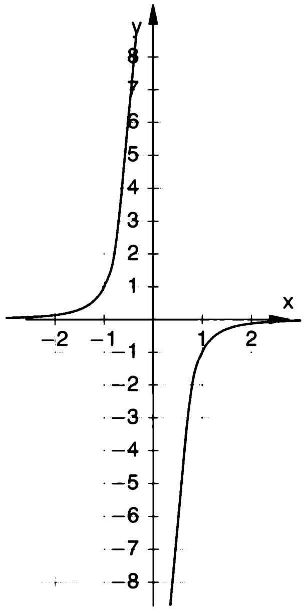
Graph A



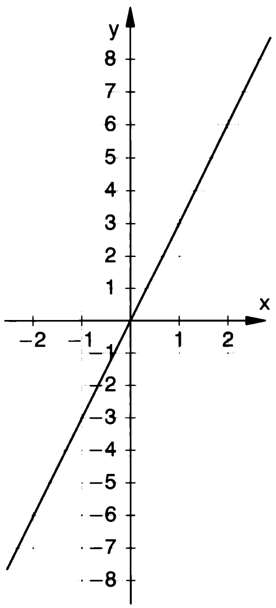
Graph B



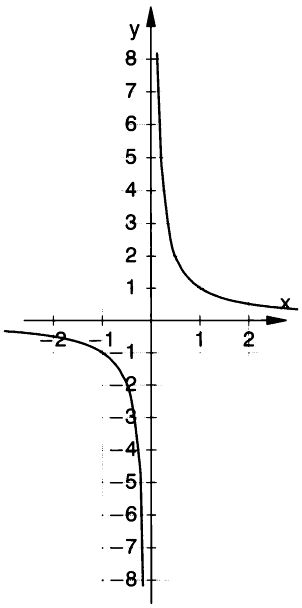
Graph C



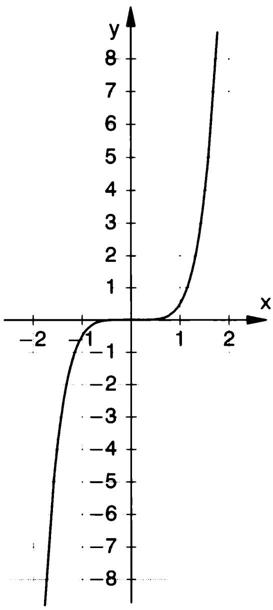
Graph D



Graph E



Graph F



2.3 Binomischer Lehrsatz

Aus "Ingenieur-Mathematik 1" kennen wir die Formel für das Quadrieren eines Binoms: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Wir stellen nun die Frage nach einer allgemeinen Formel für die Potenzen des Binoms mit $(a + b)^n$ mit $n = 2, 3, 4, \dots$

Beispiel 2.4 : Potenzieren von Binomen

Berechne $(a + b)^3$, $(a + b)^4$ und $(a + b)^5$!

Lösung

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = (a + b)^4 (a + b) = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ (rechne nach!).

Aus diesen Formeln lässt sich vermuten, dass für die n-te Potenz eines Binoms $(a + b)^n$ folgende Gesetzmäßigkeiten gelten:

- Die Summanden sind Produkte von Potenzen von a und b (beim ersten und letzten Summanden könnte man sich b^0 bzw. a^0 als Faktor dazudenken), wobei die Summe ihrer Hochzahlen immer n ergibt.
  Beispiel: Der zweite Summand von $(a + b)^5$ lautet $5a^4b = 5a^4b^1$; $4 + 1 = 5 = n$.
- Der Exponent von a beginnt mit n und endet mit 0; jener von b beginnt mit 0 und endet mit n.
- Der zweite und vorletzte Koeffizient ist gleich der Hochzahl n.

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1$

$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$

$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$

$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$

$(a + b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5$

usw.

n = 0: 1

n = 1: 1 1

n = 2: 1 2 1

n = 3: 1 3 3 1

n = 4: 1 4 6 4 1

n = 5: 1 5 10 10 5 1

usw. $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

Die Koeffizienten in den einzelnen Produkten kann man sehr einfach mit dem sogenannten **Pascal'schen[1] Dreieck** bestimmen, wie das nebenstehende Schema zeigt.

[1] Blaise PASCAL (1623 – 1662), französischer Philosoph und Mathematiker

Die Koeffizienten der Potenzen eines Binoms nennt man die **Binomialkoeffizienten**. Man schreibt dafür:

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$, gelesen: "n über k". Zusätzlich wird vereinbart: $\binom{n}{0} = 1$.

Damit ist der Binomialkoeffizient für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$ festgelegt. Er ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich viele, nämlich k Faktoren besitzt (wenn man im Nenner den Faktor 1 mitberücksichtigt).

Für den Nenner schreibt man auch k!, gesprochen "**k-Fakultät**" oder "**k-Faktorielle**":

$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$

mit der ergänzenden Vereinbarung: $0! = 1$.

Es gibt noch eine weitere Formel zur Berechnung der Binomialkoeffizienten:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Diese Formel ist für die praktische Berechnung von Binomialkoeffizienten aufgrund der Fakultäten weniger einfach zu handhaben. Zeige die Gleichheit der beiden Formeln!

Für die händische Berechnung eines Binomialkoeffizienten kann die **Symmetrieeigenschaft** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ vorteilhaft sein. Auf sie ist die Symmetrie des Pascal'schen Dreiecks zurückzuführen. Zeige die Richtigkeit dieser Formel!

Beispiel 2.5 : Berechnung von Binomialkoeffizienten

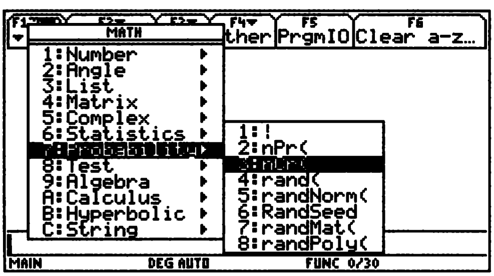
Berechne $\binom{5}{3}$ und $\binom{12}{10}$! Wie groß ist $\binom{4}{0}$?

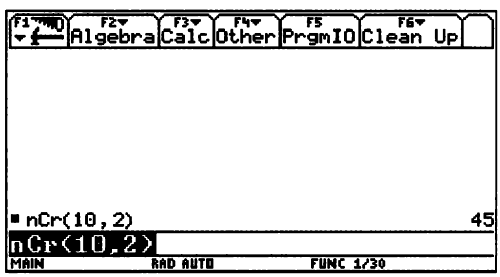
Lösung

$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$; $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$; $\binom{4}{0} = 1$.

Die Ermittlung der Binomialkoeffizienten kann auch mit dem Taschenrechner erfolgen:

Voyage 200





Man erhält etwa $\binom{10}{2}$ durch [2ND] [5] (Math-Menü) oder durch zeichenweises Eintippen.

Wir können nun beispielsweise schreiben:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}\cdot a^5b^0 + \binom{5}{1}\cdot a^4b^1 + \binom{5}{2}\cdot a^3b^2 + \binom{5}{3}\cdot a^2b^3 + \binom{5}{4}\cdot a^1b^4 + \binom{5}{5}\cdot a^0b^5 =$$
$$= a^5 + 5\cdot a^4b^1 + 10\cdot a^3b^2 + 10\cdot a^2b^3 + 5\cdot a^1b^4 + b^5.$$

Allgemein gilt (auf einen Beweis wird verzichtet):

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^nb^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}\cdot a^0b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}b^k$$

$(a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

Beispiel 2.6 : Binomischer Lehrsatz

Berechne $(r+2s)^3$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes!

Lösung

$$(r+2s)^3 = \binom{3}{0}r^3 + \binom{3}{1}r^2\cdot(2s)^1 + \binom{3}{2}r\cdot(2s)^2 + \binom{3}{3}(2s)^3 = r^3 + 3r^2s + 3r^4s^2 + 8s^3 =$$
$$= r^3 + 6r^2\cdot s + 12rs^2 + 8s^3$$

Im Überblick: Binomischer Lehrsatz

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ sowie $\binom{n}{0} = 1$;
$n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$

k-Fakultät oder **k-Faktorielle**:
$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k$ (Produkt der ersten k natürlichen Zahlen, beginnend mit 1); $0! = 1$

Symmetrieeigenschaft der Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Binomischer Lehrsatz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}b^k$

Aufgaben

2.11 Berechne:

a) $\binom{7}{2}$ **b)** $\binom{10}{5}$ **c)** $\binom{4}{4}$ **d)** $\binom{112}{1}$ **e)** $\binom{3}{0}$ **f)** $\binom{15}{3}$ **g)** $\binom{12}{11}$ **h)** $\binom{10}{6}$ **i)** $\binom{9}{6}$ **j)** $\binom{20}{16}$

2.12 Berechne mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes:
a) $(a+b)^4$ **b)** $(2d+3)^5$ **c)** $(a-h)^4$ **d)** $(2s+3t)^6$ **e)** $(5f-2g)^3$ **f)** $(2a-3b)^5$ **g)** $(a-b)^8$

2.4 Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen (rationalen) Exponenten

In "Ingenieur-Mathematik 1" (Seite 75 f) haben wir definiert:

(1) Die **n-te Wurzel** ($n \in \mathbb{N}^*$, d.h. $n = 1,2,\ldots$) aus einer *nichtnegativen* Zahl a ist jene *nichtnegative* Zahl w, deren n-te Potenz gleich a ist: $\sqrt[n]{a} = w \Leftrightarrow w^n = a$.

(2) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; umgekehrt heisst dies, dass $\sqrt[n]{a}$ als **Potenz** geschrieben werden kann.

n heißt *Wurzelexponent*, a *Radikand* und w *Wurzel*wert. Das Berechnen von w nennt man *Wurzelziehen* oder *Radizieren*.

Aus der Definition der n-ten Wurzel ergibt sich:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ und $\sqrt[n]{a^n} = a$; speziell: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ und $\sqrt{a^2} = a \; (a \geqslant 0)$.

Wurzelziehen und Potenzieren sind also zueinander Umkehroperationen wie etwa Addieren und Subtrahieren.

Anmerkung zur Schreibweise: Man schreibt in der Regel $3 \cdot \sqrt{2}$ und nicht $\sqrt{2} \cdot 3$; damit soll ein irrtümliches Hineinrutschen des Faktors 3 unter die Wurzel vermieden werden. Ähnlich schreibt man auch $3 \cdot \sin\alpha$ und nicht $\sin\alpha \cdot 3$.

Beispiel 2.7 : Grundlegende Berechnungen

Berechne:

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$ **b)** $\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)$ **c)** $\left(3\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3$ **d)** $\left(2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3$

Lösung

Zu **a)** Verwendung der Formel $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ ergibt:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Zu **b)** $\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right) = 1^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = -2$

Zu **c)** $\left(3\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3 = 3^3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 27\cdot 2 = 54$

Zu **d)** $\left(2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3 = 8\cdot\frac{1}{4} = 2$

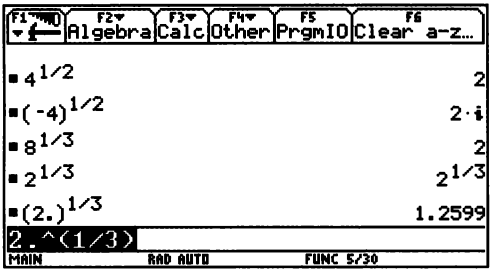
Beispiel 2.8 : Potenzen mit Exponenten $\frac{1}{n}$ (n = 1, 2, ...)

Berechne mit dem Taschenrechner

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$ **b)** $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$ und $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Voyage 200

Lösung



Zu **a)** Die Hochzahlen $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ sind in Klammern zu setzen.
Gibt man -4 statt 4 ein, so zeigt der Taschenrechner als Ergebnis 2i, eine nicht mehr reelle Zahl!
(Näheres dazu in Abschnitt 7; "Komplexe Zahlen".)

Zu **b)** Will man den numerischen Wert von $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$, so gibt man wenigstens eine der Zahlen 2, 1 oder 3 mit einem Dezimalpunkt ein. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Eingabe durch [♦] ENTER abzuschließen.

Wir können nicht nur Ausdrücke der Art $a^{\frac{1}{n}}$ einen Sinn geben. Auch Ausdrücken wie $a^{\frac{2}{3}}$ kann man durch die Forderung, dass die Potenzgesetze auch für Potenzen mit gebrochenen (rationalen) Exponenten gelten sollen, eine Bedeutung geben: $a^{\frac{2}{3}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Ist $\sqrt[3]{-8} = -2$, da ja $(-2)^3 = -8$ ist? Durch Anwendung des 5.Potenzgesetzes folgt:

$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2.$

Es ergibt sich ein Widerspruch, weshalb man Wurzeln nur aus positiven Radikanden *definiert*! Überprüfe was der Taschenrechner bei der Eingabe von $\sqrt[3]{-8}$ angibt.

Wir definieren nun Potenzen mit rationalen Exponenten als Wurzeln:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, a > 0)$$

Wurzeln kann man stets als Potenzen mit rationalen Exponenten schreiben und umgekehrt! Damit kann das Rechnen mit Wurzeln als Rechnen mit Potenzen aufgefasst werden. **Jede Aufgabe der Wurzelrechnung kann mit Hilfe der Potenzrechnung gelöst werden.**

Für das praktische Rechnen ist oft die Wurzelschreibweise günstiger als die Schreibung mit gebrochenen Exponenten. Deswegen werden im Folgenden einige grundlegende Rechengesetze für Wurzeln in der Wurzelschreibweise angegeben.

Beispiel 2.9 : Wurzeln als Potenzen

a) Schreibe als Potenz: $\sqrt[5]{x^3}$ sowie $\sqrt[3]{\frac{1}{p}}$ $(p > 0)$

b) Schreibe als Wurzel: $(2y)^{\frac{2}{7}}$ sowie $c^{-0{,}4}$ $(c > 0)$

Lösung

Zu **a)** $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} = x^{0{,}6}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{p}} = \sqrt[3]{p^{-1}} = p^{-\frac{1}{3}}$.

Zu **b)** $(2y)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{(2y)^2}$; $c^{-0{,}4} = c^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{c^2}}$.

Rechnen mit Wurzeln

Wir setzen im Folgenden voraus:

- Alle auftretenden Radikanden sind nichtnegativ.
- Wurzelexponenten sind ganzzahlig und positiv.
- Auftretende Nenner sind ungleich 0.

Beispiel 2.10 : Addition und Subtraktion von Wurzeln

Vereinfache, soweit möglich: **a)** $3 \cdot \sqrt{a} - 2 \cdot \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}$ **b)** $2 \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$

Lösung

Zu **a)** $3 \cdot \sqrt{a} - 2 \cdot \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} = \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}$;

schreibt man das Ergebnis in der Potenzschreibweise, also $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}$, so erkennt man, dass eine weitere Vereinfachung nicht möglich ist!

Zu **b)** $2 \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}$;

eine weitere Vereinfachung ist nicht möglich; dies erkennt man wieder, wenn man das Ergebnis in der Potenzschreibweise schreibt: $b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}$.

Wurzeln lassen sich nur **addieren** oder **subtrahieren**, wenn ihre **Radikanden und Wurzelexponenten jeweils gleich** sind.

Zwei Wurzeln heißen *gleichnamig*, wenn sie den gleichen Wurzelexponenten haben.
Beispiel: $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$.
Gleichnamige Wurzeln lassen sich einfach multiplizieren oder dividieren.

Beispiel 2.11 : Multiplikation und Division von gleichnamigen Wurzeln

Berechne: **a)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

Lösung

Zu **a)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (4 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Zu **b)** $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \left(\dfrac{10}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$

Gleichnamige Wurzeln werden **multipliziert (dividiert)**, indem man ihre **Radikanden multipliziert (dividiert)** und dann die Wurzel zieht:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$;

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

Oder umgekehrt: Die **Wurzel aus einem Produkt** lässt sich ziehen, indem man die **Wurzel aus jedem Faktor zieht** (und die entstehenden Wurzelwerte multipliziert).
Die **Wurzel aus einem Bruch** lässt sich ziehen, indem man die **Wurzel aus Zähler und Nenner zieht** (und die entstehenden Wurzelwerte dividiert).

Dieses Wurzelgesetz findet in zwei wichtigen Aufgabenstellungen Anwendung:
(1) Eine Wurzel soll teilweise gezogen werden,
(2) ein vor einer Wurzel stehender Faktor soll unter die Wurzel gebracht werden.

Beispiel 2.12 : Teilweises (oder partielles) Wurzelziehen

Ziehe teilweise die Wurzel: **a)** $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt[3]{500}$ **c)** $\sqrt{5 \cdot x^2 \cdot y^3}$

Vereinfache nach teilweisem Wurzelziehen: **d)** $\sqrt{72} - 2 \cdot \sqrt{18}$

Lösung

Zu **a)** $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

Zu **b)** $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{4} = 5 \cdot \sqrt[3]{4}$

Zu **c)** $\sqrt{5 \cdot x^2 \cdot y^3} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^3} = \sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{y \cdot y^2} = \sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{y^2} = xy \cdot \sqrt{5y}$

Zu **d)** $\sqrt{72} - 2 \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36 \cdot 2} - 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 2} = 6 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 0$

Beispiel 2.13 : Unter die Wurzel bringen

Bringe den vor der Wurzel stehenden Faktor unter die Wurzel:

a) $a \cdot \sqrt{2}$ **b)** $x \cdot \sqrt[4]{a}$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ **d)** $(1 - c) \cdot \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}}$

Lösung

Zu **a)** $a \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a^2 \cdot 2} = \sqrt{2 \cdot a^2}$

Zu **b)** $x \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a \cdot x^4}$

Aus **a)** und **b)** erkennt man, dass man einen Faktor als *Quadrat* unter eine *Quadrat*wurzel, allgemeiner als *n-te* Potenz unter eine *n-te* Wurzel bringt.

Zu **c)** $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

Zu **d)** $(1 - c) \cdot \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}} = \sqrt{(1 - c)^2 \cdot \frac{1 + c}{1 - c}} = \sqrt{(1 - c) \cdot (1 + c)} = \sqrt{1 - c^2}$

Für das weitere Rechnen mit Wurzeln werden keine eigenen Wurzelgesetze mehr angegeben. Entsprechende Aufgabenstellungen können mit Hilfe der Potenzrechnung gelöst werden.

Beispiel 2.14 : Weitere Rechnungen mit Wurzeln

Schreibe als eine einzige Wurzel:

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{12}$ **b)** $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{5}}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{4}}$

Lösung

Zu **a)** $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{\frac{1}{3}} = 12^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 12^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{12^5}$

Zu **b)** $\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{5^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 5^{-\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{5^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$

Zu **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{4^{\frac{1}{2}}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{4}$

Achtung!

$\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$, allgemein: $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

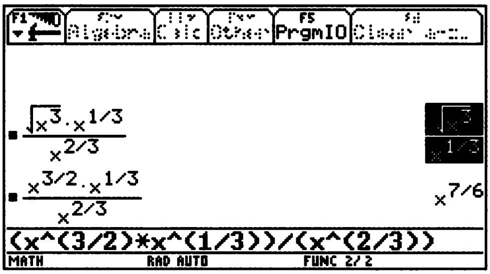
Für Summen oder Differenzen gibt es kein Wurzelgesetz!

Beispiel 2.15 : Wurzeln mit dem Voyage 200

Vereinfache mit dem Voyage 200 $\dfrac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ zu einer einzigen Wurzel .

Voyage 200

Lösung



Wie man an diesem Beispiel erkennen kann, muss jede Wurzel in der Potenzschreibweise eingegeben werden.

Beispiel 2.16 : Wurzelfreimachen eines Nenners

Schreibe ohne Wurzel im Nenner **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$

Lösung

Wir versuchen durch eine geeignete *Erweiterung* des Bruches die Wurzel(n) aus dem Nenner wegzubringen.

Zu **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Zu **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3}{4^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{4^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{4}$

Zu **c)** Wir erweitern mit $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ und verwenden $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Zu **d)** Statt den Bruch zu erweitern, kann auch folgende Vorgangsweise gewählt werden:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{1-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

Das Wegbringen von Wurzeln aus dem Nenner nennt man auch **Rationalmachen des Nenners**.

Im Überblick: Wurzeln als Potenzen

Definition: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ sowie $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, a \geq 0$.
Damit kann man eine Wurzel stets als Potenz mit gebrochenem (rationalem) Exponenten schreiben und umgekehrt!
Jede Aufgabe der Wurzelrechnung kann mit Hilfe der Potenzrechnung gelöst werden.

Wurzeln lassen sich nur **addieren** oder **subtrahieren**, wenn jeweils Radikanden und Wurzelexponenten *gleich* sind.

Produkt und Quotient gleichnamiger Wurzeln (Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten):

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Wichtig ist auch die Lesart dieser beiden Wurzelgesetze *von rechts nach links*!

Teilweises oder partielles Wurzelziehen: $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$.
Faktor unter eine Wurzel bringen: $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$.

Rationalmachen eines Nenners: Der Nenner eines Bruches kann durch eine geeignete Erweiterung des Bruches von Wurzeln freigemacht.

Aufgaben

Alle Aufgaben sind mit der Hand zu lösen. Kontrolle mit dem Taschenrechner.

2.13 Berechne und vereinfache:

a) $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2$ **b)** $\left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)$ **c)** $\left(3 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)$

d) $\left(3 \cdot \sqrt{2} - 2\right) \cdot \left(\sqrt{2} + 2\right)$ **e)** $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ **f)** $\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2$

2.14 Schreibe die Wurzeln als Potenz:

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[4]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{4}$ **d)** $\sqrt[3]{7^2}$ **e)** $\sqrt[6]{5^4}$ **f)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ **g)** $\sqrt{\sqrt{3^4}}$

2.15 Schreibe die Wurzeln als Potenz:

a) $\sqrt{x + y}$ **b)** $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{b}}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ **f)** $\sqrt[3]{\frac{1}{t^2}}$ **g)** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - y^2}}$

2.16 Schreibe die Potenzen als Wurzeln:

a) $3^{\frac{1}{2}}$ **b)** $a^{\frac{2}{3}}$ **c)** $12^{\frac{2}{5}}$ **d)** $7^{\frac{3}{6}}$ **e)** $a^{-\frac{1}{2}}$ **f)** $c^{-\frac{2}{3}}$ **g)** $(2a)^{0,5}$ **h)** $21^{0,2}$ **i)** $(m + n)^{-\frac{1}{3}}$

2.17 Berechne:

a) $0{,}36^{\frac{1}{2}}$ **b)** $32^{0,2}$ **c)** $64^{-\frac{1}{3}}$ **d)** $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$ **e)** $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ **f)** $1024^{-0,1}$ **g)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5}$ **h)** $0{,}001^{-\frac{2}{3}}$

2.18 Richtig oder falsch?

a) $\sqrt{3^2} = \left(\sqrt{3}\right)^2$ **b)** $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4}$ **c)** $\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ **d)** $\left(\sqrt{3^{-1}}\right)^3 = \left(\sqrt{3^3}\right)^{-1}$ **e)** $\left(\sqrt{x^{-1}}\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{x^3}}$

2.19 Vereinfache:

a) $\sqrt[3]{5} + 2 \cdot \sqrt{5} - \left(4 \cdot \sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt[3]{5}\right)$ **b)** $2 \cdot \sqrt{u} - \sqrt[3]{u} - \sqrt{u} - \sqrt[3]{u}$

c) $x \cdot \sqrt{y} - y \cdot \sqrt{y} - \sqrt{y}$

2.20 Ziehe teilweise die Wurzel:

a) $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt[3]{108}$ **c)** $\sqrt{4a}$ **d)** $\sqrt{a^3}$ **e)** $\sqrt{4uv^2}$

f) $\sqrt[3]{2x^3}$ **g)** $\sqrt[3]{54x^4y}$ **h)** $\sqrt{9 \cdot (x^2 + y^2)}$ **i)** $\sqrt{a \cdot b^2 - b^3}$ **j)** $\sqrt[3]{v^7}$

k) $\sqrt{1{,}21 \cdot 10^3}$ **l)** $\sqrt{x^{2n+3}}$ **m)** $\sqrt{\frac{8}{9}}$ **n)** $\sqrt{\frac{2}{b^2}}$ **o)** $\sqrt{\frac{8}{x^3}}$

p) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^4}}$ **q)** $\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^3}}$ **r)** $\sqrt{\frac{(x + y)^3(x - y)}{4}}$

2.21 Vereinfache die folgenden Produkte:

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{9}$ **c)** $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ **e)** $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2x^3}$ **f)** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt{2a}$

g) $\sqrt[3]{9a} \cdot \sqrt[3]{3a^2}$ **h)** $\sqrt[3]{1 - a} \cdot \sqrt[3]{(1 - a)^2}$ **i)** $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$

j) $\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{6}$ **k)** $\sqrt{3a + 3b} \cdot \sqrt{12(a + b)}$ **l)** $\sqrt{(u \cdot v + v)} \cdot \sqrt{(u^2v + u \cdot v)}$

2.22 Bringe den Faktor unter das Wurzelzeichen:

a) $2 \cdot \sqrt{3}$ **b)** $4 \cdot \sqrt[3]{2}$ **c)** $3 \cdot \sqrt[4]{5}$ **d)** $x^2 \cdot \sqrt[3]{4x}$ **e)** $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{8}$

f) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{16}$ **g)** $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$ **h)** $2m \cdot \sqrt{\frac{1}{m}}$ **i)** $\frac{2}{a} \cdot \sqrt{a^3}$ **j)** $\frac{2}{x} \cdot \sqrt{\frac{x}{3}}$

k) $\frac{3c}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{c}}$ **l)** $\frac{3}{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{9}}$ **m)** $(u + 1) \cdot \sqrt{2}$ **n)** $(a - b) \cdot \sqrt{\frac{a + b}{a - b}}$ **o)** $\frac{1}{x + 1} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$

2.23 Vereinfache die folgenden Brüche:

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{24a}}{\sqrt[3]{3a}}$ **e)** $\frac{\sqrt{c^3 \cdot x}}{\sqrt{c \cdot x}}$

f) $\frac{\sqrt{2(x + 3)}}{\sqrt{x + 3}}$ **g)** $\frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ **h)** $\sqrt{\frac{1}{9m^2}}$ **i)** $\sqrt{\frac{3x^2}{(4y)^2}}$ **j)** $\sqrt{\frac{1}{a^{2n}}}$

2.24 Schreibe folgende mehrfache Wurzeln als einfache Wurzel und vereinfache gegebenenfalls:

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{6^3}}$ **c)** $\sqrt{\left(\sqrt{4}\right)^8}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ **e)** $\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$

f) $\sqrt[5]{4 \cdot \sqrt{2}}$ **g)** $\sqrt[3]{u \cdot \left(\sqrt[4]{u}\right)^2}$ **h)** $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{b}}}$ **i)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$ **j)** $\sqrt[3]{\frac{r}{s}\sqrt{\frac{s^2}{r}\sqrt{\frac{1}{r^2}}}}$

2.25 Schreibe folgende Terme mit nur einer Wurzel und vereinfache gegebenenfalls:

a) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt[3]{4} \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)^2$ **c)** $\sqrt[3]{100} \cdot \left(\sqrt{10}\right)^3$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{16}}{\left(\sqrt{2}\right)^3}$ **e)** $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

f) $\left(\sqrt[3]{u}\right)^4 \cdot \sqrt{u}$ **g)** $\sqrt[3]{u} \cdot \sqrt{\frac{v}{u}}$ **h)** $\sqrt[4]{x\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}$ **i)** $\frac{p \cdot \sqrt{p}}{\sqrt[4]{p} \cdot \left(\sqrt[3]{p}\right)^2}$ **j)** $\frac{\sqrt[4]{64 \cdot (a + y)^2}}{\sqrt{4 \cdot (a + y)}}$

2.26 Der Nenner ist wurzelfrei zu machen:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{3}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{1}{2\cdot\sqrt{6}}$ **d)** $\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ **e)** $\frac{p}{\sqrt[3]{p}}$

f) $\frac{y}{\sqrt{\frac{x\cdot y}{2}}}$ **g)** $\frac{3}{\sqrt[4]{a+b}}$ **h)** $\frac{u^2-v^2}{2\cdot\sqrt{u-v}}$ **i)** $\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{3x}}$ **j)** $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

k) $\frac{1}{2+5\cdot\sqrt{3}}$ **l)** $\frac{1}{\sqrt{2a-b}}$ **m)** $\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **n)** $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **o)** $\frac{1}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}$

2.27 Richtig oder falsch?

a) $\sqrt[3]{2^3+3^3}=2+3$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{t}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{z}{4}}=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{4}}$ **d)** $\frac{1}{2}\sqrt{3h}=\sqrt{\frac{h}{3}}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x}}}=\sqrt{\frac{x}{2}}$

2.28 Vereinfache:

a) $\sqrt{1{,}21\cdot10^3}+\sqrt{1{,}69\cdot10^3}$ **b)** $\sqrt{1{,}44\cdot10^5}-\sqrt{1{,}00\cdot10^5}$

c) $\sqrt[3]{125a^2}+2\cdot\sqrt[3]{8a^2}$ **d)** $\sqrt{0{,}49\cdot\pi r^2h}+\sqrt{0{,}36\cdot\pi r^2h}$

e) $0{,}2\cdot\sqrt{c^2B^3}-0{,}1\cdot c\cdot B\cdot\sqrt{4B}$ **f)** $\sqrt{3x-3}\cdot\sqrt{x-1}$

g) $a\cdot\sqrt{\frac{b}{2a}}+b\cdot\sqrt{\frac{a}{2b}}$ **h)** $2a\cdot\sqrt{\frac{v^3}{a}}-v\cdot\sqrt{a\cdot v}$ **i)** $s\cdot\sqrt{t}+\frac{2\cdot s\cdot t}{\sqrt{t}}$

2.29 Berechne:

a) $\left(3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ **b)** $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)^2$

c) $\left(x\cdot\sqrt{y}-y\cdot\sqrt{x}\right)^2$ **d)** $\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\frac{1-a}{1-\sqrt{a}}$ **e)** $x\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

f) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{a}}{2}\right)+\frac{a}{4}$ **g)** $\sqrt{v-1}\cdot\sqrt{\frac{v}{v-1}-v}$

h) $\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}\cdot\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}$ **i)** $\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-x}$

j) $\sqrt{x^2-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)$ **k)** $2\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ **l)** $\frac{1-h}{1-\sqrt{h}}-\frac{1+h}{1+\sqrt{h}}$

2.30 Vereinfache folgende Terme:

a) $\frac{1}{2}\sqrt{1+2x}+\frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ **b)** $-\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}$ **c)** $\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}$

2.31 Eine zylindrische Dose des Inhalts $V = 1\,l$ besitzt die kleinste Oberfläche, wenn für den Dosenradius r gilt: $r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ (in dm). Berechne die Dosenhöhe $h=\frac{1}{\pi\cdot r^2}$ und vergleiche sie mit r.

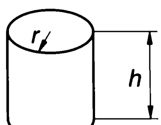


Abb. 2.9

2.5 Wurzelgleichungen

> Gleichungen, in denen die Gleichungsvariable im Radikanden einer oder mehrerer Wurzeln vorkommt, nennt man **Wurzelgleichungen**.

Um die Wurzeln zu beseitigen, werden **beide Seiten der Wurzelgleichung** (eventuell mehrmals) **potenziert**. Im Folgenden werden nur solche Wurzelgleichungen betrachtet, die sich auf lineare Gleichungen überführen lassen.

Das folgende Beispiel zeigt, dass bei der Lösung einer Wurzelgleichung Vorsicht angebracht ist.

Beispiel 2.17 : Lösbarkeit einer Wurzelgleichung

Löse die Gleichungen **a)** $\sqrt{2x+8}+4=0$ **b)** $\sqrt{2x+8}-4=0$

Lösung

Als Grundmenge wird $\mathbb{R}$ angenommen; dies gilt auch für alle weiteren Gleichungen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist oder sich aus sachlichen Überlegungen etwas anderes ergibt. Für eine sinnvolle Einsetzung in die Gleichung ist erforderlich, dass der Radikand $2x+8 \geqslant 0$ ist; daraus folgt: $x \geqslant -4$ und daher für Definitionsmenge für beide Gleichungen **a)** und **b)** $\mathbb{D} = [-4, \infty[$.

Zu **a)** $\sqrt{2x+8}+4=0;$

$\sqrt{2x+8}=-4$ | quadrieren

Zu **b)** $\sqrt{2x+8}-4=0;$

$\sqrt{2x+8}=4$ | quadrieren

$$2x+8=16$$
$$x=4$$

Beide Gleichungen führen anscheinend auf die gleiche Lösung!

Probe zu **a)**: $\sqrt{2x+8}+4=8 \neq 0$, d.h. die Probe stimmt nicht, daher besitzt diese Gleichung keine Lösung: $\mathbb{L}=\{\,\}$.

Probe zu **b)**: $\sqrt{2x+8}-4=0$, die Probe stimmt, daher besitzt diese Gleichung 4 als Lösung: $\mathbb{L}=\{4\}$.

Hinweise:

(1) Würde man die Gleichung a) oder b) sofort quadrieren, so erhielte man $2x+8+2\cdot 4\cdot\sqrt{2x+8}+16=0$ bzw. $2x+8-2\cdot 4\cdot\sqrt{2x+8}+16=0$ (binomische Formel!); die Wurzel tritt wieder auf. Man verhindert dies, indem man die Gleichung so umformt, dass die Wurzel *allein* auf einer Seite der Gleichung steht.

(2) Die Gleichung a) fordert, dass die nichtnegative Wurzel $\sqrt{2x+8}$ vermehrt um 4 gleich 0 sein soll. Dies ist nicht erfüllbar. Man erkennt auch aus dieser Überlegung, dass die Gleichung *keine* Lösung haben kann.

Achtung!

Quadriert man eine Gleichung (wie jene in Beispiel 2.17 a)), so kann die *entstehende* Gleichung eine Lösung besitzen, welche die ursprüngliche Gleichung nicht besitzt.

Daher ist bei Wurzelgleichungen **stets eine Probe nötig**!

Das Quadrieren einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 212).

Beispiel 2.18 : Wurzelgleichung

Löse die Wurzelgleichung $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x+4}$

Lösung

$\sqrt{3x+2} = \sqrt{x+4}$ | beide Seiten quadrieren

$3x + 2 = x + 4$; daraus: $x = 1$.

Probe: $\sqrt{3 \cdot 1 + 2} = \sqrt{1+4}$ Damit: $\mathbb{L} = \{1\}$.

Anmerkung: Würde die Wurzelgleichung $\sqrt{3x+2} = -\sqrt{x+4}$ lauten, so ergäbe sich nach dem Quadrieren ebenfalls $3x + 2 = x + 4$ (wie bei der eben gelösten Wurzelgleichung), woraus $x = 1$ folgte. Die Probe zeigt, dass dies keine Lösung ist.

Beispiel 2.19: Graphisches Lösen einer Wurzelgleichung (Beispiel 2.18)

Löse die Wurzelgleichung $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x+4}$ graphisch!

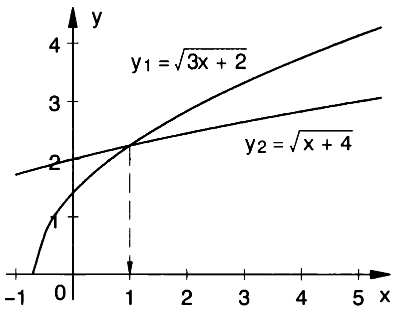
Lösung

Die linke und die rechte Seite der Gleichung kann als je ein Funktionsterm betrachtet werden, wodurch man die zwei Funktionen $y_1 = \sqrt{3x+2}$ sowie $y_2 = \sqrt{x+4}$. erhält. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

(1) Wir ermitteln den Schnittpunkt der Graphen der beiden Funktionen. Die Lösung ist die *Schnittstelle* der beiden Graphen.

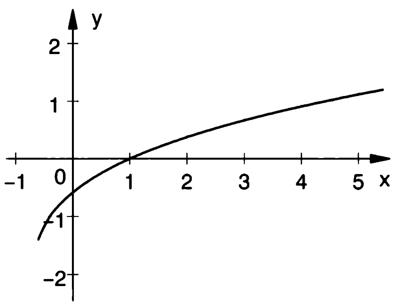
(2) Die Lösung ist die *Nullstelle* der Differenzfunktion $y_1 - y_2 = \sqrt{3x+2} - \sqrt{x+4}$.

Zu (1)



1 ist als x-Koordinate des Schnittpunktes die Schnittstelle der beiden Graphen: $\mathbb{L} = \{1\}$

Zu (2)



1 ist Nullstelle der Differenz der Funktionen: $\mathbb{L} = \{1\}$

Beispiel 2.20 : Mehrfaches Quadrieren einer Wurzelgleichung

Löse die Gleichung $\sqrt{s-13} + \sqrt{s} = 13$

Lösung

Man kann gleich quadrieren oder – in der Folge etwas günstiger – die Gleichung so umformen, dass auf einer Seite der Gleichung nur noch eine Wurzel steht.

$$\sqrt{s-13} + \sqrt{s} = 13 \qquad | - \sqrt{s}$$

$$\sqrt{s-13} = 13 - \sqrt{s} \qquad | \text{ quadrieren}$$

$$s - 13 = 169 - 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{s} + s \qquad \text{(binomischen Lehrsatz beachten!)}$$

$$\sqrt{s} = 7$$ und daraus durch nochmaliges Quadrieren $s = 49$;

Probe: $\sqrt{49-13} + \sqrt{49} = 13$, die Probe stimmt; daher: $\mathbb{L} = \{49\}$.

Im Überblick: Wurzelgleichungen

Gleichungen, in denen die Gleichungsvariable im Radikanden einer oder mehrerer Wurzeln vorkommt, nennt man **Wurzelgleichungen**.
Um die Wurzeln zu beseitigen, werden **beide Seiten der Wurzelgleichung** (eventuell *mehrmals*) **potenziert**.
Zu jeder Wurzelgleichung muss die **Probe** gemacht werden.

Aufgaben

Löse die Wurzelgleichungen 2.32 bis 2.34.

2.32 **a)** $2\cdot\sqrt{x}=1$ **b)** $\sqrt{4\cdot x}=0{,}8$ **c)** $\frac{1}{4\cdot\sqrt{x}}=0{,}1$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{x}{5}}=2$ **e)** $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}2\cdot x}}=0{,}1$

f) $\sqrt{x+2}=3$ **g)** $\sqrt[3]{2h+1}=3$ **h)** $2=\sqrt[4]{1+\frac{c}{2}}$ **i)** $4+\sqrt{r+2}=0$ **j)** $1-\sqrt{y-3}=0$

2.33 **a)** $t=9+\sqrt{t(t-6)}$ **b)** $\sqrt{(t+5)(t-3)}+1=t$ **c)** $4\sqrt{d+3}=3\sqrt{10+d}$

d) $\sqrt{a+7}=\sqrt{a}+1$ **e)** $\sqrt{19+\sqrt{2a+12}}=5$ **f)** $3\sqrt{4-b}=\sqrt{4-b}+8$

g) $\sqrt{m-5}+2=\sqrt{7+m}$ **h)** $\sqrt{u+4}-\sqrt{u-3}+7=0$

i) $\sqrt{t+12}=3+\sqrt{t-3}$ **j)** $2\left(1+\sqrt{x-10}\right)=\sqrt{4x-12}$

k) $\sqrt{m-10}+1=\sqrt{m-3}$ **l)** $9=\sqrt{z+8}+\sqrt{z-1}$

2.34 **a)** $\sqrt{x-8}+\frac{1}{\sqrt{x-8}}=\sqrt{x-5}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{h}}-\sqrt{h}=\sqrt{h+1}$

c) $\sqrt{5+a}+\sqrt{a}=\sqrt{4a+9}$ **d)** $\frac{5}{3}\sqrt{r-10}+\frac{2}{3}\sqrt{r-13}=\sqrt{2+r}$

2.35 Löse die Wurzelgleichung 2.33 d) und e) graphisch wie im Beispiel 2.19, Seite 32 f, auf zwei Arten!

2.36 Die Wurzelgleichungen 2.34 a) oder c) sind Beispiele für numerisch schwierig zu lösende Probleme; man bezeichnet sie als "schlecht konditioniert". Löse die Wurzelgleichungen mit dem Taschenrechner. Möglicherweise gibt es kein sinnvolles Ergebnis.
Man kann versuchen, die Lösbarkeit durch eine Umformung zu verbessern:
zu 2.34 a): Multipliziere die Gleichung mit $\sqrt{x-8}$: man erhält: $x-7=\sqrt{(x-5)(x-8)}$.

zu 2.34 c): Erweitert man den Term auf der linken Seite, also $\frac{\sqrt{5+a}+\sqrt{a}}{1}$,
mit $\sqrt{5+a}-\sqrt{a}$, so nimmt die Gleichung die Form an:
$\frac{5}{\sqrt{a+5}-\sqrt{a}}=\sqrt{4a+9}$.

2.37 Die Resonanzfrequenz ω_0 eines Serienschwingkreises nach Abb. 2.10 beträgt $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$. Löse die Gleichung nach L.

2.38 Die Impedanz Z eines Serienschwingkreises nach Abb. 2.10 beträgt $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.
Löse die Gleichung nach R.

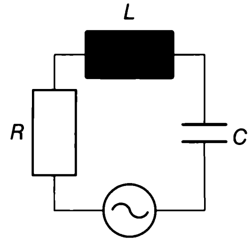


Abb. 2.10

2.39 Die Periodendauer T einer Federschwingung (Federkonstante k, Masse m) nach Abb. 2.11 beträgt $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.
Löse die Gleichung nach k.

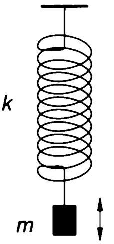


Abb. 2.11

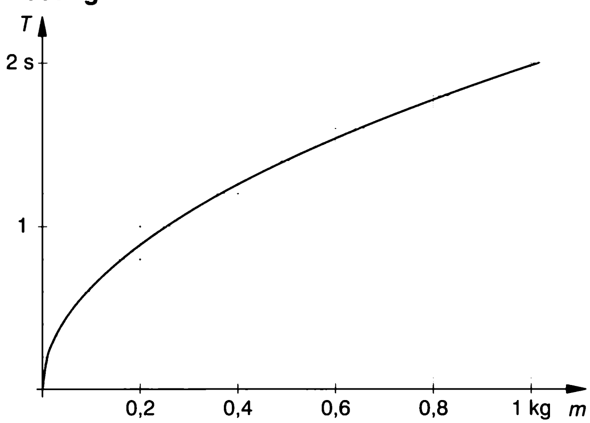
2.40 Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man eine Kathete a = 14,2 cm sowie den Umfang u = 56,6 cm. Berechne die Länge der anderen Kathete b.

2.6 Wurzelfunktionen

Beispiel 2.21 : Periodendauer einer Federschwingung

Für die Periodendauer einer Federschwingung gilt unter bestimmten Voraussetzungen die Beziehung: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, wobei m die Masse des schwingenden Körpers und k die Federkonstante bedeutet. Stelle die Periodendauer T als Funktion der Masse $m \leqslant 1$ kg graphisch dar, wenn $k = 10\ \text{Nm}^{-1}$ ist (Abb. 2.12)!

Lösung



Die Periodendauer T ist Zeitspanne für ein volle Auf- und Abschwingung. Sie wird mit zunehmender Masse in charakteristischer Weise größer: eine Vervierfachung der Masse hat eine Verdopplung der Schwingungsdauer zur Folge.

Abb. 2.12 Periodendauer einer Federschwingung

In den Anwendungen gibt es viele Beispiele für Gesetzmäßigkeiten, bei denen Wurzeln auftreten. Grundlegend dafür sind die sogenannten Wurzelfunktionen, z.B.:
$v = \sqrt{2gh}$ ... Geschwindigkeit beim freien Fall aus der Höhe h.

> Eine Funktion mit der Gleichung $y = \sqrt[n]{x}$ mit positiven ganzzahligem n und $x \geqslant 0$ heißt **Wurzelfunktion**.

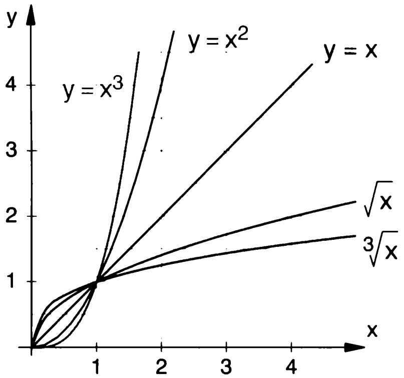


Abb. 2.13 Wurzelfunktionen als Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen.

Abb. 2.13 zeigt die Wurzelfunktionen $y = \sqrt{x}$ sowie $y = \sqrt[3]{x}$. Es sind die **Umkehrfunktionen** der auf nichtnegative x-Werte eingeschränkten Potenzfunktionen $y = x^2$ bzw. $y = x^3$. Ihre Graphen liegen daher bei gleichen Einheiten auf den beiden Achsen spiegelbildlich zur 1. Mediane zu den Graphen von $y = x^2$ bzw. $y = x^3$.

Beachte, dass die Graphen der beiden Wurzelfunktionen im Ursprung des Koordinatensystems eine senkrechte Tangente besitzen.

Aufgaben

2.41 In Abbildung 2.14 ist der Graph einer Wurzelfunktion $\sqrt[n]{x}$ gezeichnet. Lies den Wurzelexponenten ab.

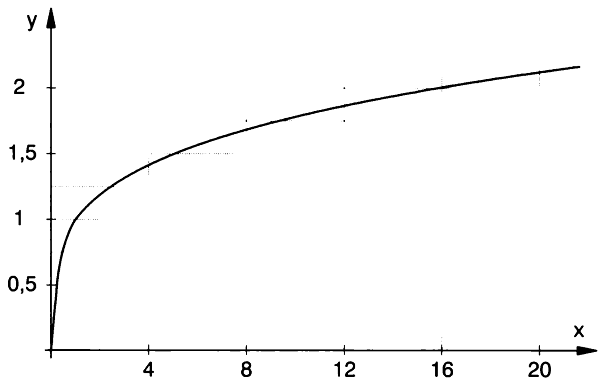


Abb. 2.14

2.42 Gib die Abhängigkeit des Durchmessers d einer Stahlkugel (ϱ = 7,85 kg/dm³) von der Kugelmasse m an und zeichne den zugehörigen Graphen zwischen m = 0 kg und m = 1 kg.

2.43 Die Ausströmungsgeschwindigkeit v aus Gefäßen (Abb. 2.15) hängt von der Füllhöhe h und der Ausflusszahl μ ab, welche die Art der Ausströmungsöffnung angibt! Es gilt: $v = \mu\sqrt{2gh}$, wobei $g \approx 10$ m/s² die Fallbeschleunigung ist. Stelle die Ausströmungsgeschwindigkeit v als Funktion von h bei μ = 0,9 graphisch dar!

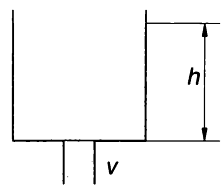


Abb. 2.15

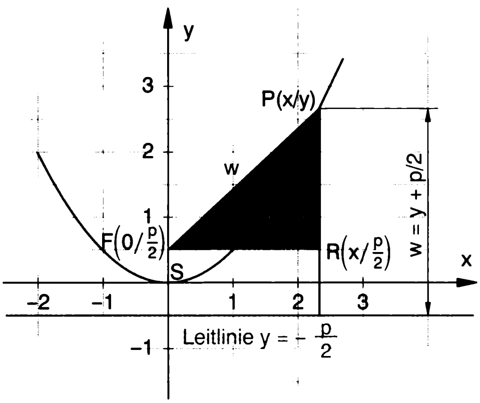
2.44 Die Resonanzfrequenz ω_0 eines Serienschwingkreises nach Abb. 2.10 beträgt $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$. Stelle ω_0 in Abhängigkeit von C zwischen C = 1 µF bis C = 50 µF bei L = 1 H graphisch dar.

2.45 Die Endgeschwindigkeit v einer elektrischen Ladung Q der Masse m beim Durchlaufen der Spannung U beträgt $\sqrt{\frac{2QU}{m}}$. Stelle v für ein Elektron ($Q = e = 1{,}603.10^{-19}$ As, $m = 9{,}109.10^{-31}$ kg) bei Spannungen U bis 100 V dar.

3 Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

3.1 Quadratische Funktion und Parabel

Parabel



Eine Parabel ist durch einen festen Punkt F, den **Brennpunkt**, und eine feste Gerade, die **Leitlinie**, bestimmt. Der Abstand des Brennpunktes F von der Leitlinie heißt *Parameter* p der Parabel. Für jeden Parabelpunkt P gilt: *Sein Abstand w vom Brennpunkt F ist gleich seinem Normalabstand zur Leitlinie*.

Wir legen den Brennpunkt F und die Leitlinie in ein kartesisches Koordinatensystem wie in Abb. 3.1.

Abb. 3.1 Gleichung der Parabel

Aus Abb. 3.1 ergibt sich $w = \sqrt{\overline{FR}^2 + \overline{RP}^2}$; andererseits gilt: w = y + p.

Daraus: $y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$

$$\left(\frac{p}{2} + y\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\cancel{y^2} + y \cdot p + \cancel{\frac{p^2}{4}} = x^2 + \cancel{y^2} - y \cdot p + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$$2p \cdot y = x^2$$

$y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$ .... *Gleichung der Parabel* in Abb. 3.1

Setzt man $\frac{1}{2p} = a$, so erhält man $y = a \cdot x^2$.

Der Parabelpunkt in der Mitte zwischen Brennpunkt und Leitlinie heißt **Scheitel S** der Parabel. Jede Parabel besitzt eine Symmetrieachse, die durch S und F verläuft; sie heißt **Parabelachse.**

Die Gleichung $y = a \cdot x^2$ ist Funktionsgleichung nicht nur einer Potenzfunktion, sondern auch einer besonderen quadratischen Funktion. Allgemein definiert man:

> Eine Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (a, b, c sind beliebige Werte, jedoch $a \neq 0$) nennt man **quadratische Funktion**. Sie ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.
> Man bezeichnet $a \cdot x^2$ als das *quadratische* Glied, $b \cdot x$ als das *lineare* Glied und c als das *absolute* Glied der quadratischen Funktion.

Quadratische Funktionen heißen auch Polynomfunktionen 2. Grades. Man verwendet oft die folgende Schreibweise:

$$y = a_2 . x^2 + a_1 . x + a_0 = \sum_{i=0}^{2} a_i \cdot x^i \quad (a_2 \neq 0)$$

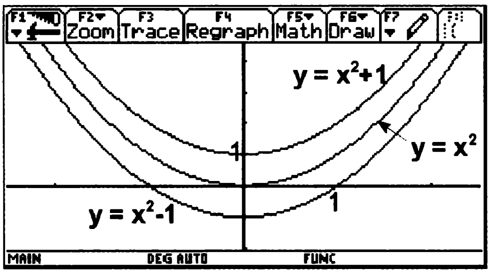
a, b, c bzw. a_0, a_1, a_2 nennt man *Koeffizienten* der quadratischen Funktion.

3.1.1 Graphische Untersuchung einer quadratischen Funktion

Es soll nun die Bedeutung der Koeffizienten a, b und c schrittweise erarbeitet werden.

(1) $b = 0$: $y = a \cdot x^2 + c$

a) Wir wählen $a = 1$ und variieren c: $y = x^2 + c$



Wir wählen für c der Reihe nach die Zahlen -1, 0 und 1.

Wie auf Seite 17 erwähnt, nennt man den Graphen der Funktion $y = x^2$ auch *Grundparabel*. Man sieht, dass c die Verschiebung der Grundparabel nach oben ($c > 0$) oder nach unten ($c < 0$) angibt.

b) Nun wird $c = 0$ gewählt und a wird variiert: $y = a \cdot x^2$

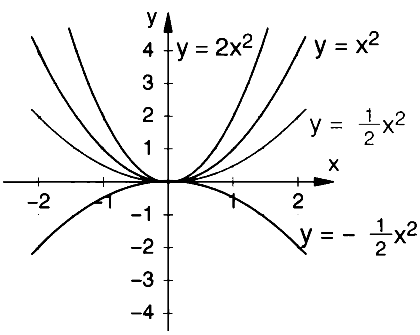


Abb. 3.2 Parabeln mit unterschiedlichem a

Der Graphik (Abb. 3.2) kann man sich folgende Eigenschaften einer Parabel mit der Gleichung $y = a \cdot x^2$ entnehmen.

Parabelachse ist die **y-Achse**.

$a > 0$: Die Parabel ist **nach oben offen**; der Scheitel ist ihr tiefster Punkt. Ist $a > 1$, so ist die Parabel schmäler als die Grundparabel; für $0 < a < 1$ ist sie flacher.

$a < 0$: Spiegelung an der x-Achse gegenüber einer Parabel mit $a > 0$. Die Parabel ist **nach unten offen**; der Scheitel ist ihr höchster Punkt.

(2) $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

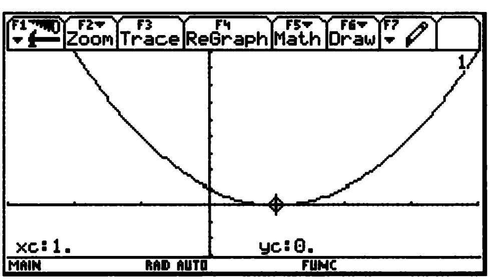
Beispiel 3.1 : Quadratische Funktion mit a = 1

Zeichne den Graphen der Funktion und ermittle die Scheitelkoordinaten.

a) $y = x^2 - 2x + 1$ **b)** $y = x^2 - 4x + 5$

Lösung

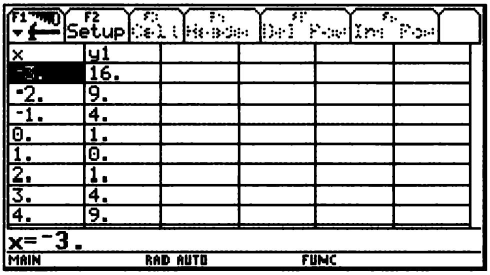
Zu **a)**



Beim schrittweisen Abtasten kann man vermuten, dass der Graph dieser Funktion mit der Grundparabel übereinstimmt, diese aber um eine Einheit in der positiven x-Richtung verschoben ist.

Weiters ist zu beachten: Obwohl $c = 1$ ist, wird nun die Parabel nicht nach oben verschoben!

Voyage 200



x	y1
-3.	16.
-2.	9.
-1.	4.
0.	1.
1.	0.
2.	1.
3.	4.
4.	9.

Auch aus der Wertetabelle kann man erkennen, dass es sich bei diesem Graphen um die Grundparabel handelt, die verschoben wurde: Bei x = 1 ist der dazugehörige Funktionswert y = 0. Betrachtet man von x = 1 ausgehend jeweils symmetrisch gelegene Punkte, so erkennt man die Funktionswerte der Grundparabel.

Aufgrund der zweiten binomischen Formel kann man die Funktionsgleichung in der Form $y = (x - 1)^2$ schreiben. In dieser Darstellung ist der konstante Summand wieder 0. Wir vermuten, dass bei einer Gleichung der Form $y = (x - m)^2$ der Scheitel S (m/0) ist.

Diese Vermutung wird bestätigt, wenn wir die Schar von Parabeln mit den Gleichungen $y = (x + 2)^2$, $y = (x + 1)^2$, $y = (x - 2)^2$ betrachten:

Zu **b)**

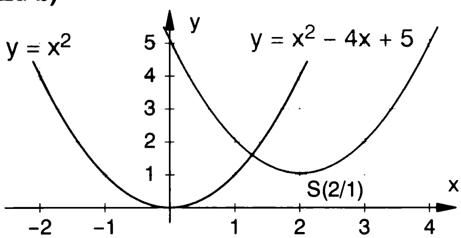


Abb. 3.3 Vergleich der Parabel $y = x^2 - 4x + 5$ mit der Grundparabel

Wir zeichnen (Abb. 3.3) den Funktionsgraph und zum Vergleich die Grundparabel $y = x^2$:

Wieder ist die Grundparabel verschoben worden; diesmal aber *sowohl in die x- wie auch in die y-Richtung*. Man liest für den Scheitel ab: S (2/1).

Rechnerische Ermittlung der Scheitelkoordinaten durch *quadratische Ergänzung* ("Ingenieur-Mathematik 1", Seite 53):

Wir haben nun eine Funktionsgleichung, deren rechte Seite nicht ein "volles Quadrat" ist.

$y = x^2 - 4x + 5$	Wir betrachten $x^2 - 4x$ als Bestandteil eines ausquadrierten Binoms $a^2 - 2ab + \ldots$; es fehlt b^2 auf das volle Quadrat; aus $x^2 - 4x = a^2 - 2ab$ entnimmt man b = 2; damit ist $b^2 = 4$.
$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 5$	Man muss 4 subtrahieren, um wieder $x^2 - 4x$ zu erhalten.
$y = (x - 2)^2 + 1$	Dies ist die sogenannte **Scheitelform** der Funktionsgleichung, da man aus ihr die Koordinaten m, n des Scheitels S direkt ablesen kann: m = 2 und n = 1.

Man erhält also den Graphen, indem man die Grundparabel so verschiebt, dass der neue Scheitel die Koordinaten m = 2 und n = 1 besitzt.

> Jede quadratische Funktion mit a = 1 besitzt als Graph eine Parabel, die nur durch Verschiebung aus der Grundparabel $y = x^2$ hervorgeht.
> Bei a = –1 ist der Graph eine Parabel, die durch Verschiebung aus der Parabel $y = -x^2$ hervorgeht.

Beispiel 3.2 : Allgemeiner Fall einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$

Zeichne den Graphen der Funktion $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$.

Lösung

Wir bringen die Gleichung der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ auf die **Scheitelform**: $y = a \cdot (x - m)^2 + n$.

Ist $a = 1$ oder -1, so ist der Funktionsgraph eine Parabel, die aus der Grundparabel (bei $a = -1$ nach vorheriger Spiegelung an der x-Achse) durch bloße Verschiebung hervorgeht. m und n sind die Scheitelkoordinaten. Danach wird die Parabel entsprechend dem Wert von a geändert (Abb. 3.4).

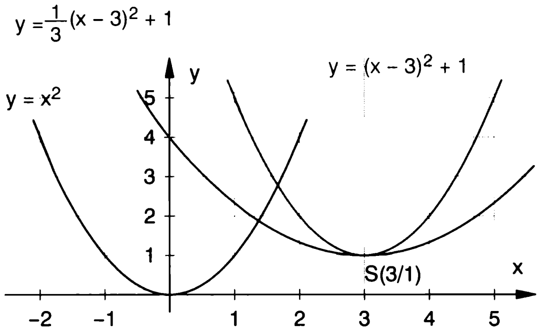


Abb. 3.4 Graph einer allgemeinen quadratischen Funktion

Wir heben zuerst $\frac{1}{3}$ aus der rechten Seite der Funktionsgleichung heraus: $y = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 12)$;

Danach addieren wir *innerhalb* des Klammerausdruckes 3^2 zum Term $x^2 - 6x$ (Ergänzung auf ein volles Quadrat) und subtrahieren anschließend wieder 3^2:

$$y = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 12) =$$
$$= \frac{1}{3}\left[(x-3)^2 + 3\right] = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 1$$

Somit: S (3/1).

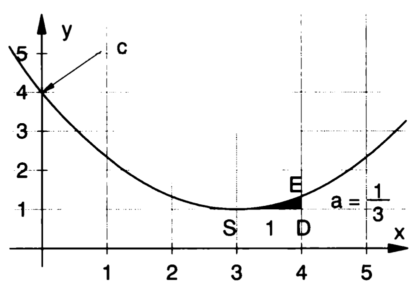


Abb. 3.5 Bedeutung von a und c

Den Koeffizienten a kann man aus dem Graphen ablesen. Vom Scheitel S ausgehend trägt man (Abb. 3.5) in positiver x-Richtung eine Einheit auf (Punkt D). Die Länge der Strecke DE ist a.

Begründung: Setzt man in der Scheitelform $x - m = 1$, so ist $y = a \cdot 1^2 + n = a + n$.

Wir können ferner leicht die Bedeutung von c erkennen: Setzen wir $x = 0$ in $y = ax^2 + bx + c$, so ist $y = c$. c ist somit der y-Achsenabschnitt der Parabel.

Der Graph einer quadratischen Funktion $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ist eine Parabel, deren Achse parallel zur y-Achse ist.

c ist der **y-Achsenabschnitt** der Parabel.

Beispiel 3.3 : Zeichnen des Graphen einer quadratischen Funktion

Ermittle die Koordinaten des Scheitels der Parabel $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$ sowie deren Schnittpunkt mit der y-Achse und skizziere danach die Parabel.

Lösung

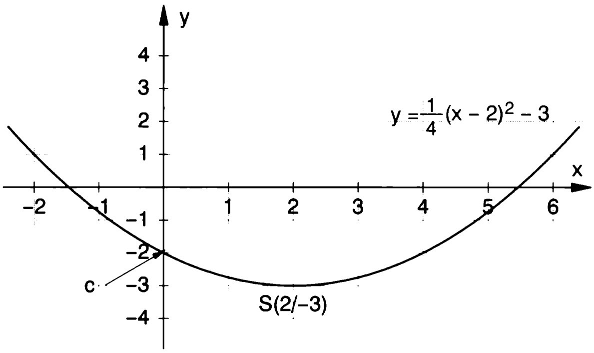


Abb. 3.6

y-Achsenabschnitt $c = -2$.

Wir bringen die Funktionsgleichung durch quadratische Ergänzung auf die Scheitelform:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2 = \frac{1}{4}(x^2 - 4x - 8) =$$
$$= \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4 - 4 - 8) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(x-2)^2 - 12\right] = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3$$

Daraus: S (2/−3). Zur Skizzierung der Parabel können wir ihre Symmetrie zur Parabelachse verwenden sowie auch, dass die Parabel die y-Achse im Punkt (0/c) schneidet.

Symmetrisch zu diesem Punkt liegt der Parabelpunkt P (4/−2). Eventuell kann ein weiterer Parabelpunkt (und damit auch sein Spiegelbild zur Parabelachse) ermittelt werden.

Beispiel 3.4 : Ermitteln der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion aus ihrer graphischen Darstellung

Ermittle die Gleichung, der quadratischen Funktion, deren Graph in Abb. 3.6 dargestellt ist.

Lösung

Wir lesen ab: S (2/−3); damit lautet die Scheitelform: $y = a \cdot (x - m)^2 + n = a \cdot (x - 2)^2 - 3$. Es bleibt noch die Bestimmung von a.

1. Möglichkeit: durch Ablesen von c: $c = -2$.

Für $x = 0$ ist $y = c = -2$: $-2 = a \cdot (0 - 2)^2 - 3$. Daraus folgt $a = \frac{1}{4}$. Somit lautet die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3 = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 3 = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$.

2. Möglichkeit: durch Ablesen von a: $a = \frac{1}{4}$.

Damit: $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3 = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 3 = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$.

Hinweis: Man sollte jene Möglichkeit wählen, bei der ein genaueres Ablesen möglich ist.

Beispiel 3.5 : Bestimmen der Scheitelkoordinaten mit dem Taschenrechner

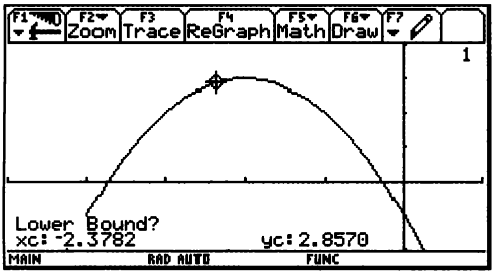
Ermittle die Koordinaten des Scheitels der Parabel $y = -x^2 - 4x - 1$ mit dem Taschenrechner.

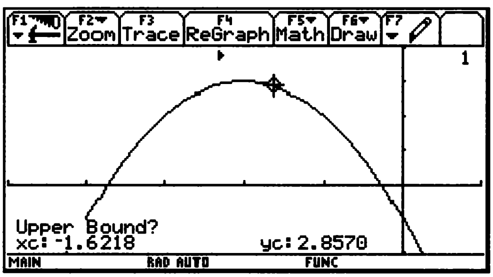
Lösung

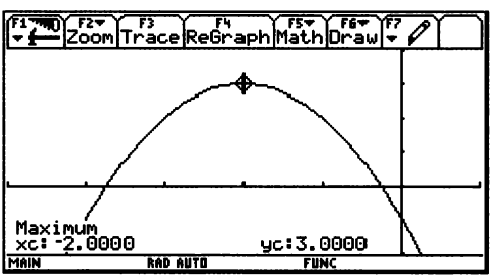
Voyage 200

1. Möglichkeit: Mit Hilfe von *Trace* kann die Parabel punktweise abgetastet werden. Dies führt in den meisten Fällen jedoch nicht zum Ziel, da auf Grund des Auflösungsvermögens der exakte Scheitelpunkt nicht erreicht werden kann.

2. Möglichkeit: Da in diesem Beispiel $a < 0$ ist, ist der Scheitel der höchste Punkt der Parabel. Mit Hilfe der vordefinierten Funktion *Maximum* kann man die Koordinaten des Scheitels exakt bestimmen.







Man drückt F5 4 (4: Maximum) und gibt danach ein Intervall an, in dem das Maximum liegt. Dazu bringt man den Cursor auf die untere Intervallgrenze (Lower Bound) und drückt ENTER ; anschließend bringt man den Cursor auf die obere Intervallgrenze und bestätigt wieder mit ENTER . Die Koordinaten des Maximums sind die Koordinaten des Scheitels.

Beispiel 3.6 : Nullstellen

Bestimme graphisch die Nullstellen der Funktion $y = 2x^2 + 2x - 12$.

Lösung

Die Nullstellen sind jene Stellen, an denen der Graph der Funktion die x-Achse schneidet oder berührt. D.h. $y = f(x) = 0$.

1. Lösungsvorschlag:

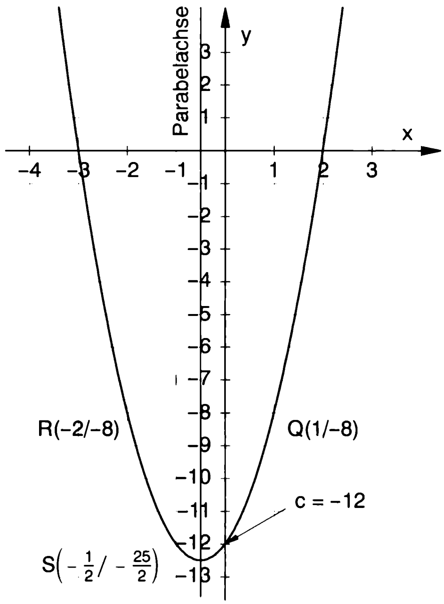


Abb. 3.7 $y = 2x^2 + 2x - 12$

Wir bringen die Funktionsgleichung auf die Scheitelform:

$$y = 2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6)$$

$$= 2\left[\left(x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$$

Daraus $S\left(-\frac{1}{2}/-\frac{25}{2}\right)$.

Aus der Funktionsgleichung entnimmt man $c = -12$.

Es ist zweckmäßig, mit unterschiedlicher Skalierung, d.h. ungleichen Einheiten, auf den beiden Koordinatenachsen zu arbeiten. Wir wählen etwa die Einheit auf der y-Achse halb so groß wie die Einheit auf der x-Achse.

Abb. 3.7 zeigt die Parabel, skizziert aus der Kenntnis ihres Scheitels S und des y-Achsenabschnittes c. Aus Symmetriegründen ist auch P (−1/−12) ein Parabelpunkt.

Für ein genaueres Zeichnen der Parabel empfiehlt es sich, einen weiteren Parabelpunkt Q zu ermitteln: z.B. $x = 1$; $y = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 12 = -8$; also Q (1/−8). Spiegelbildlich zur Parabelachse liegt der Parabelpunkt R (−2/−8).

Der Graphik entnimmt man, dass die vorliegende quadratische Funktion zwei Nullstellen besitzt. Ihre Werte kann man im Allgemeinen – auch bei hohem Zeichenaufwand – aufgrund der Zeichengenauigkeit nur näherungsweise entnehmen.

In unserem Fall kann man die Vermutung, dass die Nullstellen −3 und 2 sind, schnell bestätigen:

$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 12 = 0$; $\quad f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 12 = 0$.

2. Lösungsvorschlag: Abb. 3.8

Die zeichnerische Lösung "mit Hand" wird leichter, wenn man die Bestimmungsgleichung für die Nullstellen $2x^2 + 2x - 12 = 0$ umschreibt in die Form: $2x - 12 = -2x^2$.

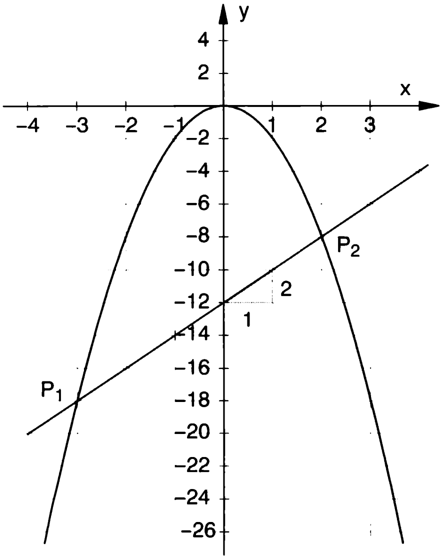


Abb. 3.8

Auf der rechten Seite steht der Funktionsterm einer einfachen quadratischen Funktion, auf der linken Seite der Funktionsterm einer nur noch linearen Funktion. Das heißt, die Nullstellen der ursprünglichen Funktion $y = 2x^2 + 2x - 12$ sind jene Stellen, an denen die beiden Funktionen den gleichen Funktionswert haben.

Zeichnerisch bedeutet dies, dass wir nun die Schnittstellen der Parabel $y = -2x^2$ mit der Geraden $y = 2x - 12$ zu ermitteln haben.

Diese beiden Graphen sind einfach zu zeichnen.

Parabel: $y = -2x^2$

Nach unten öffnende Parabel mit dem Scheitel S(0/0), Parabelachse ist die y-Achse.

Gerade: $y = 2x - 12$

Steigung $k = -2$;
Ordinatenabstand $d = -12$.

Wie viele Nullstellen besitzt eine quadratische Funktion?

Anschaulich sieht man leicht ein: Je nach Lage der Parabel kann diese zwei, einen oder keinen Schnittpunkt mit der x-Achse haben.

Allgemein gilt:

Eine quadratische Funktion kann höchstens zwei Nullstellen besitzen.

Die Nullstellen der Funktion $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ sind die Lösungen der "quadratischen" Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Das bedeutet wiederum, dass eine solche Gleichung *zwei* (reelle) Lösungen besitzen kann!

Beispiel 3.7 : Ermitteln der Funktionsgleichung

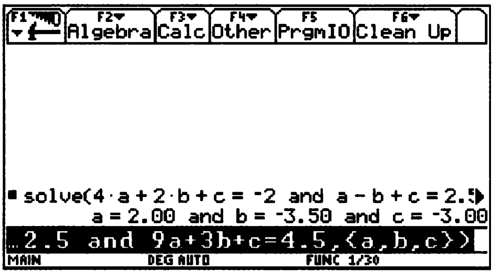
Der Graph einer quadratischen Funktion geht durch die drei Punkte P (2/–2), Q (–1/2,5) und R (3/4,5). Ermittle die Funktionsgleichung!

Lösung

Die x- und die y-Koordinaten der drei Punkte müssen jeweils die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ erfüllen. Damit ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die drei Variablen a, b und c.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 4a + 2b + c = -2 \\ \text{II:} & a - b + c = 2{,}5 \\ \text{III:} & 9a + 3b + c = 4{,}5 \end{array}$$

Voyage 200



Dieses lineare Gleichungssystem lösen wir (eventuell auch mit dem Taschenrechner): a = 2; b = −3,5; c = −3.

Damit ergibt sich für die Gleichung der Funktion:
$y = 2x^2 - 3{,}5x - 3$.

Im Überblick: Parabel und quadratische Funktion

Der **Graph einer quadratischen Funktion $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a \neq 0$)** ist eine **Parabel** mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Parabelachse (Symmetrieachse) ist parallel zur y-Achse.

(2) $a > 0$: Die Parabel öffnet sich nach oben.
$a < 0$: Die Parabel öffnet sich nach unten.

(3) $|a| = 1$ (d.h.: $a = 1$ oder $a = -1$): Die Parabel ist kongruent zur Grundparabel.
$|a| > 1$: Die Parabel ist schmäler als die Grundparabel.
$0 < |a| < 1$: Die Parabel ist breiter als die Grundparabel.

(4) c ist der y-Achsenabschnitt der Parabel.

Die Funktionsgleichung der Parabel kann auf die **Scheitelform $y = a(x - m)^2 + n$** gebracht werden, welche das Ablesen der Scheitelkoordinaten m und n gestattet.

Eine quadratische Funktion kann **höchstens zwei Nullstellen** besitzen.

Liegt der Scheitel auf der x-Achse, so hat sie genau eine Nullstelle. Ist $a > 0$ und liegt der Scheitel "oberhalb" der x-Achse bzw. ist $a < 0$ und liegt der Scheitel "unterhalb" der x-Achse, so besitzt die Parabel keine Nullstelle.

Aufgaben

3.1 Welche der folgenden Gleichungen sind Funktionsgleichungen von quadratischen Funktionen?

a) $y = -x^2 + 2x$ **b)** $y = -x + 3x^2 + 2$ **c)** $y = 2x + 1$ **d)** $y = 1 - x^2$

e) $y = \frac{2}{x^2} + 2x - 5$ **f)** $y = (x - 0{,}2)(x + 0{,}5)$ **g)** $y = (2x + 1)^2$ **h)** $y = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$

3.2 Die folgenden Punkte liegen auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 1$. Berechne die jeweilige y-Koordinate!

a) P (0/y) **b)** Q (−3/y) **c)** R (3/y) **d)** T (4/y)

3.3 Die Gleichung einer Polynomfunktion 2. Grades lautet: $y = -2x^2 - 3x + 1$. Stelle fest, welcher der gegebenen Punkte auf der Parabel liegt.

a) P (−1/2) **b)** Q (1/−4) **c)** R (0/−1) **d)** T (2/−13)

3.4 Wie lautet die Gleichung der Parabel, die durch folgende Verschiebung aus der Grundparabel $y = x^2$ hervorgeht?

a) 3 Einheiten nach oben **b)** 2 Einheiten nach unten

c) 1 Einheit nach rechts **d)** 2 Einheiten nach links

e) 2 Einheiten nach oben und 1 Einheit nach rechts **f)** 3 Einheiten nach unten und 1 Einheit nach links

3.5 Gegeben ist der Scheitel einer durch Verschiebung aus der Grundparabel hervorgehenden Parabel. Wie lautet ihre Gleichung?

a) S (0/1) **b)** S (2/0) **c)** S (2/1) **d)** S (3/−1) **e)** S (−2/−3) **f)** S (−3/1)

3.6 Was lässt sich über den Graphen einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ sagen, wenn

a) $a > 0$ **b)** $a < 0$ **c)** $a = 2$ **d)** $a = \frac{1}{2}$ **e)** $b = 0$ (Parabelachse?) **f)** $c = 0$ **g)** $b = c = 0$

3.7 Ermittle die Gleichung jener Parabel, deren Scheitel im Ursprung liegt und die durch den Punkt P geht.

a) P (1/2) **b)** P (−2/2) **c)** P (3/−3) **d)** P (−1/3) **e)** S (−2/−2)

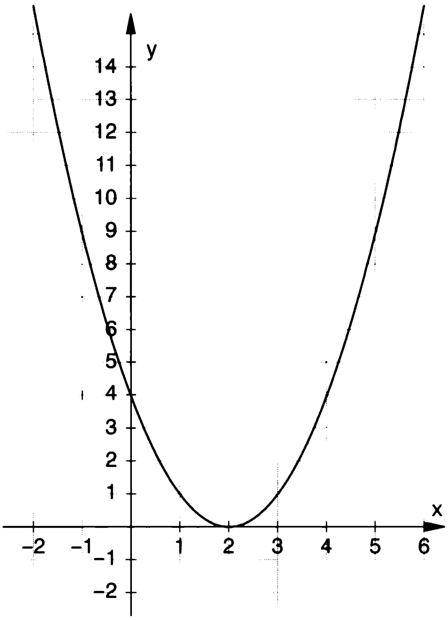
3.8 Ermittle die Koordinaten des Scheitels folgender Parabel sowie ihren Schnittpunkt mit der y-Achse. Skizziere danach die Parabel.

a) $y = x^2 - 4x + 7$ **b)** $y = x^2 + 2x + 2$ **c)** $y = -x^2 + 2x$

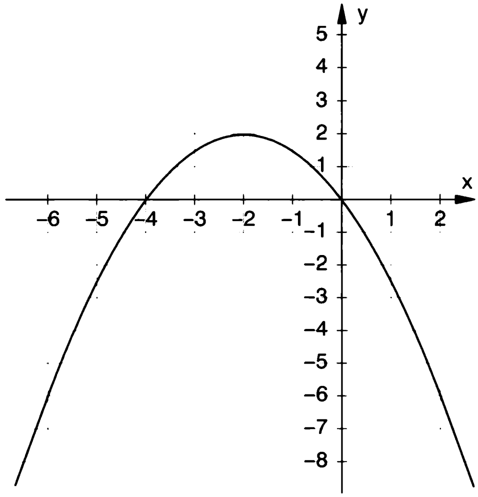
d) $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$ **e)** $y = -2x^2 + 16x - 36$ **f)** $y = -0{,}5x^2 - x$

3.9 Ermittle die Gleichung der quadratischen Funktionen und gib die Koeffizienten des quadratischen, linearen Gliedes sowie das absolute Glied an!

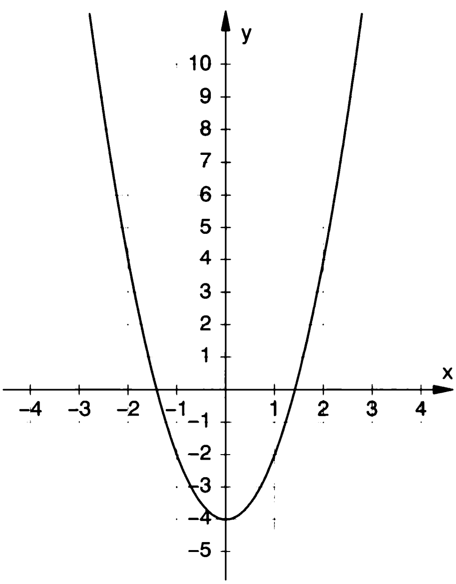
a)



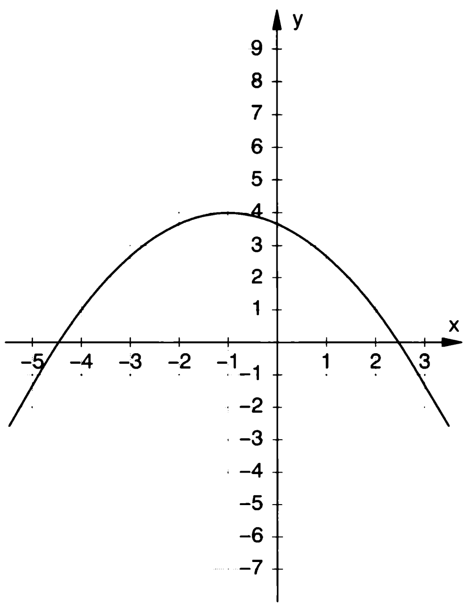
b)



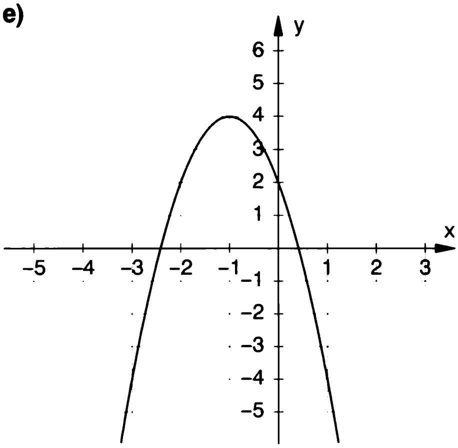
c)



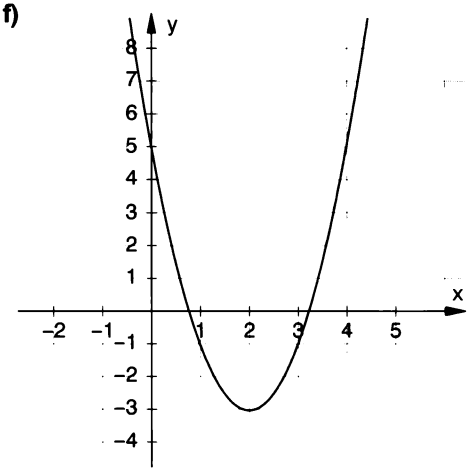
d)



e)



f)



3.10 Bestimme von der quadratischen Funktion graphisch die Nullstellen auf zwei unterschiedliche Arten (siehe Beispiel 3.6)

a) $y = x^2 - 5x + 4$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ **c)** $y = -x^2 - x + 6$ **d)** $y = 2x^2 + 2x - 4$

3.11 Bestimme die Gleichung der quadratischen Funktion, deren Graph durch folgende drei Punkte geht.

a) P (–3/35,5), Q (–1/–11,5), R (2/2)
b) A (2/20), B (–2/–4), C (0/–4)
c) U (1/5), V (–3/–31), W (–2/–16)
d) P (–2/–24), Q (2/8), R (–1/–10)
e) A (–2/6), B (–1/3), C (5/27)
f) P (–2/2), Q (2/10), R (5/37)

3.12 Von einer quadratischen Funktion kennt man einen Punkt P und den Scheitel S. Bestimme die Funktionsgleichung und zeichne den Funktionsgraphen!

a) P (1/2), S (2/1)
b) P (3/–27), S (–2/–2)
c) P (–3/–4), S (–1/0)
d) P (3/14), S (–1/–2)

3.13 Lies aus der Wertetabelle die Koordinaten des Scheitels der Parabel und den Koeffizienten a ab und ermittle daraus die Parabelgleichung!

a)

x	y
–1	4,5
0	2,0
1	0,5
2	0,0
3	0,5
4	2,0
5	4,5
6	8,0

b)

x	y
–6	–36
–5	–22
–4	–12
–3	–6
–2	–4
–1	–6
0	–12
1	–22

c)

x	y
–2	–8
–1	–3
0	0
1	1
2	0
3	–3
4	–8
5	–15

d)

x	y
–5	17
–4	10
–3	5
–2	2
–1	1
0	2
1	5
2	10

3.14 Wähle aus der Wertetabelle der Parabel Punkte aus und bestimme mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Funktionsgleichung!

a)

x	y
−14	169
−11	100
−8	49
−5	16
−2	1
1	4
4	25
7	64

b)

x	y
−5	−42
−4	−21
−3	−6
−2	3
−1	6
0	3
1	−6
2	−21

c)

x	y
1,5	0,5625
2,0	0,2500
2,5	0,0625
3,0	0,0000
3,5	0,6250
4,0	0,2500
4,5	0,5625
5,0	1,0000

d)

x	y
−0,5	4,5
0,0	8,0
0,5	12,5
1,0	18,0
1,5	24,5
2,0	32,0
2,5	40,5
3,0	50,0

Ein Nachtrag: Wurzelziehen mit der Hand

Dazu ist sicher der Taschenrechner sehr hilfreich. Notwendig ist er jedoch keineswegs. In früherer Zeit wurde für das Ziehen einer Quadratwurzel oft das folgende Verfahren verwendet, das von seinem Benützer nichts weiter verlangt, als dass er die Grundrechnungsarten beherrscht. Als Beispiel soll die Quadratwurzel von 537,9 gezogen werden.

Lösungsziffern

$\sqrt{5|37,90|00...}$ = 23, 192
−4
−1 37
−1 29 $\quad 43 \cdot 3$
8 90
−4 61 $\quad 461 \cdot 1$
4 29 00
−4 16 61 $\quad 4629 \cdot 9$
12 39 00
−9 27 64 $\quad 46382 \cdot 2$
3 11 36
usw.

1. Schritt: Der Radikand 537,9 = 537,9000... wird vom Komma aus nach links und nach rechts in Gruppen zu je zwei Ziffern geteilt. Die erste Lösungsziffer z_1 ist größtmöglich so zu wählen, dass ihr Quadrat die Zahl in der ersten Zifferngruppe, die hier nur aus der Ziffer 5 besteht, nicht übersteigt. Dies führt zu $z_1 = 2$. Ihr Quadrat 4 wird von 5 abgezogen; die Differenz 1 wird notiert.

2. Schritt: Die nächste Zifferngruppe 37 wird heruntergeholt und an die eben gebildete Differenz 1 angehängt; dadurch entsteht die Zahl 137. Man bildet nun das Doppelt der ersten Lösungsziffer: $2 \cdot z_1 = 4$. An diese Zahl 4 wird die nächste Lösungsziffer z_2 angehängt, wodurch die Zahl $4z_2$ entsteht. z_2 ist größtmöglich so zu wählen, dass das Produkt $4z_2$ mal z_2 nicht 137 übersteigt. Dies führt zu $z_2 = 3$. Das Produkt $43 \cdot 3 = 129$ wird von 137 abgezogen und die Differenz 8 notiert.

3. Schritt: Die nächste Zifferngruppe 90 wird heruntergeholt und an die eben gebildete Differenz 8 angehängt; dadurch entsteht die Zahl 890. Man bildet nun das Doppelte der bisherigen Lösungsziffern: $2 \cdot 23 = 46$. An diese Zahl 46 wird die nächste Lösungsziffer z_3 angehängt, wodurch die Zahl $46z_3$ entsteht. z_3 ist größtmöglich so zu wählen, dass das Produkt $46z_3$ mal z_3 nicht 890 übersteigt. Dies führt zu $z_3 = 1$. Das Produkt $461 \cdot 1 = 461$ wird von 890 abgezogen und die Differenz 429 notiert.

Usw. Es ergibt sich auf Hundertstel gerundet: $\sqrt{537,9} = 23,19$.

3.2 Anwendung der quadratischen Funktionen

Beispiel 3.8 : Schiefer Wurf – Wurfparabel

Auf einem ebenen Gelände wird ein Körper vom Erdboden schief nach oben geworfen. In der Physik wird gezeigt, dass bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes die Gleichung der Flugbahn des Körpers lautet: $y = x \cdot \tan\alpha - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$, wobei α der Abwurfwinkel, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und $g \approx 10\ \text{ms}^{-2}$ die Fallbeschleunigung sind. Die Gleichung beschreibt die jeweilige Wurfhöhe y des Flugkörpers als Funktion seiner horizontalen Entfernung x vom Abwurfpunkt. Dabei haben wir der Einfachheit halber den Koordinatenursprung in den Abwurfpunkt gelegt (Abb. 3.9).

a) Stelle diese Funktion für $v_0 = 30\ \text{ms}^{-1}$ und $\alpha = 45°$ graphisch dar!

b) Ermittle die Wurfweite sowie die maximale Wurfhöhe!

Lösung

Zu **a)** Einsetzen der Zahlenwerte für α, v_0 und g in die Gleichung der Flugbahn ergibt: $y = -\frac{x^2}{90} + x$. Dies ist die Gleichung einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ mit $a = -\frac{1}{90}$, $b = 1$ und $c = 0$; ihr Graph ist daher eine Parabel, die sich wegen $a < 0$ nach unten öffnet. Sie wird **Wurfparabel** genannt. Zum Zeichnen der Wurfparabel ermitteln wir ihren Scheitel, indem wir die Funktionsgleichung in die Scheitelform bringen:

$y = -\frac{1}{90}\left(x^2 - 90x\right)$ ... $-\frac{1}{90}$ herausheben

$y = -\frac{1}{90}\left[(x - 45)^2 - 45^2\right]$ ... auf ein volles Quadrat ergänzen und 45^2 subtrahieren

$y = -\frac{1}{90} \cdot (x - 45)^2 + 22{,}5$ ... Scheitelform

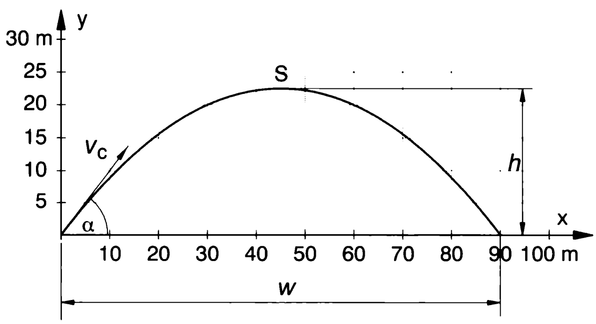


Abb. 3.9 Wurfparabel

Daraus entnimmt man den Scheitel der Parabel: S(45/22,5). Beim Zeichnen nützen wir weiterhin die Symmetrie der Parabel sowie die Tatsache, dass der y-Achsenabschnitt c der Parabel gleich 0 ist. Der Abwurfwinkel $\alpha = 45°$ erscheint in der Abb. 3.9 wegen der ungleichen Teilung der Koordinatenachsen verzerrt.

Zu **b)** Die Wurfweite *w* ist die zweite Nullstelle der Parabel. Durch Ablesen vermutet man *w* = 90 m, was man leicht rechnerisch bestätigt: $y(90) = -\frac{90^2}{90} + 90 = 0$.
In unserem Fall könnte man die Nullstellen auch rechnerisch finden. Man setzt den y-Wert in der Parabelgleichung gleich 0 und erhält:

$0 = -\frac{x^2}{90} + x$

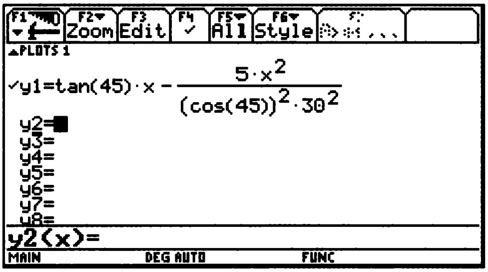
$0 = x \cdot \left(-\frac{x}{90} + 1\right)$ x herausheben und danach Anwenden des Produkt-Null-Satzes:

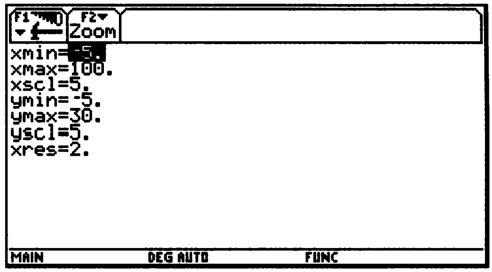
$x = 0$ oder $\left(-\frac{x}{90} + 1\right) = 0$

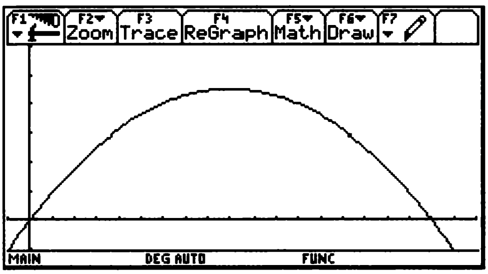
Das heißt: x = 0 oder x = 90; die erste Nullstelle 0 ist die Abwurfstelle, die zweite die **Wurfweite**: *w* = 90 m. Schließlich ist **maximale Wurfhöhe** *h* gleich der y-Koordinate des Scheitels: *h* = 22,5 m.

Voyage 200

Mit [◆] [W] aktiviert man den y-Editor, in dem die Gleichung eingegeben wird. Die Einstellungen für den Zeichenbereich erfolgen mit [◆] [E].

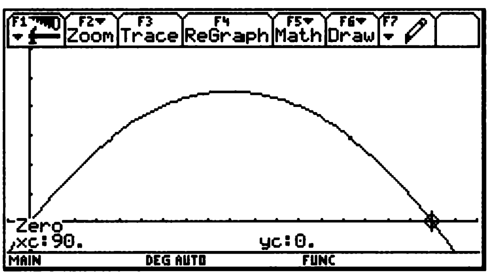




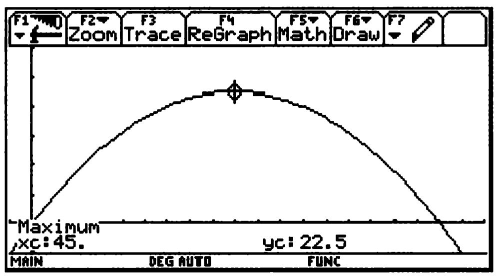


Das Graphikmenü wird mit [◆] [R] aktiviert. Drückt man F3 (Trace), kann mit dem Cursor die Wurfparabel punktweise abgetastet werden. Dadurch erhält man die Wurfhöhe y für jede Entfernung x von der Abwurfstelle.

Wurfweite *w*:



Maximale Wurfhöhe *h*:



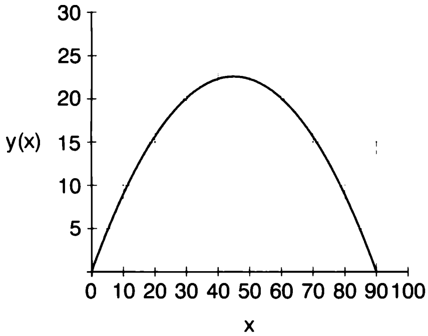
Mit F5 [2] (2: Zero) bestimmt man die Nullstelle und mit F5 [4] (4: Maximum) wird ein Maximalwert einer Funktion bestimmt. Dazu ist es zuerst nötig, die gesuchte Nullstelle bzw. Maximumstelle einzugrenzen. Dies geschieht mit dem Cursor durch Angabe einer unteren Grenze (Lower Bound), danach ENTER, sowie einer oberen Grenze (Upper Bound), danach wieder ENTER.

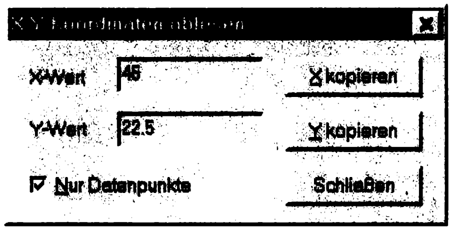
Wurfweite: *w* = 90 m

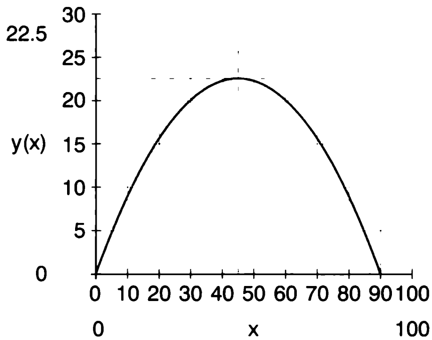
Maximale Wurfhöhe: *h* = 22,5 m

MC

$° := \text{Grad} \quad a := 45° \quad g := 10\frac{m}{s^2} \quad v_0 := 30\frac{m}{s} \quad x := 0\,m..100\,m \quad y(x) := x \cdot \tan(\alpha) - \frac{gx^2}{2 \cdot v_0^2 \cos^2\alpha}$







Die Bewegung des Fadenkreuz-Cursors erfolgt mit der Schrittweite der Bereichsvariable x. Im Rahmen der damit verbundenen Genauigkeit erhält man die maximale Wurfhöhe w.

Beispiel 3.9 : Quadratische Erlös- und Gewinnfunktion

In einem Betrieb werden Elektromotoren eines bestimmten Typs hergestellt. Die Herstellungskosten für einen Motor können mit 4 Geldeinheiten (1 Geldeinheit = 100 Euro) veranschlagt werden; dazu kommen tägliche Fixkosten von 100 Geldeinheiten.

Die Anzahl x verkaufter Motoren hängt vom Verkaufspreis p eines Motors ab: mit zunehmendem Verkaufspreis p werden weniger Motoren verkauft. Auf Grund von Marktbeobachtungen konnte man dafür (in gewissen Grenzen) den linearen Zusammenhang $x = 200 - 20p$ finden.

a) Gib die Anzahl x verkaufter Motoren bei einem Stückpreis von 5 sowie 8 Geldeinheiten an. Zeichne den Graphen der Funktion $x = 200 - 20p$, der sogenannten *Nachfragefunktion*.

b) Wie lautet die *Kostenfunktion*, die *Erlösfunktion* und die *Gewinnfunktion*[2]?

c) Stelle alle drei Funktionen graphisch dar!

d) Bestimme die Gewinngrenzen und den maximalen Gewinn!

[2] Die Funktionsgleichung der Kosten-Erlös- und Gewinnfunktion werden als Zahlenwertgleichung (d.h. ohne Einheiten) geschrieben.

Lösung

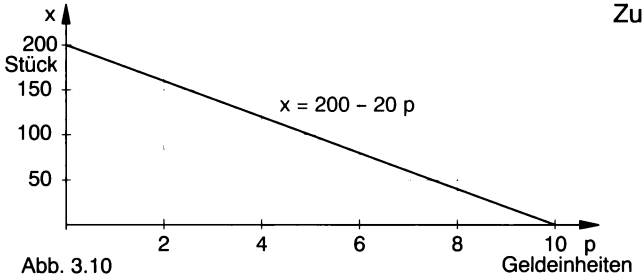


Abb. 3.10

Zu **a)** p = 5 Geldeinheiten:
x = 200 – 20 · 5 = 100 Stück;
p = 8 Geldeinheiten:
x = 200 – 20 · 8 = 40 Stück.

Abb. 3.10 zeigt, wie die verkaufte Stückzahl x mit wachsendem Verkaufspreis p abnimmt.

Zu **b)** Die Kostenfunktion y = K(x) gibt den Betrag für die Herstellung von x Einheiten eines Guts während einer bestimmten Zeit an. Sie setzt sich aus *Fixkosten* (100 Geldeinheiten) und den von x abhängigen *variablen Kosten* zusammen. In unserem Fall ist K(x) = 100 + 4x, eine lineare Funktion.

Die Mengen x können je nach Art des Gutes in Stückzahlen, aber auch in Tonnen, Hektoliter oder dgl. angegeben sein.

Die Erlösfunktion gibt den Betrag an, der beim Verkauf von x Einheiten eines Guts erzielt wird; also: $E(x) = p \cdot x$. Der Verkaufspreis p pro Einheit und die dabei verkaufte Anzahl x von Einheiten hängen durch x = 200 – 20p zusammen; daraus: p = 10 – 0,05x. Damit lautet die Erlösfunktion $y = E(x) = x(10 - 0{,}05x) = -0{,}05x^2 + 10x$. "Gewinn = Erlös – Kosten"; daher gilt für die Gewinnfunktion: $y = G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}05x^2 + 6x - 100$.

Zusammenfassend lauten die hier auftretenden Funktionen:

Nachfragefunktion:	x = 200 – 20p
Kostenfunktion:	K(x) = 100 + 4x
Erlösfunktion:	$E(x) = p \cdot x = -0{,}05x^2 + 10x$
Gewinnfunktion:	$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}05x^2 + 6x - 100$

Beachte die Einschränkungen über die Definitionsmengen dieser Funktionen.

Zu **c)**

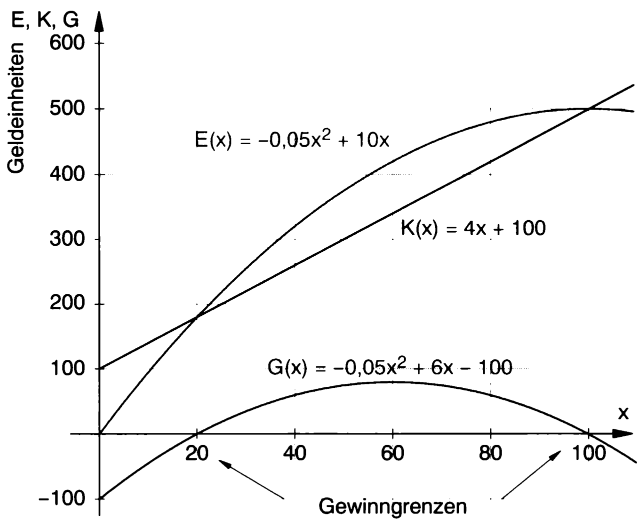


Abb. 3.11

Der Graph der Kostenfunktion ist eine Gerade mit dem y-Achsenabschnitt d = 100. Um die Gerade zu zeichnen, ermitteln wir noch einen Punkt der Geraden: z.B. x = 100: y = K(100) = 500.

Die Erlös- wie auch die Gewinnfunktion sind quadratische Funktionen. Ihre Graphen sind Parabeln, die sich nach unten öffnen.

Zum Zeichnen des Graphen der Erlösfunktion kann man von ihren Nullstellen x_1 und x_2 ausgehen. Auf Grund des Produkt-Null-Satzes folgt sofort:

$y = E(x) = -0{,}05x^2 + 10x = x(-0{,}05x + 10) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ \ -0{,}05x + 10 = 0$; daraus $x_2 = 200$.

Die x-Koordinate des Scheitels ist 100, da sich die Scheitelstelle in der Mitte der beiden Nullstellen befindet. $E(100) = -0{,}05 \cdot 100^2 + 10 \cdot 100 = 500$; also lautet der Scheitel des Graphen der Erlösfunktion: S (100/500).

Zum Zeichnen der Gewinnfunktion $y = G(x) = -0{,}05x^2 + 6x - 100$ führen wir ihre Funktionsgleichung in die Scheitelform über:

$$\begin{aligned} -0{,}05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 100 &= -0{,}05(x^2 - 120x + 2000) = \\ &= -0{,}05(x^2 - 120x + 60^2 - 60^2 + 2000) = \\ &= -0{,}05[(x - 60)^2 - 1600] = -0{,}05(x - 60)^2 + 80. \end{aligned}$$

Daraus der Parabelscheitel: S (60/80). Weiters ist der y-Achsenabschnitt c gleich −100.

Zu **d)** Die Gewinngrenzen sind die Nullstellen x_1 und x_2 der Gewinnfunktion. Aus Abb. 3.11 vermuten wir: $x_1 = 20$ Einheiten, $x_2 = 100$ Einheiten. Dies kann rechnerisch bestätigt werden:

$G(20) = -0{,}05 \cdot 20^2 + 6 \cdot 20 - 100 = 0$;

$G(100) = -0{,}05 \cdot 100^2 + 6 \cdot 100 - 100 = 0$.

Die Gewinngrenzen liegen also bei 20 und 100 Produktionseinheiten.

Die untere Gewinngrenze, hier also 20 Geldeinheiten, wird im kaufmännischen Bereich *Gewinnschwelle* oder *Break-Even-Point* genannt. Handelt es sich bei den erzeugten Mengen x um Stückzahlen, so muss eine nicht ganzzahlige Gewinnschwelle ganzzahlig aufgerundet werden.

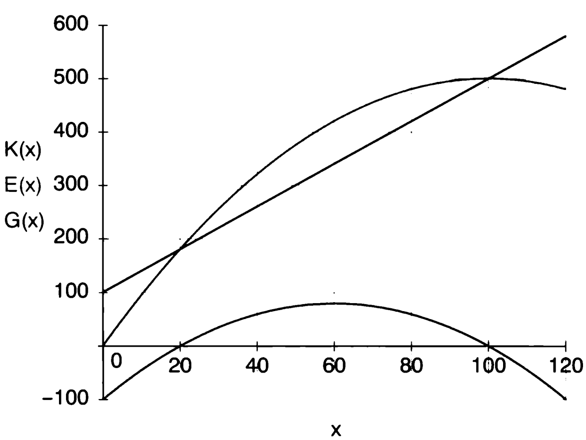
Der maximale Gewinn ist die y-Koordinate des Scheitels. Er beträgt daher 80 Geldeinheiten.

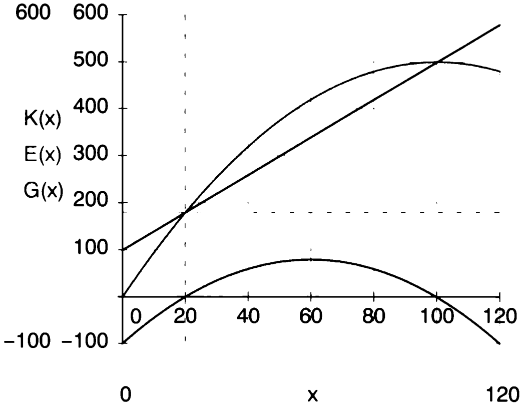
MC

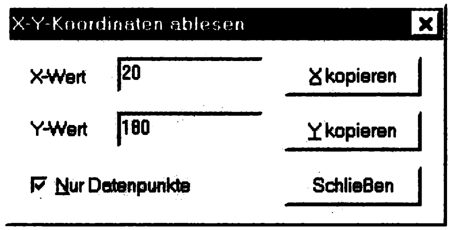
$x := 0..120$ Kostenfunktion: $K(x) := 100 + 4 \cdot x$

Erlösfunktion: $E(x) := -0.05 \cdot x^2 + 10 \cdot x$

Gewinnfunktion: $G(x) := E(x) - K(x)$





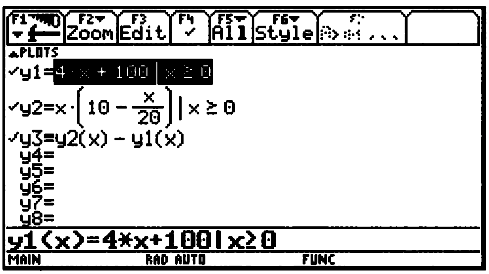


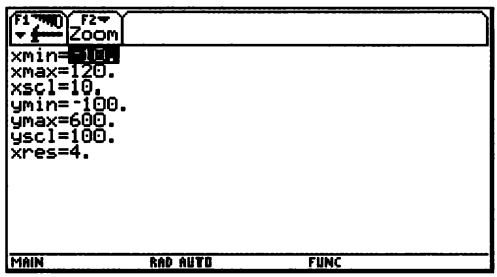
Bewegung des Fadenkreuzes mit der Schrittweite der Bereichsvariablen x.
Man liest als Gewinngrenzen 20 und 100 Produktionseinheiten ab.

Maximaler Gewinn (abgelesen im Scheitel des Gewinnfunktionsgraphen): 80 Geldeinheiten bei 60 Produktionseinheiten.

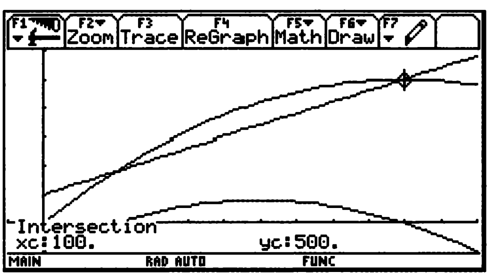
Abgelesene Werte können einzeln in die Zwischenablage kopiert und von dort in das Arbeitsblatt eingefügt werden.

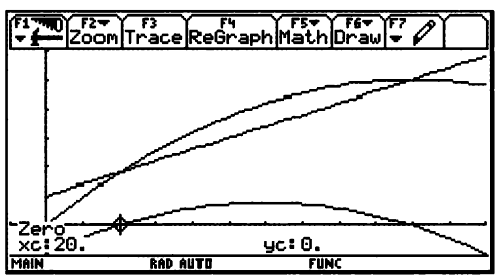
Voyage 200





Gewinngrenzen:



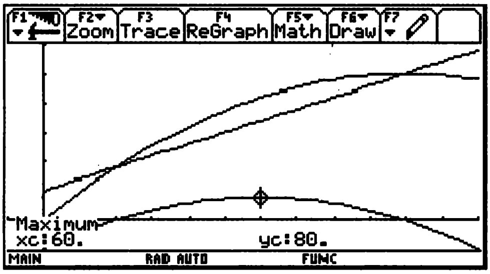


Die Gewinngrenzen können auf unterschiedliche Arten ermittelt werden:

Als Schnittstellen der Erlös- und der Kostenfunktion; dies wird für die obere Gewinngrenze gezeigt.

Als Nullstellen der Gewinnfunktion; dies wird für die untere Gewinngrenze, die Gewinnschwelle, gezeigt.

Maximaler Gewinn:



Der maximale Gewinn kann durch Abtasten mit Trace (F3) bestimmt werden.

Oder man verwendet F5 4 (4:Maximum) Zuerst wird die Gewinnfunktion durch vertikale Cursorbewegungen ausgewählt. Danach ist das Maximum mit dem Cursor einzugrenzen. Dies erfolgt durch Angabe einer unteren Grenze (Lower Bound), danach ENTER , und einer oberen Grenze (Upper Bound), danach wieder ENTER . Es folgt die Ausgabe der Koordinaten des maximalen Gewinns: Bei 60 Einheiten beträgt der maximale Gewinn 80 Geldeinheiten.

Beispiel 3.10 : Freileitung

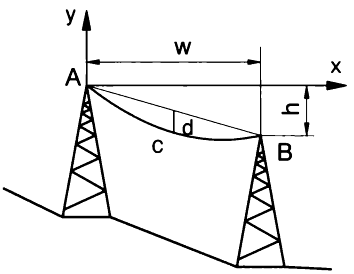


Abb. 3.12 Freileitung

Zwei gleich hohe Masten einer Freileitung (Abb. 3.12). haben einen waagrechten Abstand w = 300 m; ihr Höhenunterschied (und zugleich jener der Aufhängepunkte A und B eines Kabels) beträgt h = 22 m.
In der Mitte zwischen beiden Masten wird ein Durchhang d = 8,5 m gemessen.
Durchhängende Kabel einer Freileitung haben annähernd Parabelform. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und stelle die Gleichung der Parabel auf!

Lösung

Wichtig bei einer solchen Aufgabenstellung ist die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems. Es bieten sich hier drei Möglichkeiten an (Koordinatenursprung in A, in B oder in C, x-Achsen waagrecht, y-Achse senkrecht). Wir wählen A als Koordinatenursprung. Damit erhalten wir (siehe Abb. 3.12):

A (0/0); B (w/−h) oder B (300/−22); $C\left(\frac{w}{2}\Big/-\frac{h}{2}-d\right)$ oder C (150/−19,5).

Die allgemeine Form der Gleichung einer Parabel (mit Parabelachse parallel zur y-Achse) lautet:
$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$; durch Einsetzen der Koordinaten der drei Punkte A, B und C erhalten wir ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen:

I: $0 = c$
II: $-22 = 300^2a + 300b + c$
III: $-19{,}5 = 150^2a + 150b + c$

Dieses Gleichungssystem reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen (bedingt durch die günstige Wahl des Koordinatensystems). Man erhält: a = 0,000378; b = −0,187.
Die gesuchte Parabelgleichung lautet somit: $y = 0{,}000378x^2 - 0{,}187x$.

Aufgaben

3.15 Eine Eisenkugel wird von einem Turm der Höhe $H = 50$ m zum Zeitpunkt $t = 0$ s fallengelassen. Für die Höhe h über dem Boden zur Zeit t gilt: $h(t) = H - \frac{g}{2} \cdot t^2$ $(g \approx 10 \text{ms}^{-2})$.

a) Zeichne den Graphen für die Höhe als Funktion der Zeit.

b) Bestimme daraus die Fallzeit bis zum Auftreffen auf dem Boden.

c) Wie lang braucht die Kugel für die ersten 10 Meter, wie lang für die letzten 10 Meter?

3.16 Ein Körper wird zum Zeitpunkt $t = 0$ s lotrecht mit einer Abwurfgeschwindigkeit $v_0 = 20 \text{ ms}^{-1}$ nach oben geschossen. Für die Steighöhe h gilt: $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit der Fallbeschleunigung $g \approx 10 \text{ ms}^{-2}$.

a) Zeichne den Graphen für die Wurfhöhe h als Funktion der Zeit t.

b) Ermittle daraus die maximale Wurfhöhe, die zugehörige Steigzeit sowie die Flugzeit bis zum Aufprall am Boden!

c) Bestimme rechnerisch die maximale Wurfhöhe und die zugehörige Steigzeit!

3.17 Ein Körper wird zum Zeitpunkt $t = 0$ s in einer Höhe $H = 45$ m über dem Erdboden waagrecht mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20 \text{ ms}^{-1}$ abgeschossen. Sein Flug erfolgt nach einer Wurfparabel mit der Gleichung $y = H - \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$, wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und $g \approx 10 \text{ ms}^{-2}$ die Fallbeschleunigung ist.

a) Zeichne die Flugbahn.

b) Ermittle rechnerisch und graphisch die horizontale Entfernung zum Aufprallpunkt am Erdboden.

3.18 Eine Kostenfunktion lässt sich durch $K(x) = 5x + 600$ beschreiben. Für die Erlösfunktion gilt: $E(x) = -0{,}01x^2 + 12x$.

a) Wie lautet die Nachfragefunktion?

b) Zeichne die Graphen der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion.

c) Ermittle aus der Graphik die Gewinngrenzen und den maximalen Gewinn.

d) Interpretiere die Ergebnisse!

3.19 Ein Betrieb stellt elektrische Spezialschalter her. Die täglichen Produktionskosten (in Euro) werden näherungsweise durch die lineare Kostenfunktion $K(x) = 6x + 6000$ beschrieben. Man schätzt, dass die Anzahl x der vom Handel abgenommenen Schalter mit zunehmendem Stückpreis p nach der Funktion $x = 2000 - 20p$ linear zurückgeht.

a) Wie viele Schalter werden bei einem Stückpreis von 5 €, wie viele bei einem Stückpreis von 8 € abgenommen?

b) Ermittle p in Abhängigkeit von x und danach die Erlösfunktion $E(x) = p \cdot x$ und Gewinnfunktion.

c) Zeichne die Graphen der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion.

d) Entnimm daraus, für welche Stückzahlen Gewinn zu machen ist.

3.20 Für die Herstellungskosten eines Gutes gilt: Die variablen Kosten betragen gleichbleibend 80 Geldeinheiten pro Stück und die Fixkosten sind mit 2000 Geldeinheiten pro Woche veranschlagt. Die Erlösfunktion lautet: $E(x) = 200x - x^2$. Die folgenden Aufgaben sind graphisch zu lösen.

a) Ermittle die Gewinngrenzen.

b) Bei welcher Stückzahl wird der maximale Gewinn erzielt und wie groß ist er?

c) Der Gewinn beträgt 1000 Geldeinheiten. Für welche Stückzahl gilt dies?

d) Bei welcher Stückzahl ist der Erlös maximal?

3.21 Löse das Beispiel 3.10 mit dem Koordinatenursprung **a)** in B **b)** in C.

3.22 Eine Brücke (Abb. 3.13, Maße in m) besitzt einen parabelförmigen Brückenbogen. Bestimme die Längen a, b, c der Stützen.

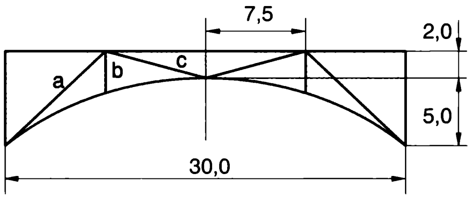


Abb. 3.13

3.23 Ein Hohlzylinder (Abb. 3.14, Maße in mm) mit einer Flüssigkeit wird um seine Achse in Drehung versetzt. Ein Achsenschnitt ergibt als Schnittfigur für die Oberfläche der Flüssigkeit eine Parabel mit der Gleichung $y = y_0 + \frac{\omega^2}{2\,g} \cdot x^2$ ($g = 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}}$). Bei einer Drehzahl $n = 300\ \mathrm{min^{-1}}$ erreicht die Flüssigkeit gerade den oberen Zylinderrand. Wie weit sinkt der Flüssigkeitsspiegel in der Zylinderachse?

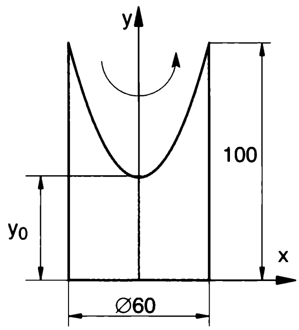


Abb. 3.14

3.24 Der Kraftstoffverbrauch von Autos nimmt in gewissen Grenzen näherungsweise parabelförmig mit der Geschwindigkeit zu. Gib diese Abhängigkeit an (v Geschwindigkeit in km/h, y Treibstoffverbrauch in *l* pro 100 km):

a)

v	30	80	120
y	3,0	4,1	7,0

b)

v	30	100	140
y	6,9	9,0	13,5

c)

v	30	80	120
y	4,6	5,4	8,2

3.25 Mit einem 20 m langen Drahtzaun soll ein rechteckiges Flächenstück für einen Käfig eingezäunt werden. Bei welchen Seiten des Rechtecks ist die Fläche A am größten?

Hinweis: Ist x die Länge einer Rechtecksseite, so ist A(x) eine quadratische Funktion.

3.26 Die Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist 30 cm. Wie lang müssen die Katheten sein, damit das rechtwinklige Dreieck größtmögliche Fläche A hat?

Hinweis: A(x) ist eine quadratische Funktion der Länge x einer der beiden Katheten.

3.3 Quadratische Gleichungen

Eine Vorbemerkung

Zieht man auf beiden Seiten etwa der Gleichung $x^2 = 4$ die (Quadrat-)Wurzel, so erhält man $x = \sqrt{4}$ oder $x = 2$. Tatsächlich ist jedoch auch -2 eine Lösung der Gleichung $x^2 = 4$, wie man durch eine Probe sofort bestätigt. *Beidseitiges Wurzelziehen* einer Gleichung ist *keine Äquivalenzumformung*! Die beim Wurzelziehen erhaltene positive Lösung ist anschließend durch die negative Lösung -2 zu ergänzen (siehe dazu auch "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 75, Anmerkung (2)).
In Beispiel 3.6 haben wir die Nullstellen der quadratischen Funktion $y = 2x^2 + 2x - 12$ *graphisch* ermittelt. Wir versuchen nun, dies *rechnerisch* durchzuführen.

Beispiel 3.11 : Rechnerische Ermittlung von Nullstellen einer quadratischen Funktion

Bestimme die Nullstellen der Funktion $y = 2x^2 + 2x - 12$. D.h., es sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $2x^2 + 2x - 12 = 0$ zu ermitteln (Abb. 3.15).

Lösung

Zur Lösung verwenden wir die Methode des *Ergänzens auf ein volles Quadrat*:

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \quad | :2$$
$$x^2 + x - 6 = 0 \quad | +6$$
$$x^2 + x = 6 \quad | \text{ linke Seite zu vollem Quadrat ergänzen}$$
$$x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \quad | +\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad | \text{ Wurzelziehen und } \textit{beide} \text{ Vorzeichen beachten}$$
$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \quad | -\frac{1}{2}$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad | \text{ beide Lösungen anschreiben}$$

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$.
Oder: $\mathbb{L} = \{-3, 2\}$.

Probe:

$x_1 = 2$: $\quad 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 12 = 0$
$\quad\quad 12 - 12 = 0$

$x_2 = -3$: $\quad 2\cdot(-3)^2 + 2\cdot(-3) - 12 = 0$
$\quad\quad 18 - 6 - 12 = 0$

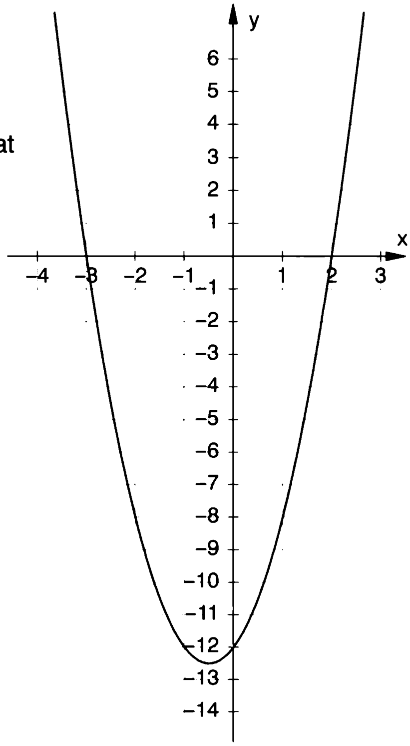


Abb. 3.15 Nullstellen einer quadratischen Funktion

Eine Gleichung der Form $\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ mit beliebigen Konstanten a, b und c ($a \neq 0$) nennt man **quadratische Gleichung** (oder Gleichung 2. Grades) mit der **Variablen x**, angeschrieben in der **allgemeinen Form**.
$a \cdot x^2$ nennt man das quadratische, $b \cdot x$ das lineare und c das absolute Glied.
Dividiert man die Gleichung durch a, so erhält man die **Normalform** der quadratischen Gleichung: $\mathbf{x^2 + p \cdot x + q = 0}$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$.
Wir vereinbaren im Folgenden für die Grundmenge G stets $\mathbb{R}$.

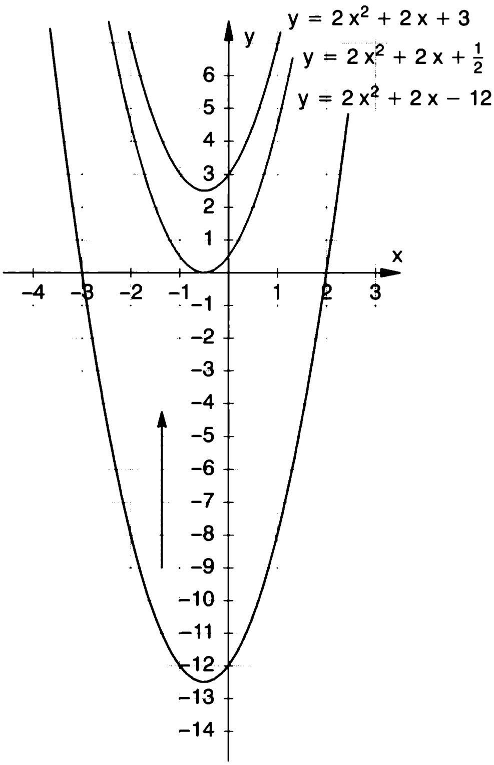


Abb. 3.16 Nullstellen einer quadratischen Funktion

Wir verschieben nun den Graphen der quadratischen Funktion $y = 2x^2 + 2x - 12$ des Beispiels 3.11 nach oben (Abb. 3.16). Dabei rücken die Nullstellen und immer näher zusammen, bis sie im Falle der Funktion $y = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ zusammenfallen: Ihr Graph berührt die x-Achse.

Die quadratische Gleichung besitzt nur noch *eine* Lösung.

Zeige dies durch Bestimmung der Scheitelkoordinaten der Parabel $2x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$!

Der Graph von $y = 2x^2 + 2x + 3$ schneidet oder berührt die x-Achse nicht mehr. Dies bedeutet, dass die zugehörige quadratische Gleichung
$2x^2 + 2x + 3 = 0$ *keine* (reellen) Lösungen besitzt.

Lösungsformel für eine quadratische Gleichung

Wiederholt man für die quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ (d.h. die Konstanten $a \neq 0$, b und c sind nicht festgelegt) die *gleichen* Schritte wie im Beispiel 3.11, so erhält man als Lösungen:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a} \text{ und } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a};$$

man schreibt kurz als Lösungsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$

Diskussion der Lösungsformel:
Der Radikand $D = b^2 - 4a \cdot c$ entscheidet über die drei möglichen Lösungsfälle einer quadratischen Gleichung. Man nennt D daher **Diskriminante**[3]. Ist $D \geqslant 0$, so ist der Abstand der Nullstellen

$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{D}}{a}$ (rechne nach!).

[3] discriminare, lat., unterscheiden, trennen

Diskriminante D	Lösungen	Geometrische Bedeutung
$D > 0$	**zwei** voneinander verschiedene Lösungen x_1, x_2	Die Parabel besitzt **zwei** Nullstellen.
$D = 0$	es gibt nur **eine** Lösung: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ Man spricht auch von einer **Doppellösung**	Die Parabel berührt die x-Achse im Scheitel, es gibt nur **eine** Nullstelle.
$D < 0$	**keine** (reelle) Lösung!	Die Parabel schneidet die x-Achse nicht, es gibt **keine** Nullstellen.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die Zahl $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ heißt **Diskriminante** der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Lösungsformeln für eine quadratische Gleichung:

Allgemeine Form: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Normalform: $x^2 + p \cdot x + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel 3.12 : Lösung von quadratischen Gleichungen

a) $2x^2 + 2x - 12 = 0$ (siehe Beispiel 3.11) **b)** $4x^2 + 5 = 4x$ **c)** $x^2 - x = 2$

Lösung

Bei Anwendung einer Lösungsformel ist sorgfältig auf die Bestimmung der Werte a, b und c bzw. p, q zu achten!

Zu **a)** Wegen $a \neq 1$ verwenden wir die Lösungsformel für die allgemeine Form:
$2x^2 + 2x + (-12) = 0$, daher: $a = 2$, $b = 2$, $c = -12$;

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4}$; $x_1 = 2$, $x_2 = -3$;
$\mathbb{L} = \{2, -3\}$.

Probe: $x_1 = 2$: $2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 12 = 0$;
$x_2 = -3$: $2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 12 = 0$.

Zu **b)** $4x^2 + (-4)x + 5 = 0$; daher: $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$;

$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{8}$; die Wurzel kann (reell) nicht gezogen werden, die Gleichung hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \{\,\}$.

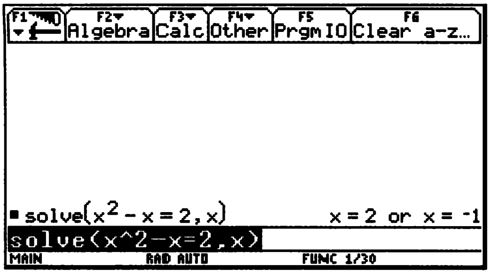
Zu **c)** Wegen a = 1 kann die Lösungsformel für die Normalform verwendet werden.
$x^2 + (-1)x + (-2) = 0$; daher: $p = -1$, $q = -2$;

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2};$$

$x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $\mathbb{L} = \{-1, 2\}$.

Probe: $x_1 = -1$: $(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$;
$x_2 = 2$: $2^2 - 2 - 2 = 0$.

Voyage 200



Mit dem Befehl "solve" werden die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung ermittelt.

Besitzt die quadratische Gleichung keine reellen Lösungen, so wird "false" ausgegeben.

Beispiel 3.13 : Sonderformen einer quadratischen Gleichung

a) $2x^2 - 32 = 0$ **b)** $3x^2 - 2x = 0$

Lösung

Zu **a)** Die quadratische Gleichung besitzt kein lineares Glied. Man spricht in diesem Fall von einer *reinquadratischen* Gleichung (im Gegensatz zu einer *gemischtquadratischen* Gleichung).

$$\begin{aligned} 2x^2 - 32 &= 0 && \mid +32 \\ 2x^2 &= 32 && \mid :2 \\ x^2 &= 16 && \mid \text{Wurzelziehen und beide Vorzeichen beachten} \end{aligned}$$

$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$
$x_1 = -4$; $x_2 = 4$; $\mathbb{L} = \{-4, 4\}$. Führe die Probe durch!

Zu **b)** Die quadratische Gleichung besitzt kein absolutes Glied. Auch in diesem Fall rechnet man ohne Lösungsformel einfacher:

$3x^2 - 2x = 0$ | linke Seite faktorisieren
$x \cdot (3x - 2) = 0$

Die Anwendung des Produkt-Null-Satzes ergibt: $x = 0 \vee 3x - 2 = 0$; damit lauten die Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{3}$; $\mathbb{L} = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$. Führe die Probe durch!

Beispiel 3.14 : Bestimmung eines Koeffizienten

Bestimme den Koeffizienten c so, dass die quadratische Gleichung $3x^2 + 6x + c = 0$ eine Doppellösung besitzt.

Lösung

$a = 3$; $b = 6$; $x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot c}}{2 \cdot 3}$;

Eine Doppellösung ergibt sich, wenn der Radikand gleich 0 ist: $6^2 - 12c = 0 \Rightarrow c = 3$.

Beispiel 3.15 : Bruchgleichung

Löse die Gleichung $\frac{2u+5}{10-u} - \frac{u-2}{u-4} = 0$.

Lösung

Einschränkungen für die Definitionsmenge $\mathbb{D}$: $u \neq 10$, $u \neq 4$

$$\begin{aligned} \frac{2u+5}{10-u} - \frac{u-2}{u-4} &= 0 \qquad |\cdot(10-u)(u-4) \\ (2u+5)(u-4) - (u-2)(10-u) &= 0 \\ 3u^2 - 15u &= 0 \\ 3u\cdot(u-5) &= 0 \end{aligned}$$

Produkt-Null-Satz: $u_1 = 0$, $u_2 = 5$. Sowohl u_1 als auch u_2 gehören zu $\mathbb{D}$; $\mathbb{L} = \{0, 5\}$.
Führe die Probe durch!

Auch algebraische Gleichungen (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 214), die in der Ausgangsform keine quadratischen Gleichungen sind, lassen sich manchmal durch Umformungen oder Einführung einer neuen Variablen auf solche zurückführen.

Beispiel 3.16 : Auf quadratische Gleichungen zurückführbare algebraische Gleichungen

Löse **a)** $z^6 - 12z^3 + 32 = 0$ **b)** $5 - \sqrt{4x+1} = x$ **c)** $x^3 - x^2 - 2x = 0$

Lösung

Zu **a)** Wir ersetzen z^3 durch x und erhalten dadurch die quadratische Gleichung $x^2 - 12x + 32 = 0$. Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 = 8$ und $x_2 = 4$. Es folgt: $z_1 = \sqrt[3]{x_1} = 2$ und $z_2 = \sqrt[3]{x_2} = \sqrt[3]{4}$. $\mathbb{L} = \{2, \sqrt[3]{4}\}$. Führe die Probe durch!

Zu **b)** Definitionsmenge $\mathbb{D}$: aus $4x + 1 \geqslant 0$ folgt $x \geqslant -\frac{1}{4}$; daher: $\mathbb{D} = [-\frac{1}{4}, \infty[$.

$$\begin{aligned} 5 - \sqrt{4x+1} &= x \qquad | -5 \\ -\sqrt{4x+1} &= x - 5 \qquad | \text{ quadrieren} \\ 4x + 1 &= x^2 - 10x + 25 \end{aligned}$$

$x^2 - 14x + 24 = 0$; daraus: $x_1 = 12$ und $x_2 = 2$.

Probe: $x_1 = 12$: $5 - \sqrt{4\cdot 12 + 1} = 5 - 7 = -2 \neq 12$, d.h. 12 ist keine Lösung!
$x_2 = 2$: $5 - \sqrt{4\cdot 2 + 1} = 5 - 3 = 2$, d.h. 2 ist eine Lösung. Damit: $\mathbb{L} = \{2\}$.

Zu **c)** Diese Gleichung 3. Grades in x ("kubische" Gleichung) kann faktorisiert und danach mit dem Produkt-Null-Satz gelöst werden:
$x^3 - x^2 - 2x = 0 = x\cdot(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0$.
Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen −1 und 2. Somit insgesamt:
$\mathbb{L} = \{-1, 0, 2\}$.

Zwischen den Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung und den Koeffizienten p und q bzw. a, b und c besteht ein einfacher Zusammenhang.

Satz von Vieta[4]: Sind x_1 und x_2 Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ bzw. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, so gilt:

a) $x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$ sowie $x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a}$

b) $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ bzw. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Produktform eines quadratischen Terms (eines Polynoms vom Grad 2)

Beweis:

Zu **a)** $x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p;$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q.$$

Zu **b)** Setzt man $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 . x_2$ in die Normalform ein, so erhält man:
$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) =$
$(x - x_1)(x - x_2)$.

Anwendung des Satzes von Vieta:

(1) Aufstellen der Produktform des Gleichungsterms einer quadratischen Gleichung

(2) Lösungskontrolle für eine quadratische Gleichung (führe diese im Beispiel 3.12 durch!)

(3) Gezieltes Erraten der Lösungen einfacher quadratischer Gleichungen

Beispiel 3.17 : Anwendung des Satzes von Vieta

a) Schreibe das Polynom $2x^2 + 2x - 12$ in der Produktform (siehe Beispiel 3.11).

b) Löse die Gleichung $x^2 - 3x - 10 = 0$ mit Hilfe des Satzes von Vieta.

c) Von einer quadratischen Gleichung kennt man die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Wie lautet die Gleichung in der Normalform?

d) Von der quadratischen Gleichung $2x^2 + 5x + c = 0$ kennt man eine Lösung $x_1 = 10$. Wie lautet die zweite Lösung x_2 und der Koeffizient c?

Lösung

Zu **a)** Wir bestimmen die Lösungen der quadratischen Gleichung $2(x^2 + x - 6) = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4};\ x_1 = 3;\ x_2 = -2.$$

Also: $2x^2 + 2x - 12 = 2(x - 3)(x + 2)$.

Liegt umgekehrt eine quadratische Gleichung schon in der Produktform vor, so können aufgrund des Produkt-Null-Satzes sofort die Lösungen abgelesen werden. Z.B.: $2(x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$; damit: $x_1 = 3$; $x_2 = -2$.

Zu **b)** $x_1 + x_2 = 3$; $x_1x_2 = -10$:

-10 ist also so in 2 Faktoren zu zerlegen, dass deren Summe 3 ergibt. Da das Produkt der beiden Lösungen negativ ist, ist eine der beiden Lösungen negativ, die andere positiv. Eine positive Summe der beiden Lösungen bedeutet wiederum, dass die positive Lösung betragsmäßig größer als die negative ist. Die beiden Forderungen werden von den beiden Zahlen 5 und -2 erfüllt: $x_1 = 5$ und $x_2 = -2$.

[4] François VIÈTE, latinisiert VIETA, (1540 - 1603), französischer Mathematiker

Zu **c)** $(x-5)(x-2) = x^2 - 7x + 10 = 0$

Zu **d)** $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{2} - x_1 = -\frac{5}{2} - 10 = -\frac{25}{2}$;

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 10 \cdot (-\frac{25}{2}) = -250.$

Beispiel 3.18 : Quadratische Ungleichungen

Löse die Ungleichung $2x^2 - 7x + 3 \geqslant 0$ in $\mathbb{R}$

Lösung

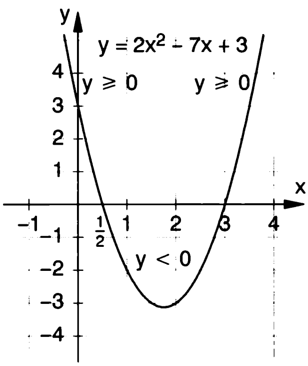


Abb. 3.17 Zu Beispiel 3.18

Es sind jene Stellen (x-Werte) zu finden, an denen die Parabel $y = 2x^2 - 7x + 3$ die x-Achse möglicherweise schneidet oder oberhalb der x-Achse verläuft. Da der Koeffizient a des quadratischen Gliedes positiv ist, öffnet sich die Parabel nach *oben*. Das bedeutet, dass die Parabel rechts von der größeren und links von der kleineren Schnittstelle *oberhalb* der x-Achse verlaufen muss. Diese beiden Schnittstellen, die Nullstellen, sind daher sicher Lösungen. Diese Nullstellen sind auch Lösungen der quadratischen Gleichung $2x^2 - 7x + 3 = 0$: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

D.h. $y = 2x^2 - 7x + 3 \geqslant 0$ für $x \leqslant \frac{1}{2}$ oder $x \geqslant 3$. Die gesuchte Lösungsmenge lautet daher: $\mathbb{L} =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [3, \infty[$.

Kontrolle: $x = 0$: $2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 3 = 3 \geqslant 0$;
$x = 1$: $2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 3 = -2 < 0$;
$x = 4$: $2 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 + 3 = 7 \geqslant 0$.

Beispiel 3.19 : Quadratisches Gleichungssystem in zwei Variablen

Ein Rechteck wird einem Halbkreis mit dem Radius r = 2 cm nach Abb. 3.18 eingeschrieben.

a) Ermittle die Seitenlängen des Rechtecks, wenn der Umfang 8 cm ist.

b) Gesucht sind nun die Seitenlängen des Rechtecks, dessen Flächeninhalt gleich 3 cm^2 ist.

Lösung

Die Seiten des Rechtecks sind (in cm) 2x und y. Pythagoräischer Lehrsatz: $x^2 + y^2 = 2^2$.

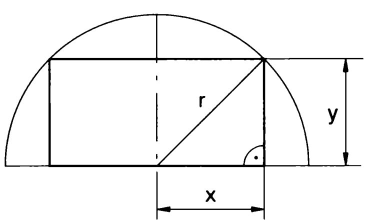


Abb. 3.18

Zu **a)** *Zusätzlich* gilt die Forderung: $4x + 2y = 8$. Beide Beziehungen bestehen zugleich; d.h. es liegt ein System von zwei Gleichungen in den zwei Variablen x und y vor:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x^2 + y^2 = 4 \\ \text{II:} & 4x + 2y = 8 \\ \hline \end{array}$$

Im Unterschied zu einem linearen Gleichungssystem ist (wenigstens) eine der beiden Gleichungen quadratisch. Zur Lösung verwenden wir das Einsetzungsverfahren:

Aus II folgt: $y = 4 - 2x$; Einsetzen in I ergibt eine quadratische Gleichung in x:

$x^2 + (4 - 2x)^2 = 4$ oder $5x^2 - 16x + 12 = 0$; Lösung: $x_1 = 2$; $x_2 = 1{,}2$;

$y_1 = 4 - 2x_1 = 0$; $y_2 = 4 - 2x_2 = 1{,}6$.

Wir erhalten somit zwei Lösungspaare: (2; 0) und (1,2; 1,6). Praktisch in Frage kommt natürlich nur das Rechteck mit den Seiten (in cm) $2x = 2{,}4$ und $y = 1{,}6$.

Man erkennt anschaulich leicht, dass für den Umfang nicht zu kleine, aber auch nicht zu große Werte gefordert werden dürfen. In solchen Fällen ist die Lösungsmenge leer.

Zu **b)** *Zusätzlich* zu $x^2 + y^2 = 4$ gilt nun die Forderung, dass $2x \cdot y = 3$ ist.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x^2 + y^2 = 4 \\ \text{II:} & 2x \cdot y = 3 \\ \hline \end{array}$$

In diesem Fall besteht das Gleichungssystem aus zwei quadratischen Gleichungen (auch ein Term "x · y" ist quadratisch!). Zur Lösung verwenden wir wieder das Einsetzungsverfahren:

Aus II folgt: $y = \frac{3}{2x}$; Einsetzen in I ergibt schließlich eine Gleichung 4. Grades:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{3}{2x}\right)^2 &= 4 \\ x^2 + \frac{9}{4x^2} &= 4 \qquad | \cdot 4x^2 \\ 4x^4 + 9 &= 16x^2; \end{aligned}$$

setzt man $u = x^2$, so erhält man eine quadratische Gleichung in u:

$4u^2 - 16u + 9 = 0$; Lösungen: $u_1 = 3{,}323$; $u_2 = 0{,}677$.

$x^2 = 3{,}323 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3{,}323} = \pm 1{,}823$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{0{,}677} = \pm 0{,}823$.

Damit: $y_{1,2} = \frac{3}{2x_{1,2}} = \pm\ 0{,}823$; $y_{3,4} = \frac{3}{2x_{3,4}} = \pm 1{,}823$.

Lösungspaare: (1,823; 0,823); (−1,823; −0,823); (0,823, 1,823); (−0,823, −1,823).

Auch hier ist anschaulich leicht einzusehen, dass für den Flächeninhalt nicht zu kleine, aber auch nicht zu große Werte gefordert werden dürfen. In solchen Fällen ist die Lösungsmenge leer.

Aus sachlichen Gründen scheiden die Lösungen mit negativen Zahlen aus. Es gibt somit zwei Rechtecke (Längen auf zwei Nachkommastellen):

1. Rechteck: Seitenlängen 3,65 cm und 0,82 cm
2. Rechteck: Seitenlängen 1,65 cm und 1,82 cm.

Im Überblick: Quadratische Gleichung

Die formelmäßige Lösung einer quadratischen Gleichung in der Variablen x (Gleichung 2. Grades in x) geht von einer der beiden folgenden Formen aus:

Allgemeine Form: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \ (a \neq 0)$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Normalform: $x^2 + p \cdot x + q = 0$: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Wenn nicht anders vereinbart, gilt als Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

Eine quadratische Gleichung **ohne absolutes Glied**, also $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$, wird einfacher nach Faktorisierung mit Hilfe des Produkt-Null-Satzes gelöst.

Art und Anzahl der Lösungen hängen vom Vorzeichen der Diskriminante D in der jeweiligen Lösungsformel ab: $D = b^2 - 4ac$ bzw. $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

(1) $D > 0$: **zwei** voneinander verschiedene Lösungen x_1, x_2
(2) $D = 0$: **eine** Lösung, $x_1 = x_2$; man spricht auch von einer **Doppellösung**
(3) $D < 0$: **keine** (reellen) Lösungen

Die **Nullstellen der quadratischen Funktion** $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ sind die (reellen) **Lösungen der quadratischen Gleichung** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Satz von Vieta: Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung (auch eine Doppellösung ist möglich), so gilt:

a) $x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$ sowie $x_1 . x_2 = q = \frac{c}{a}$
b) $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ bzw. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Produktform quadratischer Terme (eines Polynoms vom Grad 2)

Quadratische Ungleichung: Man löst die zugehörige quadratische Gleichung und entscheidet aufgrund der Anzahl und Lage ihrer Lösungen über die Lösungsmenge der Ungleichung.

Ein **quadratisches Gleichungssystem** in zwei Variablen (Unbekannten) x, y liegt vor, wenn *wenigstens* eine der Gleichungen in x oder y quadratisch ist (und die andere quadratisch oder linear ist). Zum Unterschied zu linearen Gleichungssystemen kann es bei endlichen Lösungsmengen auch *mehr als eine* Lösung geben.
Man kann versuchen, die Lösung(en) mit dem **Einsetzungsverfahren** zu finden.

Aufgaben

3.27 Löse ohne Taschenrechner:

a) $u^2 = 36$ **b)** $x^2 + x = 0$ **c)** $x^2 - 4x = 0$ **d)** $3x(x + 6) = 0$
e) $3x^2 - 6x = 0$ **f)** $5t^2 - 10t = 0$ **g)** $3d - d^2 = 0$ **h)** $3x^2 - 12x = 0$
i) $(x - 4)^2 = 0$ **j)** $(a + 3)^2 = 4$ **k)** $(t - 12)^2 = 169$ **l)** $(a + 4)^2 = 81$
m) $(2a + 4)^2 = 16$ **n)** $(4x - 5)^2 - 36 = 0$ **o)** $(3y + 3)^2 = 64$ **p)** $(8z - 64)^2 = 144$

3.28 Löse durch quadratische Ergänzung:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ **b)** $a^2 - 2a - 8 = 0$ **c)** $a^2 + 2a - \frac{5}{4} = 0$ **d)** $2d^2 - 6d - 8 = 0$
e) $4s^2 - 4s - 8 = 0$ **f)** $3h^2 - 6h = 9$ **g)** $4r^2 + 12r = -5$ **h)** $2y^2 + 4y = \frac{5}{2}$
i) $12x^2 + 12x = 9$ **j)** $5x^2 + 4x - 12 = 0$ **k)** $4y - 8y^2 + \frac{15}{2} = 0$ **l)** $2x^2 = 4x + \frac{5}{2}$

3.29 Gib mit Hilfe der Diskriminante die Anzahl der Lösungen an!

a) $x^2 - 10x + 5 = 0$ **b)** $x^2 + 10x = -15$ **c)** $w^2 + 4w = 0$ **d)** $3w^2 + 3w + 3 = 0$
e) $3y^2 - 10y + \frac{25}{3} = 0$ **f)** $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{25}{4} = 0$ **g)** $s^2 - 12s - \frac{24}{5} = \frac{56}{6}$ **h)** $\frac{45}{8}a^2 - 15a + 10 = 0$

Löse die Aufgaben 3.30 bis 3.34 ohne Taschenrechner:

3.30 **a)** $6 - 2w^2 = 8 - 4w^2$ **b)** $16x^2 = 64$ **c)** $36 = 49u^2$ **d)** $81 + 2c^2 = 4c^2$

3.31 **a)** $10y^2 - 7y = 45$ **b)** $3z^2 - 11z + 6 = 0$ **c)** $-6 = x^2 - 5x$ **d)** $u^2 - 6u - 40 = 0$
e) $3 = 2u + \frac{1}{u}$ **f)** $s^2 = -16 + 17s$ **g)** $x - 5 = \frac{x^2}{20}$ **h)** $\frac{16}{3} + 3x^2 = 8x$

3.32 **a)** $4x^2 - \frac{x}{3} = 0$ **b)** $18(x - 2)^2 = 2$ **c)** $(x + 3)(x - 4) = 0$
d) $\frac{5}{2}x + x^2 = 0$ **e)** $\left(2x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x + 1) = 0$ **f)** $10x^2 = -40x - 40$

3.33 **a)** $\frac{w}{4} + 1 = \frac{w - 2}{5 - w}$ **b)** $\frac{4}{\frac{9}{r} - 1} = 2(4 - r)$ **c)** $\frac{a}{40} + \frac{a + 4}{4 - a} = a$
d) $\frac{x}{x + 3} - \frac{9}{4} - \frac{x}{3 - x} = 0$ **e)** $1 - \frac{6t - 20}{2(t - 2)} - \frac{t - 4}{t + 1} = 0$ **f)** $\frac{c + 5}{c + 1} + \frac{8}{2c - 2} = \frac{17 - 3c}{c - 1}$
g) $\frac{y + 16}{4(y + 1)} \cdot 4 = \frac{3y - 2}{5 - 2y} + \frac{5y - 2}{2y}$ **h)** $\frac{4u - 8}{u - 2} + 5(u - 1) = 0$ **i)** $3(x - 1) + \frac{x - 4}{x - 3} = \frac{1}{3 - x}$

3.34 **a)** $\frac{4x - 5}{7} = x + \frac{3}{x} - \frac{4x - 2}{10} - 2$ **b)** $\frac{-(3a - 4)}{a + 1} - \frac{3(a + 1)}{(a - 1)(a + 1)} = -\frac{2a + 1}{a - 1}$
c) $\frac{16}{y^2 - 16} - 2 = \frac{8}{y - 4} - 1$ **d)** $\frac{2x - 1}{x + 3} = \frac{1 - x}{x} + \frac{6x - 12}{2(x - 1)}$
e) $\frac{2}{y^2 - 4} - \frac{1}{y(y - 2)} = \frac{y^2 - 4}{y^2 + 2y}$ **f)** $-\frac{2k + 7}{k + 2} + \frac{3(k - 1)}{k - 2} = \frac{17}{k^2 - 4}$
g) $\frac{4}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{100} = 0{,}75\left(2x + \frac{3}{5}\right)^2$ **h)** $\frac{2w + 1}{w - 1} - \frac{3w^2 - 6}{w + 1} - \frac{3(w + 1)}{w^2 - 1} = 0$

3.35 Löse die folgende Gleichung nach x:

a) $(x - a)^2 = 0$ **b)** $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 1$ **c)** $(x - a)\left(x - \frac{1}{2a}\right) = 0$
d) $x^2 + 4mx + 4m^2 = 0$ **e)** $x^2 + x = d^2 + d$ **f)** $x^2 - \frac{x}{k} + 1 = k \cdot x$
g) $3x^2 - 5ax - 2a^2 = 0$ **h)** $2x^2 - 3ax + a^2 = 0$ **i)** $2x^2 + b \cdot x + 2x = b^2 + b$
j) $4x^2 + 1 = 2x\left(u + \frac{1}{u}\right)$ **k)** $x - 3s = 1 - \frac{2s(s + 1)}{x}$ **l)** $x(x - 2) = b\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

3.36 Löse nach x:

a) $x + \frac{2}{x} = \frac{1 + 2a^2}{a}$ **b)** $\frac{p}{x} + pqx = p^2 + q$ **c)** $x - \frac{a^2b + 1}{ab} + \frac{1}{bx} = 0$

d) $\frac{a}{x + 1} + x - a = 0$ **e)** $\frac{a}{2x} - \frac{a - 2}{x - 1} + 1 = 0$ **f)** $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - a} = \frac{1 - a}{a}$

g) $\frac{1 - kx}{k - x} = \frac{k - x}{1 - kx}\ (k^2 \neq 1)$ **h)** $3 \cdot \frac{x - m}{x + m} = 4 - \frac{x + m}{m - x}$ **i)** $x - \frac{1}{x} = \frac{2m + n}{2m - n} - \frac{2m - n}{2m + n}$

3.37 Löse nach der angegebenen Variablen:

a) $s = v \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2,\ t = ?$ **b)** $M = \frac{p}{2l}\ x\,(l - x),\ x = ?$ **c)** $\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0,\ \lambda = ?$

3.38 Gib die Definitionsmenge an und löse die Gleichung:

a) $2x + 3\sqrt{x} = 14$ **b)** $2\sqrt{x} = 8 + x$ **c)** $2\sqrt{x + 5} = x + 3$

d) $x = 6 + \sqrt{x}$ **e)** $2x - 7 = \sqrt{x + 4}$ **f)** $2x + 7 = \sqrt{x + 4}$

g) $\sqrt{2x - 5} + 3 = \sqrt{5x + 1}$ **h)** $1 + \sqrt{9x + 1} = \sqrt{11x + 4}$ **i)** $\sqrt{2(x - 1)} + \sqrt{3x + 1} = 2$

j) $2\sqrt{x} - \sqrt{x + 3} = \sqrt{2x - 2}$ **k)** $2\sqrt{x} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{2x - 2}$ **l)** $\sqrt{x + 5} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \sqrt{3x + 4}$

3.39 Löse die Gleichung:

a) $2\sqrt{x + 5} - \sqrt{2x + 1} = \sqrt{4x - 3}$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x - 7}{2}} + \frac{1}{3}\sqrt{x + 4} = \sqrt{x - 1}$

c) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x + \frac{5}{2}} = \sqrt{3x + \frac{23}{2}}$ **d)** $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{x + 14} + \sqrt{x - 7}$

e) $\sqrt{x - 4} + \frac{x + 1}{\sqrt{x + 4}} = \sqrt{x + 4}$ **f)** $\frac{3}{\sqrt{x + 5}} - \sqrt{\frac{x}{2x - 4}} = 0$

g) $\frac{1}{\sqrt{x + 3}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x + 3}{x}} = 0$ **h)** $\frac{1}{2 - 3\sqrt{x + 4}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x + 4}$ **i)** $\frac{1}{2\sqrt{x - 1} - 1} = \frac{1}{6}\sqrt{x - 1}$

3.40 Löse nach x:

a) $\sqrt{x + a} + \sqrt{4a - x} = 3 \cdot \sqrt{a}$ **b)** $\sqrt{4x - t} + \sqrt{2x} = 2\sqrt{t}$ **c)** $\sqrt{x + m} = \sqrt{3m} - \sqrt{m - x}$

3.41 Löse die Gleichung nach x:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ **c)** $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

d) $8x^6 - 9x^3 + 1 = 0$ **e)** $4x^4 - x^2 = 4a^2 \cdot x^2 - a^2$ **f)** $a^2 \cdot x^4 - x^2 + a^2 \cdot x^2 = 1$

3.42 Löse die Gleichung nach x:

a) $x^3 - x^2 - 2x = 0$ **b)** $x^3 + x^2 + 2x = 0$ **c)** $6x^3 + 2x^2 = 3a \cdot x^2 + a \cdot x$

3.43 Löse mit dem Satz von Vieta (möglichst im Kopf, die Lösungen sind ganzzahlig)

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $x^2 + 5x - 6 = 0$ **c)** $x^2 - x - 6 = 0$ **d)** $x^2 + x - 6 = 0$

e) $g^2 - 10g + 21 = 0$ **f)** $y^2 + 9y + 14 = 0$ **g)** $u^2 - 7u - 8 = 0$ **h)** $x^2 + 10x + 24 = 0$

i) $x^2 + x - 72 = 0$ **j)** $c^2 + 2c + 1 = 0$ **k)** $x^2 + 13x - 30 = 0$ **l)** $b^2 - 6b + 5 = 0$

3.44 Schreibe den quadratischen Term in der Produktform:

a) $x^2 - 4x + 3$ **b)** $u^2 - 3u - 4$ **c)** $x^2 + 7x + 12$ **d)** $s^2 + 4s$

e) $2t^2 - 5t + 2$ **f)** $2r^2 - 8r + 6$ **g)** $4k^2 - 9k + 2$ **h)** $6t^2 - 5t + 1$

3.45 Eine quadratische Gleichung hat die folgenden Lösungen. Notiere sie in Normalform.

a) 4 und 7 **b)** -1 und 2 **c)** 3 (Doppellösung) **d)** 0 und 3

e) -2 und 2 **f)** $1 + \sqrt{2}$ und $1 - \sqrt{2}$ **g)** a und a + b **h)** $-\frac{a}{2}$ und 4a

3.46 Ermittle den fehlenden Koeffizienten und die zweite Lösung von $x^2 + px + q = 0$!

a) $x_1 = -3;\ q = -15$ **b)** $x_2 = -23;\ p = -20$ **c)** $x_1 = -7;\ p = 15$ **d)** $x_2 = -8;\ q = 56$

3.47 Gib die Bedingung für m an, damit die Gleichung $\frac{x^2}{2} + 4x + m = 0$

a) nur eine Lösung **b)** zwei Lösungen **c)** keine (reelle) Lösung hat!

3.48 Gib die Bedingung für k an, damit die Gleichung $4x^2 + 8kx + 9 = 0$

a) nur eine Lösung **b)** zwei Lösungen **c)** keine (reelle) Lösung hat!

3.49 Wähle k so, dass die Gleichung $x^2 + (k - 2)x = 2k - 9$ eine Doppellösung hat!

3.50 Löse:

a) I: $xy + 2x = 5$, II: $x - y = 2$

b) I: $x^2 + 3xy = 28$, II: $2x + y = 8$

c) I: $x^2 + y^2 = 13$, II: $x + 2y = 10$

d) I: $x + y = 5$, II: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

e) I: $x^2 + y^2 = 5$, II: $x^2 - y^2 = 3$

f) I: $2x^2 + y^2 = 11$, II: $x \cdot y = 3$

g) I: $x^2 + 4y^2 = 2a^2$, II: $2x \cdot y = a^2$

h) I: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$, II: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

Geometrische Aufgaben

3.51 Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks beträgt 82,0 cm^2. Berechne die Seitenlänge des Dreiecks!

3.52 In einem rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die Katheten wie 5:12; die Hypothenuse beträgt 26,0 cm. Welche Länge besitzen die Katheten?

3.53 Die Seiten eines Dreiecks unterscheiden sich jeweils um 1 cm. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $84{,}0 \cdot 10^{-4}$ m^2. Berechne die Längen der Dreieckseiten!

Hinweis: Setze für die drei Seiten $x - 1$, x und $x + 1$; verwende sodann die Heron'sche Flächenformel und setze $u = x^2$.

3.54 Eine Strecke wird im Goldenen Schnitt ("Ingenieur-Mathematik 1", Seite 134) geteilt, wenn sich die Länge c der ganzen Strecke zum größeren Teilabschnitt x wie der größere Teilabschnitt x zum kleineren Abschnitt c – x verhält. Berechne das Teilungsverhältnis x/c.

3.55 Jeder Punkt P (x/y) auf der Strecke zwischen den Punkten A (0/4) und B (3/0) (Abb. 3.19) bestimmt ein Rechteck mit den Seiten x und y. Welche Seiten besitzt ein Rechteck mit der Fläche $\frac{5}{3}$?
Welche Ausmaße hat das flächengrößte Rechteck?

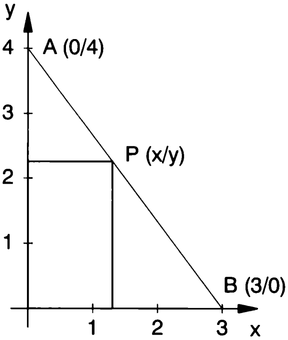


Abb. 3.19

3.56 Lässt sich mit einer Schnur der Länge 5 m ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 1,5 m^2 bilden? Wie sieht das flächengrößte Rechteck aus?

3.57 Eine Seite eines Quadrates wird um 2 cm, die andere um 5 cm verlängert. Das entstehende Rechteck hat einen um 80% größeren Flächeninhalt. Welche Abmessungen besitzt das Rechteck?

3.58 Die Diagonale eines Rechtecks ist 50 cm. Verlängert man die kürzere Seite um 5 cm und verkürzt die längere Seite um 5 cm, so entsteht ein Quadrat. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

3.59 Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 24,0 m^2. Die Seiten verhalten sich wie 8:5. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

3.60 Die Diagonalen eines Deltoides mit einem Flächeninhalt von 275 cm^2 unterscheiden sich um 3 cm. Wie lang sind sie?

3.61 Die Höhe h auf c teilt ein rechtwinkliges Dreieck in zwei Dreiecke. Für ihre Flächeninhalte gilt $A_1 : A_2 = 1:5$. Berechne h, wenn c = 20,0 cm ist.

3.62 Die Höhe eines Drehzylinders ist um 3 cm größer als der Radius. Die Oberfläche beträgt 378 π cm^2. Berechne die Höhe und den Radius des Zylinders!

3.63 Einem Viertelkreis (Abb. 3.20) mit dem Radius r = 12,0 cm ist ein Kreis eingeschrieben. Ermittle dessen Radius x (rechne zuerst allgemein!).

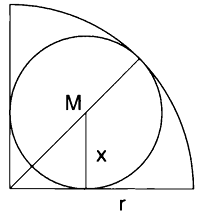


Abb. 3.20

3.64 Eine Hohlkugel aus Stahl (ϱ = 7,85 kg/dm^3) von 2,0 cm Wandstärke hat die Masse 24,5 kg. Wie groß ist ihr Außendurchmesser?

3.65 Ein Gefäß hat die Form eines Kegelstumpfes; der Durchmesser der Grundfläche beträgt 30 cm. Die Höhe des Gefäßes beträgt 3 dm. Wie groß ist der Durchmesser der Deckfläche, wenn das volle Gefäß 15 Liter fasst?

3.66 Statt eines Kunststoffzylinders (Radius r = 14,0 cm, Höhe h = 40,0 cm) soll ein Kegelstumpf gleicher Höhe und gleicher Grundfläche, aber nur mit 50% des Volumens des Zylinders hergestellt werden. Welchen Radius besitzt die kleinere Kreisfläche des Kegelstumpfes?

3.67 Aus einem rechteckigen Blechstück (Abb. 3.21) mit der Länge 120 cm und der Breite 100 cm wird durch Ausschneiden eines Rechtecks ein Rahmen gleicher Breite x gebildet. Der Flächeninhalt des Rahmens soll $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Blechfläche betragen. Berechne x!

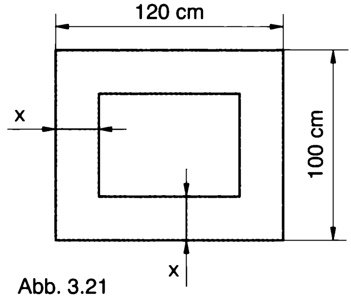


Abb. 3.21

Leistungsaufgaben

3.68 Zwei Elektriker benötigen zusammen 12 Tage für die Installation einer Werkshalle. Würde jeder allein arbeiten, so bräuchte der eine um 10 Tage länger als der andere. Wie lange würde jeder allein brauchen?

3.69 Zum Auspumpen eines Teiches stehen zwei Pumpen zur Verfügung. Die erste Pumpe benötigt für das Auspumpen 6 Stunden weniger als die zweite Pumpe. Wenn beide Pumpen gleichzeitig eingeschaltet sind, ist der Teich in 4 Stunden leer. Wie viele Stunden braucht die zweite Pumpe allein?

Bewegungsaufgaben

3.70 Ein LKW fährt vollbeladen eine Strecke von 680 km. Am Zielort wird er entladen und kehrt zum Ausgangsort mit einer um 15 km h^{-1} höheren mittleren Geschwindigkeit zurück. Die gesamte Fahrtdauer betrug 15 h 30 min. Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit zum Zielort?

3.71 Durch Verbesserungen im Fahrbetrieb konnte bei einer Autobuslinie des öffentlichen Verkehrs eine um 9 kmh^{-1} höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht werden. Dies bedeutet eine Zeitersparnis von 15 min auf einer Strecke von 45 km. Wie groß ist nun die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Autobusses?

3.72 Ein Boot fährt gleichmäßig eine Strecke von 40 km. Hätte es eine um 2 km/h höhere Geschwindigkeit gehabt, so wäre es um eine Stunde früher angekommen. Wie groß war seine Geschwindigkeit?

Physik und Technik

3.73 Zwei Messstationen A und B liegen 300 km entfernt (Abb. 3.22). Ein Messballon M soll Signale von beiden Stationen empfangen können. In welche Mindesthöhe muss er aufsteigen, wenn er

a) über der Mitte des Bogens zwischen A und B positioniert wird

b) senkrecht über A sein müsste? (Erdradius r = 6370 km)

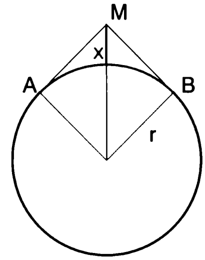


Abb. 3.22

3.74 Zwei Widerstände, die sich um 120 Ω unterscheiden, ergeben parallelgeschaltet einen Gesamtwiderstand von 63 Ω. Wie groß sind die Widerstände?

3.75 In einem Stromkreis mit der Spannung 180 V fließt bei Reihenschaltung zweier Widerstände ein Strom von 1 A, bei Parallelschaltung ein Strom von 4,5 A. Wie groß sind die Widerstände?

3.76 Ein Elektromotor, der eine Leistung von $P = 1{,}5$ kW aufnimmt, ist durch eine $l = 420$ m lange Leitung (Hin- und Rückleitung) aus Kupferdraht ($\varrho = 1{,}78 \cdot 10^{-8}$ Ωm) vom Querschnitt A = 4 mm² an eine Spannung $U = 230$ V angeschlossen. Berechne die auftretende Stromstärke I ! ($R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$, wobei ϱ der spezifische Widerstand ist.)

Hinweis: $U = \frac{P}{I} + R \cdot I$.

3.77 In der Schaltung der Abb. 3.23 soll der Widerstand R_x gleich groß sein wie der Gesamtwiderstand der Schaltung. Berechne R_x, wenn R gegeben ist.

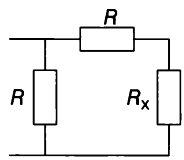


Abb. 3.23

3.78 Zur Bestimmung der Tiefe eines Brunnens wird ein Stein in den Brunnen geworfen. Nach 4 Sekunden hört man ihn im Wasser aufschlagen. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit ca. 340 ms^{-1}, Fallbeschleunigung rund 10 ms^{-2}).

Hinweis: Fallweg $\frac{1}{2} \cdot g\,t^2$ des Steines (t Fallzeit des Steines) = Rückweg des Schalles.

3.79 Ein 20 m langes Seil ist an zwei gleich hohen Masten so befestigt, dass ein Ende des Seiles 1 m unter der Spitze des ersten Masten, das andere Ende an der Spitze des zweiten Masten angebracht ist. Der Abstand der beiden Masten beträgt 18 m. In einer waagrechten Entfernung von 6 m vom ersten Masten hängt eine Lampe am Seil. Um wie viel liegt der Aufhängepunkt unter der Höhe der Masten?

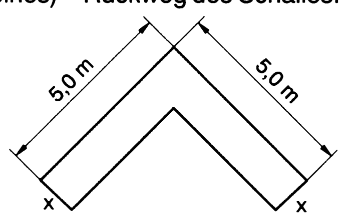


Abb. 3.24

3.80 Ein Sonnenkollektor auf dem Dach eines Hauses hat die Form der Abb. 3.24. Zur Deckung des Energiebedarfs wird eine Kollektorfläche von 15 m² angestrebt. Wie groß muss x gewählt werden?

3.81 Ein zylindrischer Kessel (Abb. 3.25) wird so gelagert, dass er zugleich den Boden und die Wand berührt. Ermittle den Radius x des größten Rohres, das im Raum zwischen Boden, Wand und Kessel Platz findet.

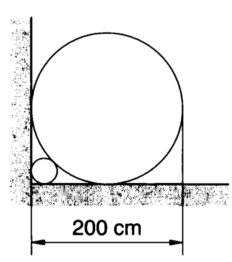


Abb. 3.25

3.82 Bei der *Härteprüfung nach Brinell* (Abb. 3.26) wird die Eindrucktiefe h einer kleinen Stahlkugel vom Durchmesser D in einem Werkstoff berechnet. Dazu wird der Durchmesser d des Eindruckkreises gemessen. Berechne h, wenn $D = 10$ mm und $d = 5$ mm ist.

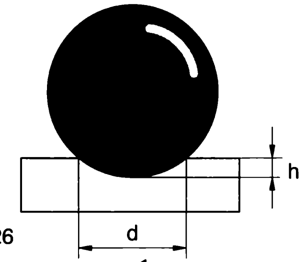


Abb. 3.26

3.83 Ein rechteckiges Stück Blech soll seitlich nach Abb. 3.27 derart senkrecht aufgebogen werden, dass eine Ablaufrinne mit dem Querschnitt A gebildet wird. Berechne x, wenn A = 150,0 cm^2! Für welchen Wert von x ist A am größten?

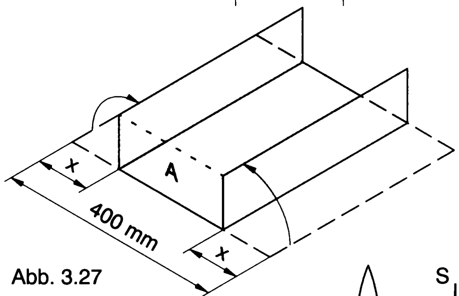


Abb. 3.27

3.84 Eine Lichtquelle L (Abb. 3.28) befindet sich im Abstand 180 cm von einem Schirm. In welcher Entfernung b vom Schirm muss eine Sammellinse mit der Brennweite $f = 40$ cm eingeschoben werden, damit sich die Lichtquelle deutlich am Schirm abbildet?

Hinweis: $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

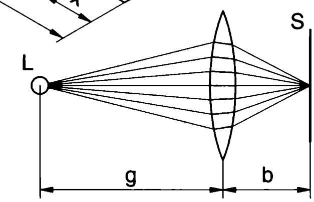


Abb. 3.28

3.85 Aus einem rechteckigen Blech mit den Seiten a = 50 mm und b = 64 mm sollen nach Abb. 3.29 zwei kreisrunde Flächen ausgeschnitten werden. Berechne den Radius x, wenn r = 18 mm ist.

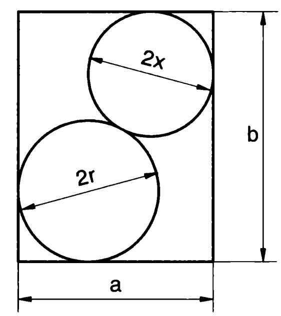


Abb. 3.29

3.86 Vier gleich starke Kabelleitungen (Abb. 3.30) sollen durch ein Rohr vom Durchmesser $D = 80$ mm geschützt werden. Wie groß darf der Durchmesser d der Kabeln höchstens sein? Führe die Rechnung zuerst allgemein durch und dann mit den angegebenen Maßen.

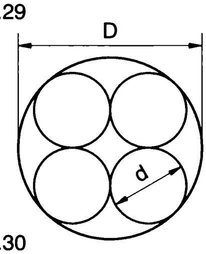


Abb. 3.30

3.87 Von zwei Glühlampen, die einen gegenseitigen Abstand von 12 m haben, ist die Lichtstärke der ersten viermal so groß wie die der zweiten. Gesucht ist jener Punkt zwischen den beiden Glühlampen, in dem die Beleuchtungsstärke von beiden Lampen gleich groß ist.
Hinweis: Beleuchtungsstärke $E = I/r^2$, wobei I die Lichtstärke und r der Abstand von der Lichtquelle ist.

3.88 Ein PKW wird durch ein plötzlich auftauchendes Hindernis zu einer *Vollbremsung* (Bremsung mit voller Kraft) bis zum Stillstand gezwungen. Der gesamte Anhalteweg s (Abb. 3.31) setzt sich aus drei Abschnitten zusammen: auf dem Reaktionsweg s_R fährt der PKW ungebremst weiter, auf dem Bremsschwellweg s_S beginnen die Bremsen zu wirken und erst auf dem Vollbremsweg s_V wird die volle Bremswirkung erreicht.

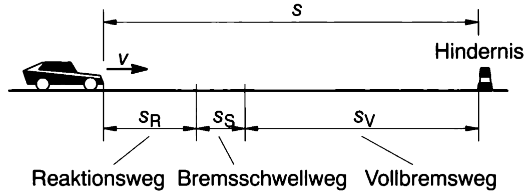


Abb. 3.31

Wir treffen folgende Modellannahmen:
Reaktionszeit: 0,8 s, Bremsschwellzeit: 0,2 s;
a ... (gleichmäßige) Verzögerung auf dem Vollbremsweg,
$\frac{a}{2}$ ... (gleichmäßige) Verzögerung auf dem Bremsschwellweg.

Dann lässt sich für den Anhalteweg s ableiten: $s = v - \frac{a}{100} + \frac{1}{2a}\left(v - \frac{a}{10}\right)^2$, wobei v die Maßzahl der PKW-Geschwindigkeit in m/s und a die Maßzahl der Verzögerung in m/s² ist.
Es ist nebelig und die Sichtweite beträgt nur 80 m. Berechne in diesem Fall die höchstmögliche Geschwindigkeit, die ein Anhalten vor einem plötzlich auftauchenden Hindernis ermöglicht, wenn folgende Verzögerungen in m/s² bestehen:

a) $a = 7{,}5$ (trockene Straße) **b)** $a = 5{,}5$ (nasse Straße) **c)** $a = 1$ (Eis)
d) Wie groß ist die Verzögerung, wenn bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h der Anhalteweg 80 m ist?

3.89 Der Kraftstoffverbrauch eines PKW ist in guter Näherung eine quadratische Funktion der Fahrgeschwindigkeit. Für einen Klein-PKW einer bestimmten Automarke gibt die folgende Formel den Zusammenhang zwischen dem Benzinverbrauch y (in Liter je 100 km) und der Geschwindigkeit v (zwischen 50 km/h und 140 km/h) an:
$y = 0{,}00059 \cdot v^2 - 0{,}048 \cdot v + 5{,}5$.
a) Berechne den Benzinverbrauch bei $v = 130$ km/h.
b) Bei welcher Geschwindigkeit wird gegenüber a) eine 20%-ige Verringerung des Benzinverbrauchs erreicht?

3.90 Ein Ball wird mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20\ \text{ms}^{-1}$ aus einer Höhe $H = 2$ m zum Zeitpunkt $t = 0$ s senkrecht nach oben geworfen. ($g \approx 10\ \text{ms}^{-2}$)
Hinweis: Die Höhe h zur Zeit t errechnet sich zu $h = H + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$; $g \approx 10\ \text{ms}^{-2}$.
a) Welche maximale Höhe erreicht der Ball? **b)** Wann erreicht der Ball den Boden?

3.91 Ein Schlagball wird aus einer Höhe H schräg nach oben geworfen, wobei für die Gleichung der Flugbahn in einem Koordinatensystem gemäß Abb. 3.32 gilt:
$h = -\frac{x^2}{80} + x + H$ (dies bedeutet eine Abwurfgeschwindigkeit $v_0 = 20\ \text{ms}^{-1}$ unter einem Abwurfwinkel von 45°).

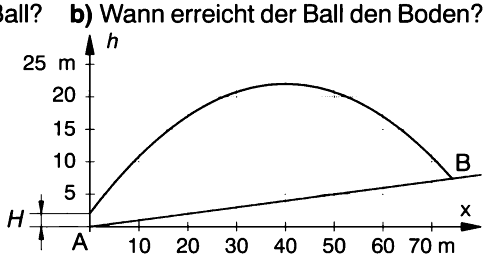


Abb. 3.32

a) Berechne für ein ebenes Gelände die maximale Flughöhe und die Wurfweite, wenn $H = 2$ m (10 m) ist.
b) Berechne (Abb. 3.32) die Wurfweite $\overline{AB}$ bei $H = 2$ m, wenn das Gelände an der Abwurfstelle eine gleichmäßige Steigung von 10% quer zur Wurfbahnebene besitzt.

Wirtschaftsmathematische Aufgaben

3.92 Ermittle rechnerisch die Gewinngrenzen im Beispiel 3.9 sowie in den Aufgaben 3.18, 3.19 und 3.20.

3.93 Gegeben ist, jeweils in Euro, die Kostenfunktion $K(x) = 1000 + 16x$ und die Erlösfunktion $E(x) = -0{,}2x^2 + 70x$ für einen Artikel mit der produzierten und verkauften Stückzahl x. Wie groß muss x sein, damit der Gewinn mindestens 2400 Euro ausmacht?

3.94 Ein Sportartikelhersteller verkauft pro Monat durchschnittlich 500 Tennisschläger eines bestimmten Typs zu einem Stückpreis von 200 Euro. Aufgrund einer Marktuntersuchung schätzt man, dass jede Preisreduktion um 1 Euro pro Tennisschläger den Absatz um zusätzlich 5 Stück steigert. Gibt es eine Preisreduktion, bei der eine monatliche Umsatzsteigerung von 10% erreichbar ist? Was ist der maximal erreichbare monatliche Umsatz?

3.95 In einem Betrieb werden u.a. Fahrräder eines speziellen Typs hergestellt. Pro Fahrrad werden Herstellungskosten von 120 Euro bei wöchentlichen Fixkosten von 1500 Euro veranschlagt. Die pro Woche verkaufte Stückzahl x fällt mit dem Stückpreis p näherungsweise nach der Beziehung $x = -0{,}2p + 140$. Ermittle die Gewinngrenzen! Welche Stückzahlen geben einen Mindestgewinn von 10000 Euro? Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn maximal?

Verschiedenes

3.96 Bei einem Tennisturnier spielte von allen Teilnehmern jeder einmal gegen jeden. Es wurden insgesamt 28 Spiele ausgetragen. Wie viele Spieler nahmen teil?

3.97 Ein Betrag von 4000 Euro soll in Form von gleich großen Erfolgsprämien auf eine gewisse Anzahl von Mitarbeitern aufgeteilt werden. Nach einer genaueren Überprüfung werden jedoch zwei dieser Mitarbeiter als nicht prämienberechtigt wieder ausgeschieden. Dadurch erhält jeder Mitarbeiter um 100 Euro mehr, als ursprünglich vorgesehen war. Wie viele Mitarbeiter erhalten die Prämie?

3.98 Eine Gruppe von Schülern soll für eine Reise insgesamt 720 Euro bezahlen. Da noch drei weitere Schüler teilnehmen wollen, verringert sich der finanzielle Beitrag jedes Schülers um 40 Euro. Wie viele Schüler nehmen an der Reise teil?

3.99 Eine Straßenverwaltung legt für den Winter ein Depot von 480 t Streusand an, wobei sie mit einer bestimmten Anzahl von Streutagen mit gleicher täglicher Streumenge rechnet. Vorsichtshalber wird dann aber doch mit 10 Streutagen mehr gerechnet als ursprünglich geplant. Deshalb muss die tägliche Streumenge um 4 Tonnen gesenkt werden. Welche tägliche Streumenge war ursprünglich vorgesehen?

3.100 Zwei Gruppen A und B entsorgten rund um einen Freizeitpark Müll. Die Gruppe A, in der sich um zwei Personen mehr befanden, sammelte durchschnittlich pro Kopf um 10 kg mehr als die Personen in der Gruppe B. Die Gruppe A brachte es auf 700 kg und die Gruppe B auf 480 kg Müll. Wie viele Personen waren in jeder Gruppe?

4 Exponentialfunktionen

4.1 Einführung

Wir haben bisher Potenzen nur für rationale Hochzahlen definiert und stellen nun die Frage, was eine Potenz mit einer irrationalen Hochzahl, also etwa 2^{π}, bedeuten könnte. Es ist naheliegend, darunter jene "Zahl" zu verstehen, die durch $2^{3,14}$ oder genauer durch $2^{3,14159}$ genähert wird. Man kann zeigen, dass eine solche Zahl tatsächlich existiert und dass für solche Potenzen mit irrationalen Hochzahlen auch die bekannten Potenzgesetze gelten.

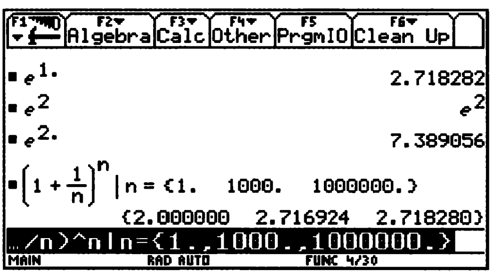
Beispiel 4.1: Einführendes Beispiel – Barometrische Höhenformel

Der Luftdruck p der Atmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe h ab. Dies lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen durch die sogenannte barometrische Höhenformel $p = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$ (h in Meter, p in mbar) beschreiben, wobei $p_0 = 1013$ mbar und $H = 7991$ m sind. Stelle den Luftdruck p als Funktion von h graphisch dar.

Lösung

Durch diese sogenannte barometrische Höhenformel ist der Luftdruck p als Funktion der Höhe h ($h \geqslant 0$ m) gegeben. Die Basis e der Potenz in dieser Formel wird **Euler'sche Zahl**[5] genannt. Ihren Wert kann man annähernd mit dem Taschenrechner ermitteln: e = 2,7182818 ... ≈ 2,72. Die Euler'sche Zahl e ist eine für die Theorie wie für Anwendungen gleichermaßen wichtige Zahl. Wie π ist auch e eine unendliche Dezimalzahl, die nicht periodisch ist, also eine irrationale Zahl. Ihre Berechnung erfolgt in "Ingenieur-Mathematik 3".

Voyage 200



Die Zahl e erhält man durch 2ND LN 1 ·) ENTER oder durch 2ND LN 1) ◆ ENTER .

Entsprechend geht man bei anderen Hochzahlen vor.

Setzt man in den Term $(1 + \frac{1}{n})^n$ für n immer größer werdende natürliche Zahlen ein, so kann man der Eulerschen Zahl e beliebig nahe kommen.

---

5 Leonhard EULER (1707 – 1783), Schweizer Mathematiker

Wir haben hier eine Potenz mit fester Basis (nämlich e) vor uns, deren Exponent jedoch veränderlich ist. Abb. 4.1 zeigt den Graphen der Funktion.

h in m	*p* in mbar
0	1013
5000	542
10000	290
15000	155
20000	83

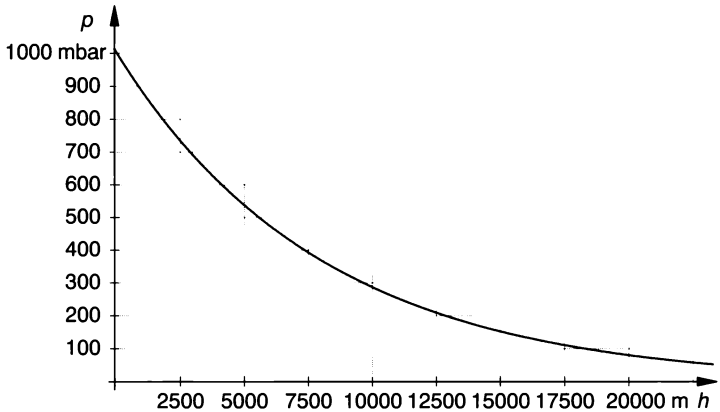


Abb. 4.1 Druckabnahme mit der Höhe

Funktionen der eben besprochenen Art treten in den Anwendungen häufig auf (siehe Abschnitt 4.2). Zuvor soll jedoch diese neue Funktionsart genauer betrachtet werden. Wir definieren:

> Eine Funktion mit der Gleichung $y = a^x$ $(a > 0$ und $a \neq 1)$, $x \in \mathbb{R}$, heißt eine **Exponentialfunktion** mit der Basis a.

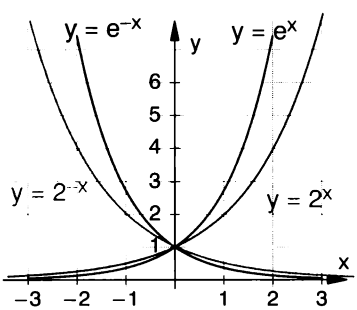


Abb. 4.2 Graphen von Exponentialfunktionen

Abb. 4.2 zeigt Graphen von Exponentialfunktionen

Da $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1^x}{a^x} = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$, ist auch die Gleichung $y = a^{-x}$ eine Exponentialfunktion. Ihr Graph liegt zu jenem von $y = a^x$ spiegelbildlich bezüglich der y-Achse.

! Beachte den Unterschied zwischen einer Potenzfunktion und einer Exponentialfunktion!

Potenzfunktionen: $y = x^2$, $y = x^5$, $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, ...

Exponentialfunktionen: $y = 2^x$, $y = 5^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = e^{-x}$, ...

In allen Fällen kommen Potenzen vor. Worin liegt der Unterschied?

Charakteristische Eigenschaft einer Exponentialfunktion (Modellvorstellung)

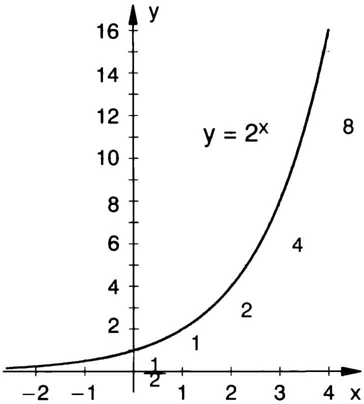


Abb. 4.3 Charakteristische Eigenschaft einer Exponentialfunktion

Die Funktionswerte y (Abb. 4.3) der Funktion $y = 2^x$ nehmen bei einer *gleich* bleibenden Schrittweite $\Delta x = 1$ stets um den Faktor 2 zu; d.h. die Stufenhöhen Δy verdoppeln sich bei jedem Schritt der Länge 1.

Hat man allgemein eine Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 1)$, so nimmt y bei *gleichen* Schrittweiten Δx stets um das *gleiche Vielfache* des jeweiligen Anfangswertes zu (konstante Zuwachsrate).

Dagegen stellen die y-Werte bei $y = a^{-x}$ $(a > 1)$ bei *gleichen* Schrittweiten Δx stets den *gleichen Bruchteil* des jeweiligen Anfangswertes dar. Ist dies die Hälfte, so heißt eine solche Schrittweite **Halbwertszeit**, wenn x die Bedeutung einer Zeit hat.

Bestimme den Bruchteil des Vorwertes, auf den die Luftdruckwerte in Beispiel 4.1 bei Höhenzunahmen $\Delta h = 500$ m abnehmen!

Wir fassen zusammen:

Eigenschaften von Exponentialfunktionen:

1. Sie sind für beliebige Werte $x \in \mathbb{R}$ erklärt.
2. Ihre Funktionswerte y sind stets positiv, können aber beliebig klein werden. Das bedeutet: Ihre Graphen nähern sich der x-Achse beliebig, ohne sie zu berühren oder gar zu schneiden. Man sagt: Die x-Achse ist **Asymptote** dieser Graphen.
3. Ist $a > 1$, so ist die Exponentialfunktion
   $y = a^x$ überall **streng monoton steigend**,
   $y = a^{-x}$ überall **streng monoton fallend**.
   Verdopplung bzw. *Halbierung* erfolgt bei stets *gleicher Zunahme* Δx.
4. Die Graphen aller Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt P(0/1), da $a^0 = 1$ ist.
5. Die Graphen der Funktionen $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ $(a > 1)$ liegen symmetrisch zur y-Achse.

Monoton steigende Funktionen im Vergleich

Wir vergleichen für $x \geqslant 0$ die lineare Funktion $y = 1{,}2x$ und die Exponentialfunktion $y = 1{,}2^x$. Aus Abb. 4.4 erkennt man: Die Exponentialfunktion wächst zunächst nur langsam und bleibt hinter der linearen Funktion zurück. Bald übersteigt sie jedoch "explosionsartig" die lineare Funktion.

Eine Exponentialfunktion (mit $a > 1$) übertrifft nicht nur jede lineare Funktion noch so großer Steigung, sondern schließlich auch jede Potenzfunktion $y = x^n$ mit noch so großer positiver Hochzahl, etwa $y = x^3$ oder $y = x^{20}$.

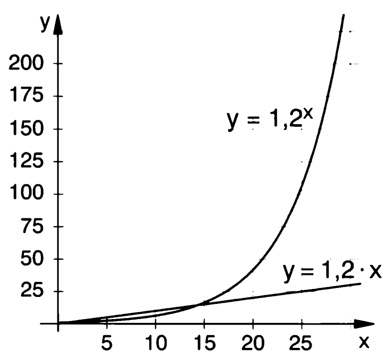


Abb. 4.4 Lineares und exponentielles Ansteigen

4.2 Anwendungsbeispiele

Beispiel 4.2 : Radioaktiver Zerfall

Für den radioaktiven Zerfall gilt: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, wobei λ die sogenannte Zerfallskonstante in s^{-1} ist. N_0 ist die zum Zeitpunkt $t = 0$ s vorhandene Anzahl zerfallsfähiger Kerne und $N(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch vorhandenen Kerne.

Jod 131 hat eine Zerfallskonstante $\lambda = 1 \cdot 10^{-6} s^{-1}$. Ursprünglich sind 10^{10} Kerne vorhanden.

a) Stelle die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne als Funktion der Zeit t in Tagen dar.

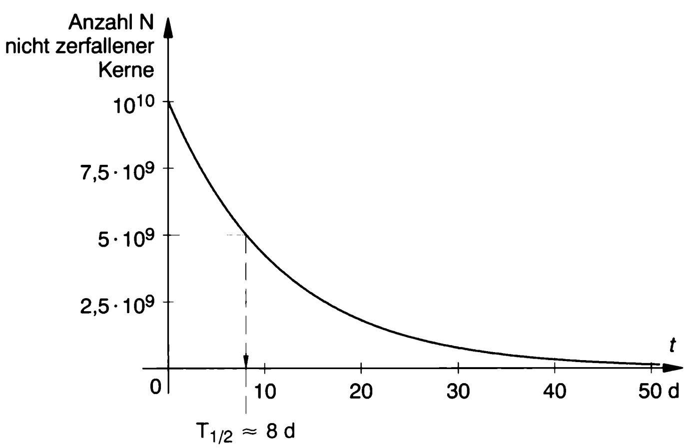
b) Bestimme graphisch die Halbwertszeit $T_{1/2}$ in Tagen (also jene Zeitspanne, in der sich die Anzahl der zerfallsfähigen Kerne halbiert).

Lösung

Die Werte N(t) können nur natürliche Zahlen 0,1,2,... sein. Die Funktionswerte der Zerfallsfunktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ sind zu einem bestimmten Zeitpunkt jedoch im allgemeinen keine natürlichen Zahlen. Trotzdem beschreibt diese "stetige" Funktion (ihr Graph lässt sich als durchgehende Linie zeichnen) wegen der großen Anzahl von Kernen den Zerfallsprozess ausreichend genau.

$\lambda = 1 \cdot 10^{-6} s^{-1} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 3600 \cdot 24\ d^{-1} = 0{,}0864\ d^{-1} \approx 0{,}086\ d^{-1}$.

t in Tagen	$N = 10^{10} \cdot e^{-0{,}086 \cdot t}$
0	10^{10}
10	$4{,}21 \cdot 10^{10}$
20	$1{,}78 \cdot 10^{9}$
30	$0{,}75 \cdot 10^{9}$
40	$0{,}32 \cdot 10^{9}$
50	$0{,}13 \cdot 10^{9}$



Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist der t-Wert zu $N = 5 \cdot 10^9$. Man liest $T_{1/2} \approx 8$ Tage ab. Alle 8 Tage halbiert sich die Anzahl der noch nicht zerfallenen Jod 131-Kerne.

Beispiel 4.3 : Einschaltstrom eines Gleichstromkreises

Ein Gleichstromkreis (Abb. 4.5) mit der konstanten Spannung $U = 24$ V enthält eine Spule der Induktivität $L = 0{,}06$ H (Henry) und einen Ohm'schen Widerstand $R = 8\ \Omega$; er wird zum Zeitpunkt $t = 0$ s geschlossen.
Dann gilt für die Stromstärke i für

$t \geqslant 0$ s: $i = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $\tau = \frac{L}{R}$.

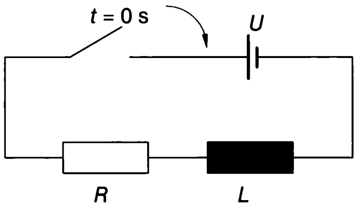


Abb. 4.5

a) Stelle den Einschaltstrom i als Funktion der Zeit graphisch dar.

b) Wann erreicht der Strom 90% des Endwertes $\frac{U}{R}$?

Lösung

$\tau = \frac{0{,}06}{8}$ s = 0,0075 s = 7,5 ms; τ wird Zeitkonstante genannt.

Zu **a)** $i = \frac{24}{8} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}0075\text{s}}}\right)$

t in ms	i in A
0	0
5	1,46
10	2,21
25	2,89
30	2,95
35	2,97
40	2,99

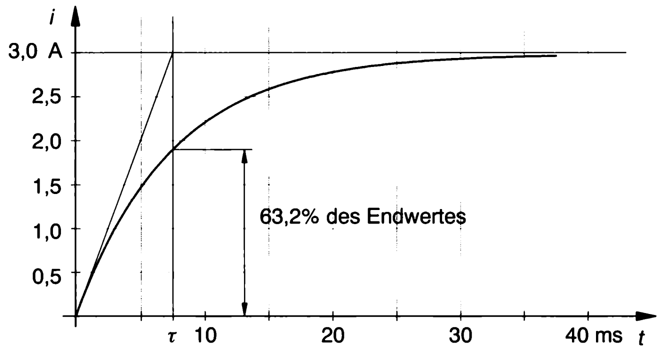


Abb. 4.6 Einschaltstrom

Abb. 4.6 zeigt den Funktionsgraphen. Der Endwert $\frac{U}{R} = 3{,}0$ A wird theoretisch nur asymptotisch erreicht. Zum Zeitpunkt $\tau = \frac{L}{R}$ ist $\frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}632 \cdot \frac{U}{R} = 1{,}90$ A, also 63,2% des Endwertes.

Anmerkung: Zeichnet man im Koordinatenursprung die Tangente an den Funktionsgraphen, so schneidet diese die Gerade $i = \frac{U}{R}$ an der Stelle τ. Die Begründung dafür kann erst im nächsten Band gegeben werden.

Zu **b)** 90% von 3,0 A sind 2,7 A.

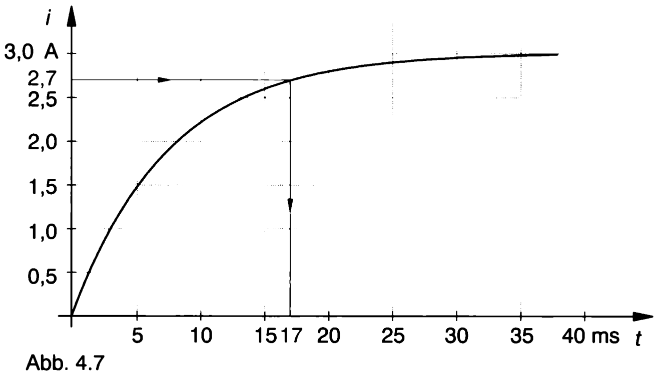


Abb. 4.7

Steht kein graphikfähiger Taschenrechner zur Verfügung, so kann man die gesuchte Zeit näherungsweise auch aus der Graphik ermitteln (Abb. 4.7).

Man erhält: Nach der Zeit $t = 17$ ms beträgt die Einschaltstromstärke $i = 2{,}7$ A.

Die rechnerische Ermittlung folgt im Kapitel 4.4.1 (Exponentialgleichungen).

MC

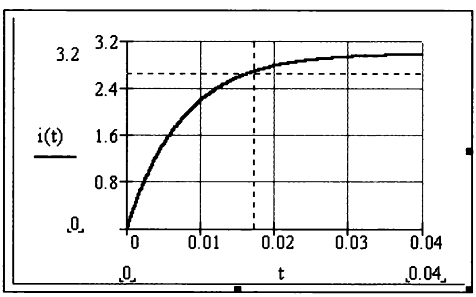
$U := 24\ \mathrm{V}$ $\quad R := 8\ \Omega$ $\quad L := 0.06\ \mathrm{H}$ $\quad \tau := \frac{L}{R}$

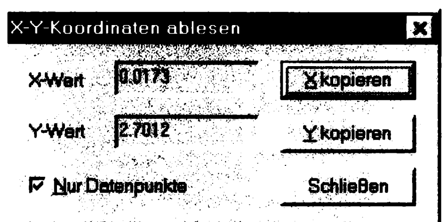
Definition der Einheit 1 ms: $\mathrm{ms} := 10^{-3}\ \mathrm{s}$

$t := 0\ \mathrm{ms},\ 5\ \mathrm{ms} \ldots 30\ \mathrm{ms}$ $\qquad i(t) := \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

t =		i(t) =	
0	ms	0	A
5		1,46	
10		2,209	
15		2,594	
20		2,792	
25		2,893	
30		2,945	

$t := 0\ \mathrm{ms},\ 0.1\ \mathrm{ms} \ldots 40\ \mathrm{ms}$ $\qquad$ Schrittweite auf 0,1 ms verkleinert





Klickt man mit der rechten Maustaste in das Diagramm, so kann man mit dem Befehl "Koordinaten ablesen" den Fadenkreuz-Cursor mit einer Schrittweite 0,1 ms so lange bewegen, bis man dem y-Wert = 2,7 am Nächsten liegt.
Mit der Schaltfläche "X kopieren" kann der gesuchte x-Wert (eigentlich t-Wert) in die Zwischenablage kopiert und anschließend in das Dokument eingefügt werden: $t_0 := 0.0173$.

Beispiel 4.4 : Newton'sches Abkühlungsgesetz

Ein Körper der Temperatur $\vartheta_0 = 127°C$ wird ab dem Zeitpunkt $t = 0$ s abgekühlt. Dann gilt für die Temperatur ϑ zu einem Zeitpunkt $t \geqslant 0$ s das Newton'sche Abkühlungsgesetz:

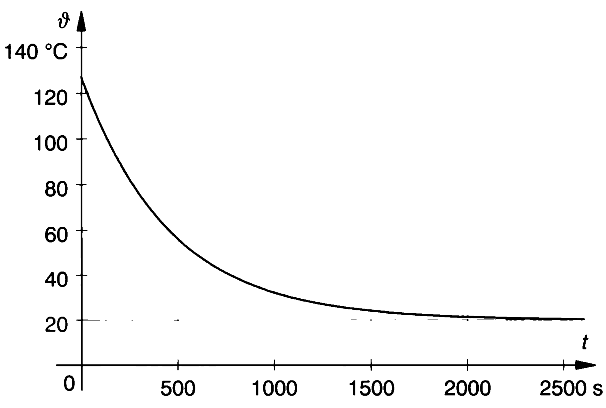
$\vartheta = \vartheta_K + (\vartheta_0 - \vartheta_K)e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Dabei ist ϑ_K die Kühlmitteltemperatur (Umgebungstemperatur). Stelle den Temperaturverlauf ϑ des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar, wenn $\vartheta_K = 20$ °C und $\tau = 460$ s (wieder Zeitkonstante genannt) ist.

Lösung

Nach dem Einsetzen erhält man $\vartheta = 20 + 107 \cdot e^{-\frac{t}{460s}}$.

t in s	ϑ in °C
0	127
250	82,1
500	56,1
1000	32,2
1500	24,1
2000	21,4
2500	20,5



Mit zunehmender Zeit t nähert sich die Körpertemperatur ϑ, beginnend mit $\vartheta_0 = 127$ °C, beliebig der Kühlmitteltemperatur $\vartheta_K = 20$ °C. Man sagt auch, dass die Körpertemperatur exponentiell auf die Kühlmitteltemperatur abklingt.

Beispiel 4.5 : Aperiodische Schwingung

Zeichne für $t \geqslant 0$ s den mechanischen Schwingungsvorgang, der durch die Gleichung $y(t) = 6\left(e^{-0,5t} - e^{-1,8t}\right)$ beschrieben wird (y in cm, t in s).

Lösung

Man spricht hier von einer aperiodische Schwingung. Eine solche tritt auf, wenn ein schwingungsfähiges System durch zu große Dämpfung keine eigentliche Schwingung mehr um seine Gleichgewichtslage ausführen kann (Abb. 4.8). Im Beispiel 4.5 ist der Schwingungsvorgang eines Körpers beschrieben, der aus seiner Gleichgewichtslage ausschwingt und dann in diese asymptotisch zurückkehrt.

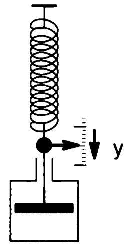


Abb. 4.8 Gedämpfte Schwingung

t in s	y(*t*) in cm
0	0
1	2,65
2	2,04
3	1,31
4	0,81
5	0,49
6	0,30
7	0,18
8	0,07

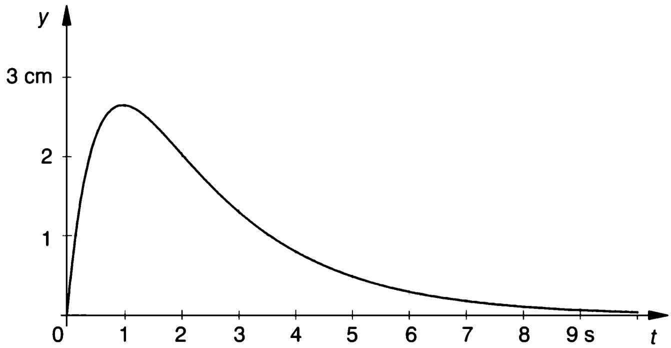


Abb. 4.9 Aperiodische Schwingung

Hinweis: Beim Zeichnen solcher Funktionen mit Hilfe einer Wertetabelle wird es im Allgemeinen Probleme geben, da man z.B. das Maximum der Funktion nicht genau ermitteln kann.

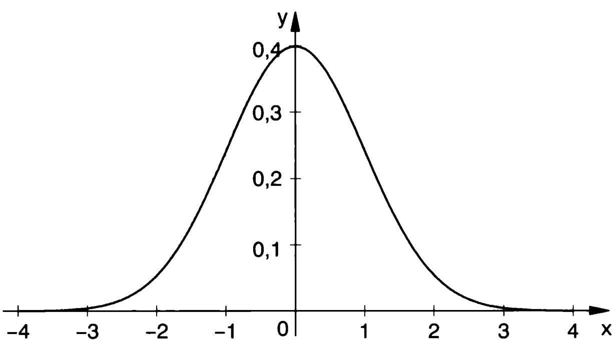
Beispiel 4.6 : Gauß'sche Glockenkurven

Gauß'sche Glockenkurven sind grundlegend in der Statistik. Ein Beispiel einer solchen Kurve ist jene mit der Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Stelle diese Funktion für $-4 \leqslant x \leqslant 4$ graphisch dar.

Lösung

Die Funktion ist gerade (Seite 7), weil f(−x) = f(x). Es genügt daher, die Wertetabelle für Punkte mit $x \geqslant 0$ aufzustellen.

x	y
0	0,399
1	0,242
2	0,054
3	0,004
4	0,000



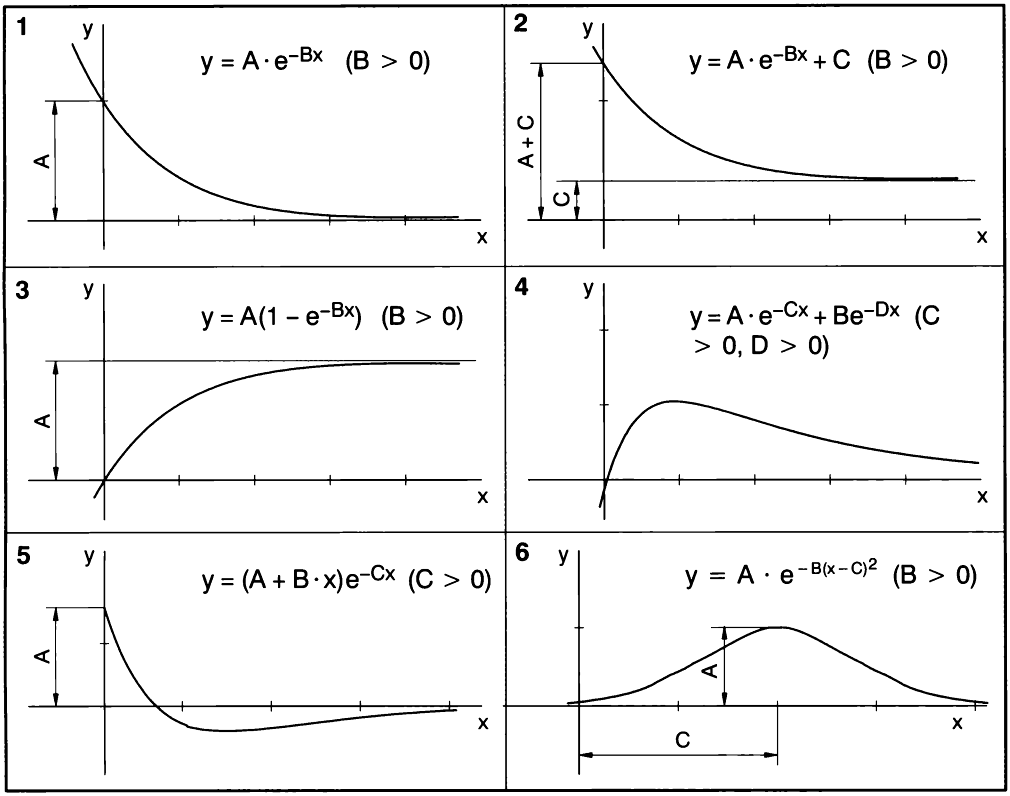


Abb. 4.10 Funktionstypen unter Verwendung von Exponentialgleichungen

Abb. 4.10 zeigt zusammenfassend häufig auftretende Funktionstypen, bei denen Exponentialfunktionen vorkommen. Bis auf die Gauß'schen Glockenkurven werden sie aus sachlichen Gründen in der Regel nur für $x \geqslant 0$ betrachtet:

- **Abklingfunktionen:**

  Beispiele: Barometrische Höhenformel, radioaktiver Zerfall, Entladung eines Kondensators (1. Fenster, Abklingen auf null)

  Newton'sches Abkühlungsgesetz (2. Fenster, Abklingen auf einen Wert $C \neq 0$)

  Ist die unabhängige Variable die Zeit, so wird $\tau = 1/B$ Zeitkonstante genannt.

- **Sättigungsfunktionen:**

  Beispiele: Einschaltstrom in einem Gleichstromkreis, Aufladung eines Kondensators, Erwärmung von Motoren (3. Fenster).

  Gewöhnlich ist die unabhängige Variable die Zeit t. A ist dann der Sättigungswert, $\tau = 1/B$ wird wieder Zeitkonstante genannt. Zur Zeit $t = \tau$ ist ca. 63% des Sättigungswertes A erreicht, nach drei Zeitkonstanten etwa 95% und nach 5 Zeitkonstanten ist 99,3% des Sättigungswertes erreicht; danach kann der Sättigungswert in der Praxis als erreicht betrachtet werden.

  Aperiodische Schwingungsvorgänge: Mechanische oder elektromagnetische Schwingungsvorgänge bei starker Dämpfung (4. und 5. Fenster).

- **Gauß'sche Glockenkurven** (6. Fenster).

In den Beispielen 4.1 bis 4.6 war die Basis der auftretenden Exponentialfunktion immer die Euler'sche Zahl e. Gelegentlich werden in der Praxis auch andere Basen verwendet.

Beispiel 4.7: Vermehrung von Bakterien – exponentieller Wachstumsprozess

Eine Bakterienkultur von $N_0 = 1000$ Bakterien zur Zeit $t = 0$ h verdreifacht sich innerhalb einer Stunde. Stelle den Wachstumsprozess für die ersten 4 Stunden **a)** in einer Tabelle, **b)** durch eine Gleichung und **c)** graphisch dar!

Lösung

Zu **a)** Von einer Stunde zur anderen nehmen die Bakterien auf das jeweils Dreifache zu.

t in h	0	1	2	3	4
N	1000	3000	9000	27000	81000

Zu **b)** Die Funktionswerte nehmen bei gleichen Zunahmen $\Delta t = 1$ h um den *gleichen* Faktor zu. Dies ist die charakteristische Eigenschaft einer Exponentialfunktion $y = a^x$ mit $a > 1$. In unserem Fall ist $a = 3$; da zur Zeit $t = 0$ h der Funktionswert $N_0 = 1000$ ist, lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $N = N_0 \cdot 3^t = 1000 \cdot 3^t$.

Wir werden im anschließenden Abschnitt erfahren, wie man die Potenz 3^t in eine Potenz mit der Basis e umschreiben kann.

Zu **c)**

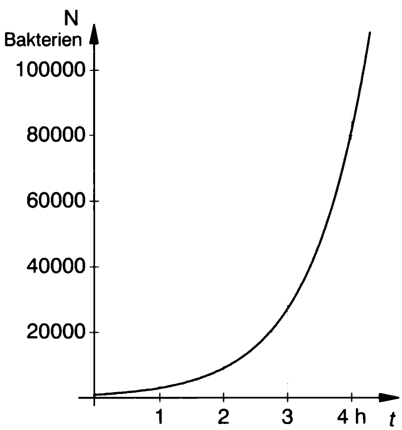


Abb. 4.11 Exponentielles Wachstum

Wie beim radioaktiven Zerfall wird auch hier die gesuchte Funktion, die nur natürliche Werte annehmen kann, einfacher und dabei ausreichend genau durch eine "stetige" Funktion beschrieben.

Das Modell einer exponentiellen Vermehrung (bei Bakterien und dgl.) beschreibt das Wachstum realistisch – wenn überhaupt – nur am Anfang. Durch Nahrungsmangel, Krankheiten und andere hemmende Einflüsse wird auch bei einem anfänglich exponentiellen Anstieg das Wachstum schließlich immer geringer. Es stellt sich ein Sättigungswert ein.

Beispiel 4.8: Abkühlung einer Probe – Abnahmeprozess

Eine Probe der Temperatur 200°C wird in Wasser von 0°C gekühlt. Während des Kühlvorganges wird im Minutenabstand die Temperatur ϑ gemessen (siehe Tabelle).

a) Es wird ein exponentielles Abnehmen der Probentemperatur ϑ mit der Zeit *t* vermutet. Kann dies experimentell bestätigt werden?

t in min	0	1	2	3	4	5	6
ϑ in °C	200	140	98,5	69	47,5	33,8	23,3

b) Stelle die Funktion graphisch dar!

Lösung

Zu **a)** Wir betrachten immer den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Temperaturpaare. Wenn ein exponentieller Zusammenhang besteht, so muss der Quotient, wegen der gleichen Schrittweite, konstant bleiben.

$\frac{140}{200} = 0{,}7$; $\frac{98{,}5}{140} = 0{,}703 \approx 0{,}7$; $\frac{69}{98{,}5} = 0{,}700 \approx 0{,}7$;
$\frac{47{,}5}{69} = 0{,}688 \approx 0{,}7$; $\frac{33{,}8}{47{,}5} = 0{,}711 \approx 0{,}7$; $\frac{23{,}3}{33{,}8} = 0{,}689 \approx 0{,}7$.

Nimmt man an, dass die Ungleichheiten der Quotienten nur auf ungenauen Temperaturangaben beruhen, so kann eine exponentielle Abnahme angenommen werden. Auf Zehntel gerundet sind die Quotienten bei $\Delta t = 1$ min gleich 0,7; d.h. die Basis der Exponentialfunktion ist 0,7. Da zum Zeitpunkt $t = 0$ min die Temperatur der Probe gleich 200°C ist, lautet die Gleichung der Exponentialfunktion $\vartheta = 200°\text{C} \cdot 0{,}7^t$ (t in Minuten).

Zu **b)**

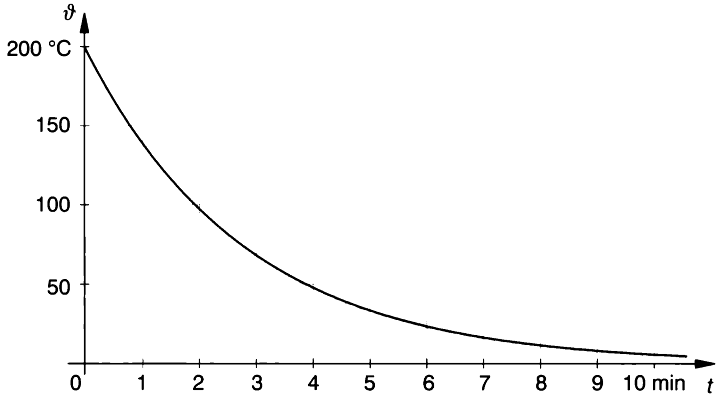


Abb. 4.12 Exponentieller Abnahmeprozess

Im Überblick: Exponentialfunktionen

Eine Funktion mit der Gleichung $y = a^x$ ($a > 0$ und $a \neq 1$), $x \in \mathbb{R}$, heißt **Exponentialfunktion** mit der Basis a. Besonders häufig wird als Basis die **Euler'sche Zahl e** $\approx 2{,}718$ verwendet.
Exponentialfunktionen sind für **beliebige Werte** $x \in \mathbb{R}$ erklärt. Ihre Funktionswerte y sind **stets positiv**, können aber beliebig klein werden.
Ist $a > 1$, so ist die Exponentialfunktion $y = a^x$ überall **streng monoton steigend**, $y = a^{-x}$ überall **streng monoton fallend**.
Verdoppelung bzw. *Halbierung* erfolgt bei stets *gleichen* Änderungen Δx.
Die Graphen aller Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt P(0/1), da $a^0 = 1$ ist. Die Graphen der Funktionen $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) liegen symmetrisch zur y-Achse.

Aufgaben

4.1 Beim Einschalten eines elektrischen Gerätes ($t = 0$ s) steigt die Stromstärke i nach der Gleichung $i = 0{,}50 \cdot (1 - 0{,}55^t)$ A an.

a) Zeichne den Graphen der Funktion bis $t = 10$ s mit Hilfe einer Wertetabelle.

b) Wie groß ist die Stromstärke i nach $t = 2$ s bzw. 3,5 s?

c) Ermittle graphisch den Zeitpunkt, für den $i = 0{,}2$ A bzw. 0,45 A!

4.2 Eine zum Zeitpunkt $t = 0$ min aus einem Kühlbehälter entnommene Probe erwärmt sich nach der Formel $\vartheta = 20°\text{C} \cdot \left(1 - 0{,}7 \cdot e^{-\frac{t}{15\,\text{min}}}\right)$ auf die Raumtemperatur 20°C.

a) Zeichne die Temperaturkurve in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten bis $t = 80$ min.

b) Bestimme graphisch die Zeitdauer t, bis die Temperatur der Probe auf 12°C angestiegen ist.

c) Wie groß war die ursprüngliche Temperatur im Kühlbehälter?

4.3 Nach dem Einschalten eines Gleichstromes in einem Stromkreis mit einem Ohm'schen Widerstand $R = 8\ \Omega$ und einer Induktivität $L = 3$ H zum Zeitpunkt $t = 0$ s steigt die Stromstärke i gemäß $i = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $\tau = \frac{L}{R}$ auf den Endwert $I_0 = 5$ A an.

a) Zeichne den Graphen der Stromstärke i als Funktion der Zeit t bis $t = 3$ s.

b) Wie groß ist die Stromstärke i nach $t = 1$ s ?

c) Wie viel Prozent des Endwertes erreicht die Stromstärke nach $t = \tau$, 3τ, 5τ?

d) Nach welcher Zeit werden 90% des Endwertes von i erreicht? Ermittle diese Zeit graphisch.

4.4 Nach dem Anlegen einer Gleichspannung $U_0 = 25$ V an einen Ohm'schen Widerstand $R = 1000\ \Omega$ und einen Kondensator mit der Kapazität $C = 30\ \mu$F zur Zeit $t = 0$ s steigt die Spannung u_C am Kondensator nach der Formel $u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit der Zeitkonstanten $\tau = R \cdot C$ an (Abb. 4.13).

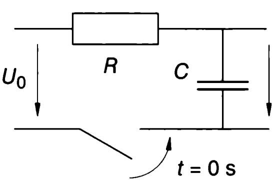


Abb. 4.13

a) Zeichne den Verlauf von u_C als Funktion der Zeit t bis $t = 0{,}2$ s.

b) Wie groß ist u_C zur Zeit $t = 20$ ms?

c) Wann ist u_C gleich 12 V (graphische Lösung)?

d) Zeichne den Spannungsverlauf, wenn R doppelt so groß wäre.

e) Zeichne den Spannungsverlauf, wenn $C = 10\ \mu$F (bei gleichem R) ist!

4.5 Beginnt die Entladung eines Kondensators (Abb. 4.14) mit $t = 0$ s, so nimmt die Spannung u nach der Formel $u = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ mit $\tau = R \cdot C$ ab.

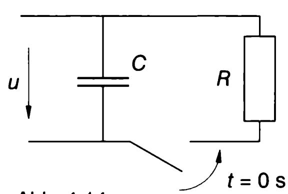


Abb. 4.14

a) Stelle den Spannungsverlauf bis $t = 2{,}5$ ms für $U_0 = 40$ V, $R = 20\ \Omega$ und $C = 20\ \mu$F graphisch dar.

b) Ermittle graphisch, in welchen Zeitspannen sich jeweils die Spannung ("Halbwertszeit") halbiert?

4.6 Rn 222 zerfällt nach dem Zerfallsgesetz $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $\lambda = 2{,}09 \cdot 10^{-6}\,s^{-1}$. Stelle den Kernzerfall graphisch dar, wenn für $t = 0$ s $N_0 = 4 \cdot 10^{12}$ Kerne vorhanden sind!

a) Wie viele Kerne sind nach 2 Tagen noch nicht zerfallen?

b) Ermittle graphisch die Halbwertszeit.

4.7 Von einem exponentiellen Wachstumsprozess y = f(t) kennt man eine Wertetabelle. Vervollständige die Wertetabelle, stelle die Funktionsgleichung auf und zeichne den Graphen der Funktion!

a)

t	0	1	2	3	4	5
y	2	3	4,5			

b)

t	0	4	8	12	16	20
y	1	5	25			

4.8 Von einem exponentiellem Abnahmeprozess y = f(t) kennt man eine Wertetabelle. Vervollständige die Wertetabelle, stelle die Funktionsgleichung auf und zeichne den Graphen der Funktion!

a)

t	0	1	2	3	4	5
y	3	2	4/3			

b)

t	1	4	7	10	13	16
y	100	10	1			

4.9 Q = 0,4 C (Coulomb) ist die Ladung eines Kondensators vor seiner Entladung. 1 ms nach Beginn der Entladung ist die Ladung auf ein Viertel des Anfangswertes, also 0,1 C abgesunken.

a) Die Entladung erfolgt exponentiell. Gib die Ladungswerte 2 ms, 3 ms und 4 ms nach Beginn der Entladung an.

b) Wie müssten die Ladungswerte 2 ms, 3 ms und 4 ms nach Beginn der Entladung lauten, wenn die Entladung linear erfolgen würde?

4.10 Von einem radioaktiven Element sind anfangs 10^{12} Kerne vorhanden. Es besitzt eine Halbwertszeit von 1 Woche. Gib die Anzahl der Kerne nach 2, 3, 4, ... Wochen an!

4.11 Die Dichtefunktion einer Normalverteilung ist durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ gegeben. Man nennt μ den Erwartungswert und σ die Standardabweichung der Normalverteilung. Zeichne die Dichtefunktion für

a) $\mu = 1$ und $\sigma = 0{,}5$ **b)** $\mu = 3$ und $\sigma = 1$ **c)** $\mu = 4$ und $\sigma = 2$

4.12 Ist ein Federpendel nach seiner Anregung zum Zeitpunkt $t = 0$ s sehr stark gedämpft, so kommt es zu keiner echten Schwingung; seine Bewegung wird als aperiodische Schwingung oder auch als Kriechfall bezeichnet. Stelle folgende Kriechfälle für $t \geqslant 0$ s graphisch dar:

a) $y = 10 \cdot \left(e^{-t} - e^{-2 \cdot t}\right)$ **b)** $y = 2 \cdot e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}$ **c)** $y = 10 \cdot \left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-3t}\right)$

4.13 Den Übergang von den echten Schwingungen zu den Kriechfällen stellt der aperiodische Grenzfall dar. Je nach Anfangsbedingung ergeben sich verschiedene Zeitverläufe. Stelle folgenden aperiodischen Grenzfall für $t \geqslant 0$ s graphisch dar:

a) $y = 5 \cdot (1 - t) \cdot e^{-\frac{t}{2}}$ **b)** $5 \cdot (1 - t) \cdot e^{-t}$ **c)** $5 \cdot (1 + t) \cdot e^{-\frac{t}{2}}$ **d)** $3 \cdot (1 + t) \cdot e^{-t}$

4.14 Strahlenschutz (Abb. 4.15): Für die Schwächung von γ-Strahlen durch eine schützende Schicht gilt das Absorptionsgesetz $I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$, wobei I_0 die Intensität vor der absorbierenden Schicht, I die Intensität dahinter, d die Schichtdicke und μ der lineare Schwächungskoeffizient sind. Für Blei gilt $\mu = 0{,}518\ \text{cm}^{-1}$.

a) Stelle die Intensität I in Abhängigkeit von der Schichtdicke d graphisch dar. (I_0 = 1 MeV)

b) Auf wie viel Prozent, ausgehend von d = 1 cm, sinkt die Intensität hinter der Schicht, wenn die Schichtdicke verdoppelt wird?

c) Diejenige Schichtdicke, welche die Strahlung auf die Hälfte abschwächt, ist die Halbwertsdicke. Ermittle diese Dicke graphisch! (I_0 = 1 MeV)

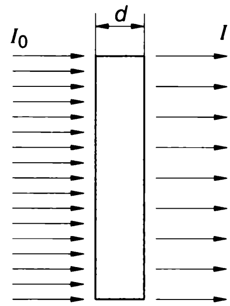


Abb. 4.15

4.15 Die Anzahl der Computer, die Motorisierung oder der Jahresstromverbrauch eines Landes wachsen anfänglich rasch und gehen dann in ein immer langsameres Wachstum über, bis der Markt eine Sättigungsgrenze erreicht hat. Ein solches Wachstum kann oft mit der Funktion $y = \frac{S}{1 + e^{-c(x-a)}}$ (*"logistisches Wachstum"*) beschrieben werden. Zeichne den Graphen einer solchen Funktion für $x \in [0,100]$, wenn S = 50, c = 0,1 und a = 40 sind. Welche Bedeutung hat S?

4.3 Logarithmus

4.3.1 Begriff des Logarithmus

Erhebt man 2 zur dritten Potenz, so erhält man 8; $2^3 = 8$. Dieses Potenzieren kann, ausgehend vom Ergebnis 8, auf zweifache Weise umgekehrt werden:

(1) Man fragt nach der Basis a, welche zur dritten Potenz erhoben, den Wert 8 ergibt: $a = \sqrt[3]{8}$, d.h. man löst diese Aufgabe durch *Wurzelziehen*.

(2) Man fragt nach dem Exponenten x, der zur Basis 2 erhoben, den Wert 8 ergibt. Auch derartige Aufgaben werden häufig gestellt; sie werden durch *Logarithmieren* gelöst.

Beispiel 4.9 : Einführende Aufgabe

Löse die Gleichungen $2^x = 8$ und $2^x = 3$ graphisch.

Lösung

Aus Abb. 4.16 erkennt man, wie man die beiden Gleichungen graphisch nach x lösen kann. Die Lösung x ist die Stelle, für die 2^x gleich 8 bzw. 3 ist. Außerdem ist zu sehen, dass es jeweils nur eine einzige Lösung gibt. Man liest ab:

x = 3 als Lösung von $2^x = 8$ (was man hier natürlich auch leicht im Kopf bestimmt);

$x \approx 1{,}6$ als Lösung von $2^x = 3$.

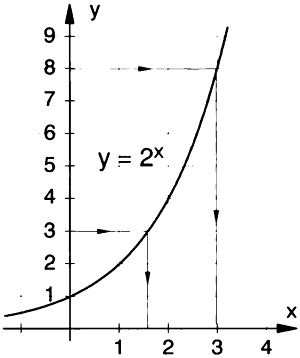


Abb. 4.16 Logarithmieren

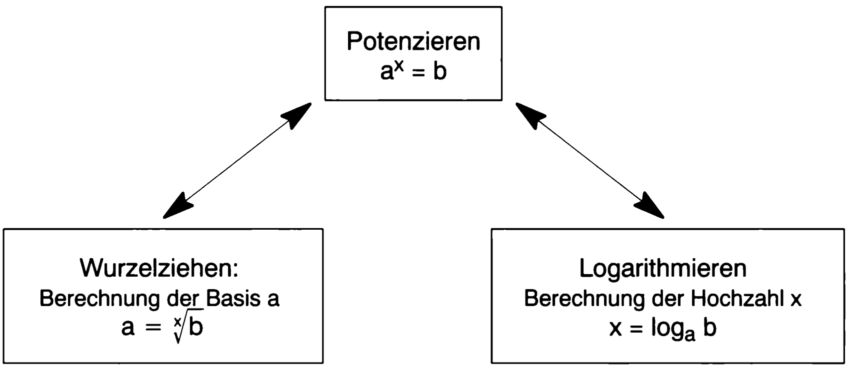
Wir definieren:

> x heißt **Logarithmus** *von* b *zur* Basis a, wenn a^x gleich b ist.
>
> $$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$
>
> Der **Logarithmus** von b zur Basis a ist jener **Exponent**, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten. b wird als **Numerus** bezeichnet.

Kurzgefasst lautet die Definition: $a^{\log_a b} = b$. *Logarithmieren* heißt, den unbekannten Exponenten einer Potenz zu bestimmen, deren Wert bekannt ist. **Logarithmen sind Hochzahlen!**

Ferner gilt:

> **a)** $\log_a a = 1$, da $a^1 = a$ **b)** $\log_a 1 = 0$, da $a^0 = 1$



Beispiel 4.10 : Berechnung von Logarithmen

Ermittle: **a)** $\log_{10} 100$ **b)** $\log_3 81$ **c)** $\log_2 \frac{1}{8}$ **d)** $\log_{\frac{1}{2}} 4$ **e)** $\log_{10} 2$

Lösung

Wir verwenden, dass $x = \log_a b$ die logarithmische Umkehrung von $a^x = b$ ist.

Zu **a)** $x = \log_{10} 100 \Leftrightarrow 10^x = 100$, also $x = 2$.

Zu **b)** $x = \log_3 81 \Leftrightarrow 3^x = 81$, also $x = 4$.

Zu **c)** $x = \log_2 \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, also $x = -3$

Zu **d)** $x = \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ oder $2^{-x} = 2^2$, also $x = -2$.

Zu **e)** $x = \log_{10} 2 \Leftrightarrow 10^x = 2$; wegen $10^0 = 1$ und $10^1 = 10$ muss x zwischen 0 und 1 liegen. Die genauere Bestimmung erfolgt mit dem Taschenrechner.

Die Berechnung von Logarithmen gelingt nur in Ausnahmefällen nach der im Beispiel 4.10 angewandten Methode. Logarithmen sind im Allgemeinen irrationale Zahlen.

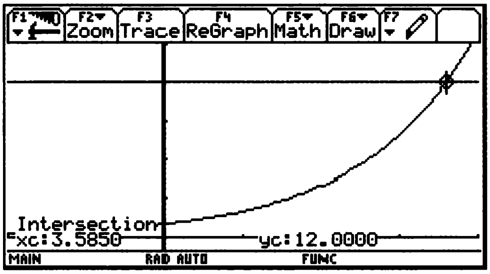
Voyage 200

Beispiel 4.11: Bestimmung von Logarithmen mit dem Taschenrechner

Ermittle $\log_2 12$ **a)** graphisch **b)** rechnerisch.

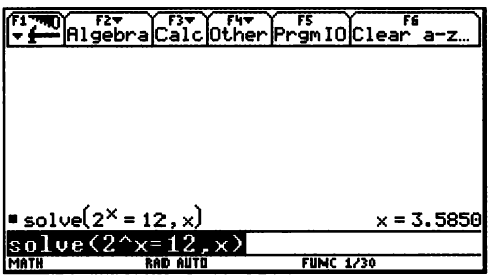
Lösung

Zu **a)** Wir ermitteln den Schnittpunkt der Graphen von $y = 2^x$ und $y = 12$.



Mit **F5** **5** (5:Intersection) ermittelt man den Schnittpunkt der beiden Graphen. Die Abfragen werden jeweils mit **ENTER** bestätigt.
Aus der Graphik erhält man:
$\log_2 12 = 3{,}5850$ (auf 4 Nachkommastellen gerundet).

Zu **b)** Rechnerische Lösung:



Wie im Beispiel 4.10 verwenden wir zuerst, dass :
$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$.
$x = \log_2 12 \Leftrightarrow 2^x = 12$.
Diese Gleichung können wir nun wie nebenstehend gezeigt mit dem Taschenrechner lösen.

Auf den meisten Taschenrechnern können zwei spezielle Logarithmen einfach bestimmt werden: der *Zehnerlogarithmus* (Logarithmus zur Basis 10) und der *natürliche* Logarithmus (Logarithmus zur Basis e).

	Schreibweise	*Taschenrechnerbezeichnung*
Zehnerlogarithmus (Dekadischer Logarithmus)	lg b (**l**ogarithmus **g**eneralis)	LOG
Natürlicher Logarithmus	ln b (**l**ogarithmus **n**aturalis)	LN

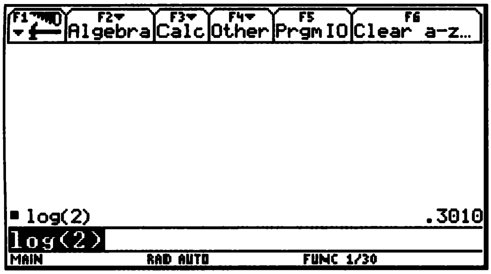
In der Praxis (besonders in der Informationstheorie) wird auch noch der Logarithmus zur Basis 2 verwendet. Er wird binärer Logarithmus genannt; man schreibt für $\log_2 b$ kurz: lb b.

Beispiel 4.12: Zehnerlogarithmus und natürlicher Logarithmus am Taschenrechner

Ermittle mit dem Taschenrechner: **a)** lg 2 **b)** ln 2

Lösung

Zu **a)**

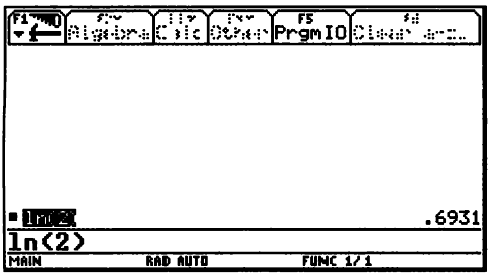


Zwei Möglichkeiten:

1) Eintippen über die Tastatur.
2) Aus dem Katalog:
   [2ND] [2] [L] und Ansteuern von log mit dem Cursor.

Abschluss der Eingabe mit [♦] ENTER.

Zu **b)**



Drei Möglichkeiten:

1) Mit der Funktionstaste [LN].
2) Aus dem Katalog analog wie oben.
3) Eintippen über die Tastatur.

Abschluss der Eingabe mit [♦] ENTER.

Beispiel 4.13 : Logarithmische Größenverhältnisse in Dezibel

Sind zwei gleichnamige Größen a und b sehr unterschiedlich, so ist das Verhältnis a/b eine unhandlich große oder kleine Zahl. Bildet man den Logarithmus dieser Zahl zur Basis 10 oder zur Basis e, so erhält man eine (betragsmäßig) kleinere Zahl. Zur Kennzeichnung für die gewählte Basis 10 wird "B" hinzugefügt, das wie ein Einheitenzeichen (Einheitenname "Bel"[6]) verwendet werden kann. Für praktische Anwendungen ist das Bel meist zu groß, sodass das Dezibel (dB) genommen wird: 1 dB = 0,1 B.

a) Berechne das logarithmierte Größenverhältnis G von a/b in dB, wenn a = 40000 und b = 0,5 sowie a = 8 und $b = 5 \cdot 10^6$. Das Ergebnis soll ganzzahlig gerundet werden.

b) Berechne a/b, wenn das logarithmierte Größenverhältnis 45 dB beträgt.

Lösung

Zu **a)** $G = 10 \cdot \lg \frac{40000}{0,5}$ dB = 49 dB bzw. $G = 10 \cdot \lg \frac{8}{5 \cdot 10^6}$ dB = –58 dB.

Zu **b)** 45 dB $= 10 \cdot \lg x$ dB, wenn x = a/b;
daraus: lg x = 4,5; Exponentialdarstellung: $x = 10^{4,5} \approx 31600$.
Somit: a/b = 31600.

[6] Alexander Graham BELL (1847 – 1922), britisch-kanad. Erfinder, erfand das Telefon

4.3.2 Rechengesetze für Logarithmen

Für den Umgang mit Logarithmen gibt es einige wichtige Rechengesetze, die sich aus den Potenzgesetzen ergeben. Sie sollen nun mit Hilfe des Zehnerlogarithmus bewiesen werden, gelten aber für alle Logarithmensysteme.

Mit $u > 0$ und $v > 0$ setzen wir $x = \lg u$ und $y = \lg v$. Dann ist $u = 10^x$ und $v = 10^y$.

(1) $u \cdot v = 10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$; daher: $\lg (u \cdot v) = x + y = \lg u + \lg v$.

(2) $\frac{u}{v} = \frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$; daher: $\lg \frac{u}{v} = x - y = \lg u - \lg v$.

(3) Mit $n \in \mathbb{R}$ gilt: $u^n = (10^x)^n = 10^{n \cdot x}$; daher: $\lg (u^n) = n \cdot x = n \cdot \lg u$.

Rechengesetze für Logarithmen ($u,v > 0$, $n \in \mathbb{R}$):

(1) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$	Der Logarithmus eines **Produktes** ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.
(2) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$	Der Logarithmus eines **Bruches** ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.
(3) $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$	Der Logarithmus einer **Potenz** ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten mit dem Logarithmus der Basis.

Beachte, dass diese drei Rechengesetze auch *von rechts nach links* gelesen werden können!

Achtung!
Für den Logarithmus einer Summe oder Differenz gibt es *kein* logarithmisches Rechengesetz!
$\log_a (u + v) \neq \log_a u + \log_a v$ und $\log_a (u - v) \neq \log_a u - \log_a v$

Diese drei Gesetze werden durch die schon auf Seite 90 allgemein formulierten und unmittelbar aus der Definition eines Logarithmus folgenden Beziehungen ergänzt:

$a^{\log_a b} = b$	$10^{\lg b} = b$	$e^{\ln b} = b$
$\log_a a = 1$	$\lg 10 = 1$	$\ln e = 1$
$\log_a 1 = 0$	$\lg 1 = 0$	$\ln 1 = 0$

Beispiel 4.14: Anwendung der Logarithmengesetze "von links nach rechts"

Zerlege mit Hilfe der Logarithmengesetze möglichst weitgehend:

a) $\lg (3 \cdot x \cdot y)$ **b)** $\ln \frac{1}{2 \cdot v}$ **c)** $\lg \frac{\sqrt{x} \cdot y}{\sqrt[4]{x}}$ **d)** $\ln \sqrt[3]{x^2 - y^2}$

Lösung

Zu **a)** $\lg (3x \cdot y) = \lg (3x) + \lg y = \lg 3 + \lg x + \lg y$.

Zu **b)** $\ln \frac{1}{2 \cdot v} = \ln 1 - \ln (2v) = 0 - (\ln 2 + \ln v) = -\ln 2 - \ln v$.

Zu **c)** $\ln \frac{\sqrt{x} \cdot y}{\sqrt[4]{x}} = \ln \left(\sqrt{x} \cdot y\right) - \ln \sqrt[4]{x} = \ln \sqrt{x} + \ln y - \ln \sqrt[4]{x} = \frac{1}{2} \cdot \ln x + \ln y - \frac{1}{4} \cdot \ln x = \ln y + \frac{1}{4} \cdot \ln x$.

Zu **d)** $\ln \sqrt[3]{x^2 - y^2} = \ln (x^2 - y^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \ln \left(x^2 - y^2\right) = \frac{1}{3} \cdot \ln [(x-y)(x+y)] = \frac{1}{3} \ln (x-y) + \frac{1}{3} \ln (x+y)$.

Beispiel 4.15: Anwendung der Logarithmengesetze "von rechts nach links"

Stelle als Logarithmus eines *einzigen* Terms dar!

a) $\lg 2 + \lg s - \lg t$ **b)** $1 - \ln 3$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot \lg x - 3 \cdot \lg y$ **d)** $\frac{1}{2} \ln h + \frac{1}{3} \ln h$

Lösung

Zu **a)** $\lg 2 + \lg s - \lg t = \lg (2s) - \lg t = \lg \frac{2s}{t}$.

Zu **b)** $1 - \ln 3 = \ln e - \ln 3 = \ln \frac{e}{3}$.

Zu **c)** $\frac{2}{3} \cdot \lg x - 3 \cdot \lg y = \lg x^{\frac{2}{3}} - \lg y^3 = \lg \frac{\sqrt[3]{x^2}}{y^3}$

Zu **d)** Wir bringen auf gleichen Nenner: $\frac{1}{2} \ln h + \frac{1}{3} \ln h = \frac{5}{6} \ln h = \ln \sqrt[6]{h^5}$.

4.3.3 Umrechnungsformeln zwischen Logarithmen verschiedener Basen

Kennt man Logarithmen zu einer bestimmten Basis, etwa zur Basis e oder 10, so lassen sich daraus die Logarithmen zu einer anderen Basis a leicht berechnen. Es gilt nämlich:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}}$$

Beweis: $x = a^{\log_a x}$ und $x = e^{\ln x} \Rightarrow a^{\log_a x} = e^{\ln x}$

$a^{\log_a a} = e^{\ln x}$ | Logarithmieren zur Basis e

$\ln (a^{\log_a x}) = \ln (e^{\ln x})$ | 3. logarithmisches Rechengesetz

$\log_a x \cdot \ln a = \ln x \cdot \ln e = \ln x \cdot 1 \Leftrightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Analog verläuft der Beweis für den Zehnerlogarithmus.

Logarithmen verschiedener Basen sind also proportional zueinander. Speziell gilt:

$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg x = 2{,}303 \cdot \lg x$;

d.h. der natürliche Logarithmus ist etwas mehr als doppelt so groß wie der Zehnerlogarithmus derselben Zahl.

Beispiel 4.16: Berechnung von Logarithmen anderer Basen als e oder 10

Berechne: **a)** $\log_2 3$ **b)** $\log_5 12$

Lösung

Zu **a)** $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}585$; $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}585$ (siehe Beispiel 4.9)

Zu **b)** $\log_5 12 = \frac{\ln 12}{\ln 5} = 1{,}544$; $\log_5 12 = \frac{\log 12}{\log 5} = 1{,}544$.

Warum können Logarithmen nur von positiven Zahlen gebildet werden?

Angenommen, es sollte $x = \ln(-1)$ bestimmt werden. Die zugehörige Exponentialgleichung lautet dann: $e^x = -1$; eine Lösung dieser Gleichung gibt es jedoch nicht, da die Werte einer Exponentialfunktion stets positiv sind.

Im Überblick: Logarithmus

Der **Logarithmus** von b zur Basis a ist jener **Exponent**, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten: $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$ ($a > 0$ und $a \neq 1$ sowie $b > 0$).

Spezielle Logarithmen:

Natürlicher Logarithmus: Basis a = Euler'sche Zahl e, Schreibweise: ln b
Zehnerlogarithmus oder dekadischer Logarithmus: Basis a = 10, Schreibweise: lg b

Grundlegende Beziehungen:

$10^{\lg x} = x$; $\lg 10 = 1$; $\lg 1 = 0$ bzw. $e^{\ln x} = x$; $\ln e = 1$; $\ln 1 = 0$

Rechengesetze für Logarithmen ($u, v > 0$, $n \in \mathbb{R}$):

(1) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$ (2) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$ (3) $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$.

Berechnung von Logarithmen anderer Basen als e oder 10:

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ oder $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$

Aufgaben

4.16 Gib die Gleichung in der logarithmischen Umkehrung an:

a) $3^3 = 27$ **b)** $2^2 = 4$ **c)** $10^4 = 10000$ **d)** $10^0 = 1$

e) $e^1 = e$ **f)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$ **g)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ **h)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$

4.17 Gib die Gleichung in der Exponentialdarstellung an:

a) $\log_4 64 = 3$ **b)** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ **c)** $\log_3 27 = 3$ **d)** $\lg 10 = 1$

e) $\lg 100 = 2$ **f)** $\ln 1 = 0$ **g)** $\lg \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{2}$ **h)** $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

4.18 Bestimme ohne Taschenrechner:

a) $\log_2 8$ **b)** $\log_4 32$ **c)** $\log_4 16$ **d)** $\log_3 9$ **e)** $\log_5 25$

f) $\log_7 7$ **g)** $\log_2 \frac{1}{4}$ **h)** $\log_3 \frac{1}{81}$ **i)** $\log_2 \frac{1}{32}$ **j)** $\log_4 0{,}25$

k) $\log_3 \sqrt{3}$ **l)** $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$ **m)** $\log_5 \sqrt[3]{25}$ **n)** $\log_3 \sqrt{\frac{1}{3}}$ **o)** $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8}$

4.19 Bestimme ohne Taschenrechner:

a) $\ln 1$ **b)** $\lg 10$ **c)** $\lg 1$ **d)** $\ln e$ **e)** $10^{\lg 3}$

f) $e^{\ln x}$ **g)** $\ln \frac{1}{e}$ **h)** $10^{\lg x}$ **i)** $\lg \frac{1}{10}$ **j)** $\lg 0{,}01$

k) $\ln \sqrt{e}$ **l)** $\ln \sqrt{\frac{1}{e}}$ **m)** $\lg \sqrt[3]{100}$ **n)** $\lg \frac{1}{\sqrt{10}}$ **o)** $\lg \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}}$

4.20 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $\log_2 x$ für $x = 1, 2, 4, 8, \frac{1}{8}, 0{,}25, 0{,}0625, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{4}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

b) $\lg x$ für $x = 1, 10, 1000, 0{,}1, 0{,}0001, \frac{1}{100}, \sqrt{10}, \sqrt[3]{100}, \frac{1}{\sqrt{10}}$

4.21 Ergänze: **a)** $1 = \ln \ldots$ **b)** $2 = \lg \ldots$ **c)** $-1 = \lg \ldots$ **d)** $0 = \ln \ldots$ **e)** $0 = \lg \ldots$

4.22 Löse die Gleichung nach x durch Umschreiben in die Exponentialdarstellung:

a) $\lg x = 2$ **b)** $\ln x = -1$ **c)** $\log_2 x = 4$ **d)** $\log_3 x = 2$

e) $\log_5 x = \frac{3}{2}$ **f)** $\ln x = -0{,}1$ **g)** $\lg x = \frac{1}{2}$ **h)** $\log_2 x = -4$

i) $\lg x = -\frac{1}{2}$ **j)** $\lg x = \frac{3}{4}$ **k)** $\lg x = 2{,}8$ **l)** $\log_3 x = 0{,}25$

Bei den Aufgaben 4.23 bis 4.26 soll das Ergebnis mit einer *Zahlenprobe* kontrolliert werden!

4.23 Zerlege möglichst weitgehend in eine Summe oder eine Differenz:

a) $\ln (2a)$ **b)** $\ln \frac{2}{a}$ **c)** $\ln \frac{1}{x}$ **d)** $\lg \frac{2a}{b}$ **e)** $\lg \frac{2}{a \cdot b}$

f) $\ln (3a^2)$ **g)** $\ln \frac{1}{a^3}$ **h)** $\lg (2 \cdot \sqrt{x})$ **i)** $\ln \sqrt{2x}$ **j)** $\ln \frac{2\sqrt[3]{t}}{3}$

4.24 Zerlege möglichst weitgehend in eine Summe oder eine Differenz:

a) $\lg \frac{a+b}{2}$ **b)** $\ln \frac{1}{a+b}$ **c)** $\ln \frac{a+b}{a^2-b^2}$ **d)** $\ln \frac{a \cdot b^2}{\sqrt{c}}$

e) $\ln \sqrt{\frac{2}{3b}}$ **f)** $\lg \frac{(a+b)^2}{a^3 \cdot \sqrt[4]{a}}$ **g)** $\lg \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{s}}\right)$ **h)** $\lg \left(\frac{10}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right)$

i) $\lg \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} \, \frac{y^2}{x-y}\right)$ **j)** $\ln \sqrt[3]{\frac{x-y}{(x-y)^{\frac{1}{5}}}}$ **k)** $\ln \sqrt[6]{\frac{1}{3} \, \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{b^3}}$ **l)** $\lg \left(a \cdot \sqrt{\frac{a \cdot b^2}{c \cdot \sqrt[3]{a}}}\right)$

4.25 Schreibe als Logarithmus eines einzigen Terms:

a) $\ln a + \ln (2a)$ **b)** $-\ln a - \ln 2$ **c)** $1 + \ln 2 - \ln 1$ **d)** $2 + \lg 3$

e) $-1 + \lg 2$ **f)** $\lg \frac{m}{10} - \lg \frac{100}{m} + 2$ **g)** $\ln 2 - \ln \frac{1}{2}$ **h)** $\ln (x+y) - \ln \frac{x+y}{2}$

i) $\lg x - 3 \cdot \lg x^2$ **j)** $\lg 2 - \lg a + \lg b$ **k)** $\lg x - \lg 2 - \lg (2x)$ **l)** $\ln (2t) - 2 \cdot \ln \frac{t}{2}$

4.26 Schreibe als Logarithmus eines einzigen Terms:

a) $\lg x + \lg y - \frac{1}{2}\lg z$ **b)** $\ln a + \ln a^2 + \ln\sqrt{a}$ **c)** $-\frac{1}{2}\ln a - \ln\frac{p}{2}$

d) $\ln b + 3\cdot\ln b^2 - 3\ln\sqrt{b}$ **e)** $\frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{5}\ln b - \frac{1}{2}\ln c$ **f)** $\ln\frac{a+b}{a-b} + 2\cdot\ln\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

g) $3 - \frac{1}{2}\lg(x+2)$ **h)** $\frac{1}{3}(\ln x - \ln(2y) - 2\ln 5)$ **i)** $\ln\frac{x^2-1}{x} - \ln\frac{x+1}{2x}$

4.27 Richtig oder falsch?

a) $\ln\sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}$ **b)** $\ln e^x = x$ **c)** $\sqrt{\lg 3} = \frac{1}{2}\lg 3$ **d)** $\lg(x+3) = \lg 3 + \lg x$

e) $\ln\frac{1}{x^2} = -2\ln\frac{1}{x}$ **f)** $\ln 1 = e$ **g)** $\frac{\lg 100}{\lg 2} = \lg 50$ **h)** $\ln 4 = 2\cdot\ln 2$

i) $(\lg 3)^2 = \lg 9$ **j)** $\lg 3 + \lg 3 = \lg 9$ **k)** $(\lg 5)^2 = 2\cdot\lg 5$ **l)** $\lg\frac{1}{4} = -2\cdot\lg 2$

4.28 Berechne sowohl mit Hilfe des natürlichen als auch des dekadischen Logarithmus:

a) $\log_2 45$ **b)** $\log_2 60$ **c)** $\log_2 100$ **d)** $\log_2\frac{21}{16}$ **e)** $\log_2 0{,}4$

f) $\log_3 2$ **g)** $\log_4 12$ **h)** $\log_5 2{,}8$ **i)** $\log_{12} 35{,}8$ **j)** $\log_3(2e)$

4.29 Berechne das logarithmierte Größenverhältnis $G = 10\cdot\lg\frac{a}{b}$ dB von a und b und runde es anschließend auf eine ganze Zahl:

a) $a = 2$, $b = 1$ **b)** $a = 150$, $b = 0{,}005$ **c)** $a = 2$, $b = 50000$

d) $a = 2{,}5\cdot 10^8$, $b = 8{,}4\cdot 10^{-2}$ **e)** $a = 3{,}8\cdot 10^{-2}$, $b = 5{,}3\cdot 10^{-10}$ **f)** $a = 4{,}4\cdot 10^{-5}$, $b = 1{,}5\cdot 10^4$

4.30 Berechne das Verhältnis a/b, wenn $G = 10\lg\frac{a}{b}$ dB gleich ist:

a) 3 dB **b)** 6 dB **c)** 9 dB **d)** 20 dB **e)** 100 dB

f) 103 dB **g)** 0 dB **h)** −3 dB **i)** −6 dB **j)** −20 dB

4.31 **a)** Ein Verstärker (Abb. 4.17) hat eine Eingangsleistung $P_1 = 1$ nW und eine Ausgangsleistung $P_2 = 5$ mW. Berechne das sogenannte Leistungsverstärkungsmaß (Gewinnmaß) $G_P = 10\cdot\lg\frac{P_2}{P_1}$ dB.

b) Berechne das Verhältnis P_2/P_1, wenn $G_P = 3$ dB.

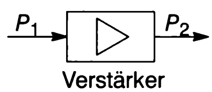


Abb. 4.17

4.32 Berechne das Leistungsverstärkungsmaß $G_P = 10\cdot\lg(P_2/P_1)$ dB für P_2/P_1 gleich

a) 2 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 16 **e)** 10^8 **f)** 2.10^8 **g)** 1/2

4.33 Als Maß für die Verstärkung einer elektrischen Spannung von U_1 auf U_2 dient das sogenannte Spannungsverstärkungsmaß $G_U = 20\cdot\lg\frac{U_2}{U_1}$ dB. Berechne G_U, wenn $U_2 = 500\cdot U_1$. Wie groß ist U_2/U_1, wenn $G_U = 36$ dB?

4.34 Am Eingang einer Übertragungsstrecke beträgt die Stromstärke $I_1 = 0{,}8$ A, am Ende ist die Stromstärke $I_2 = 0{,}5$ A. Wie groß ist die Dämpfung in dB, wenn als Dämpfungsmaß $G_I = 20\cdot\lg\frac{I_2}{I_1}$ dB verwendet wird?

4.35 In der Chemie is t der pH-Wert einer Lösung der negative dekadische Logarithmus von $[H^+]$, der Wasserstoffionenkonzentration: pH = $-\lg[H^+]$. Eine saure Lösung hat einen pH-Wert unter 7, eine alkalische Lösung über 7.

a) Wie groß ist der pH-Wert eines Essigs, wenn $[H^+] = 10^{-3}$ ist?

b) Ein Fruchtsaft hat einen pH-Wert von 4; berechne $[H^+]$.

c) Schreibe die Gleichung pH = $-\lg[H^+]$ in der Exponentialdarstellung.

4.4 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

4.4.1 Exponentialgleichungen

Eine Gleichung, in der die Gleichungsvariable (Unbekannte) im Exponenten einer Potenz auftritt, heißt **Exponentialgleichung**.

Beispiele: $2^x = 5$; $5 \cdot 4^{x-1} = 18$; $e^{2x+3} = 4$; $4^x + 4^{x+1} = 5$; $3^x + 2 = x$.

Zur Lösung von Exponentialgleichungen muss man im Allgemeinen auf graphische oder numerische Näherungsverfahren zurückgreifen; bestimmte einfache Exponentialgleichungen lassen sich durch **Logarithmieren** lösen.

Beispiel 4.17 : Einführende Aufgaben

Löse nach x in $\mathbb{R}$: **a)** $2^x = 5$ **b)** $5 \cdot 4^{x-1} = 18$

c) Der Luftdruck p nimmt nach $p = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991\,\text{m}}}$ mit zunehmender Höhe h ab. In welcher Höhe hat der Luftdruck die Hälfte seines Wertes auf der Erdoberfläche? (siehe Seite 76, Beispiel 4.1)

Lösung

Zu **a)**

$$\begin{aligned} 2^x &= 5 \quad &&|\text{ beide Seiten logarithmieren} \\ \ln 2^x &= \ln 5 \\ x \cdot \ln 2 &= \ln 5 \\ x &= \frac{\ln 5}{\ln 2} = 2{,}322. \end{aligned}$$

Probe: $2^{2{,}322} \approx 5$.

Zu **b)**

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4^{x-1} &= 18 \quad &&|\ :5 \\ 4^{x-1} &= 3{,}6 \quad &&|\text{ beide Seiten logarithmieren} \\ \lg 4^{x-1} &= \lg 3{,}6 \\ (x-1) \cdot \lg 4 &= \lg 3{,}6 \\ x - 1 &= \frac{\lg 3{,}6}{\lg 4} \\ x &= 1 + 0{,}924 = 1{,}924. \end{aligned}$$

Probe: $5 \cdot 4^{1{,}924 - 1} \approx 18$

Zu **c)** p_0 ist der Luftdruck auf der Erdoberfläche, da $p = p_0$ für $h = 0$ m. Wir setzen $p = \frac{p_0}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{2} &= p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}} \quad &&|\ :p_0 \\ \frac{1}{2} &= e^{-\frac{h}{H}} \quad &&|\text{ beide Seiten logarithmieren} \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \ln e^{-\frac{h}{H}} \quad &&|\text{ logarithmische Rechengesetze anwenden} \\ \ln 1 - \ln 2 &= -\frac{h}{H} \cdot \ln e \end{aligned}$$

Wegen $\ln 1 = 0$ und $\ln e = 1$ folgt schließlich $h = H \cdot \ln 2 \approx 5540$ m.
In einer Höhe von etwa 5540 m ist der Luftdruck halb so groß wie auf der Erdoberfläche.

Hinweis: Hier ist die Verwendung des natürlichen Logarithmus zweckmäßig, weil $\ln e = 1$ ist.

Beispiel 4.18 : Formelumwandlung (siehe Seite 80, Beispiel 4.3)

Berechne t aus der Formel $i = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$!

Lösung

Wir formen so um, dass die Potenz mit der Variablen t allein auf einer Seite der Gleichung steht.

$$i = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\frac{i \cdot R}{U} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{i \cdot R}{U} \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$\ln e^{-\frac{t}{\tau}} = \ln\left(1 - \frac{i \cdot R}{U}\right)$$

$$-\frac{t}{\tau} \cdot \ln e = \ln\left(1 - \frac{i \cdot R}{U}\right) \quad \text{und daraus} \quad t = -\tau \cdot \ln\left(1 - \frac{i \cdot R}{U}\right);$$

hierbei muss $1 - \frac{i \cdot R}{U} > 0$ sein, was bei dieser Aufgabenstellung aus physikalischen Gründen gewährleistet ist.

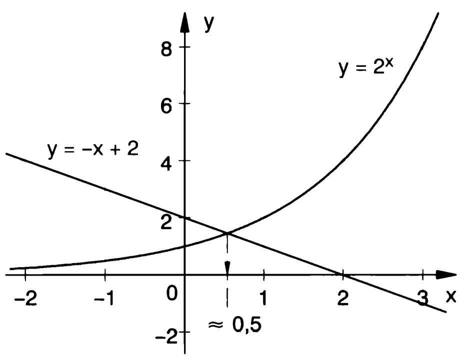
Beispiel 4.19 : Graphische Lösung

Löse die Exponentialgleichung $2^x + x = 2$.

Lösung

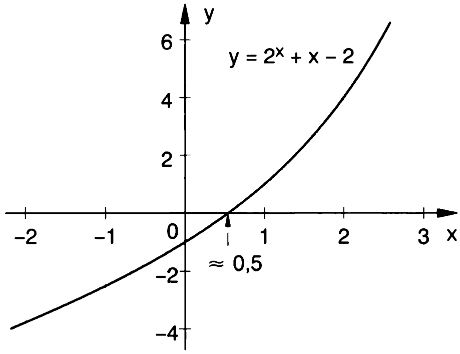
Diese Exponentialgleichung lässt sich nicht durch Logarithmieren ähnlich wie die Aufgaben in Beispiel 4.17 lösen; wir können sie zur Zeit nur durch *gezieltes Probieren* oder *graphisch* lösen. Zur graphischen Lösung besprechen wir zwei Möglichkeiten:

1) Wir schreiben die Gleichung in der Form $2^x = -x + 2$. Ihre Lösung ist die x-Koordinate des Schnittpunktes der Funktionsgraphen von $y = 2^x$ und $y = -x + 2$.



Man liest als Lösung ab: $x \approx 0{,}5$. Genauer: $x \approx 0{,}543$.

2) Wir ermitteln die Nullstelle der Funktion $y = 2^x + x - 2$. Sie ist die Lösung der gegebenen Gleichung.



Man liest als Lösung ab: $x \approx 0{,}5$. Genauer: $x \approx 0{,}543$. Führe eine Probe durch!

Beispiel 4.20 : Lösung einer Exponentialgleichung mit dem Voyage 200 und Mathcad

Beim Aufladen eines Kondensators (Abb. 4.18) bei $R = 100\ \text{k}\Omega$ gilt:

$$u_C = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

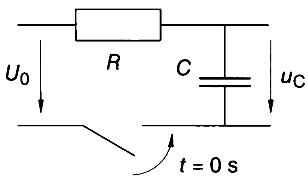


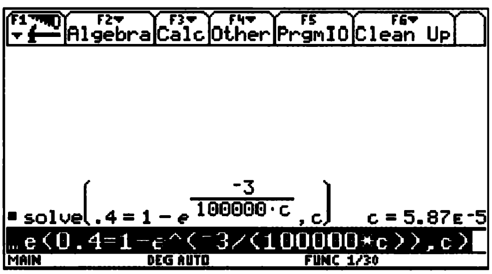
Abb. 4.18

Berechne die Kapazität C, wenn nach $t = 3$ s die Spannung u_C am Kondensator 40% von U_0 beträgt.

Lösung

Setzt man gleich die Zahlenwerte für R und u_C ein, so erhält man nach Kürzen durch U_0 die Gleichung (die Einheiten sind weggelassen):

$$0{,}4 = 1 - e^{-\frac{3}{100000 \cdot C}}.$$



Wir lesen als Lösung ab: $C = 5{,}87 \cdot 10^{-5}\ \text{F} \approx 60\ \mu\text{F}$. Führe eine Probe durch!

MC

Die Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten kann in Mathcad mit Hilfe des Schlüsselwortes "**auflösen**" (Symbolik Palette) erfolgen.

$R := 100 \cdot k\Omega$ Zur Eingabe der Einheit Ω: Aus der Griechisch-Palette oder durch Eintippen von W, gefolgt von [Strg] [G].

Zwischen Zahlenwert und Einheit wird ein Multiplikationszeichen gesetzt, das aber auch entfallen kann.

$t := 3 \cdot s$

$U_0 := 10 \cdot V$

$u_C := 0.4 \cdot U_0$

$$u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right) \text{ auflösen, } C \rightarrow 5.8728455669136530605 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{s}{k\Omega}$$

oder

$$u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right) \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, C} \\ \text{gleit, 3} \end{array} \right. \rightarrow 5.87 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{s}{k\Omega^{1.}}$$

Nach Eingabe des Schlüsselwortes "auflösen" und Eintragen der Unbekannten C in den zugehörigen Platzhalter kann noch das Schlüsselwort "gleit" aus der Symbolikpalette angeklickt werden. Für den dortigen Platzhalter trägt man etwa 3 ein. Damit wird das Ergebnis als Kommazahl mit 3 geltenden Ziffern angezeigt.

Wir fügen noch eine numerische Auswertung durch Eingabe des numerischen Gleichheitszeichens = an.

$$u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right) \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, C} \\ \text{gleit, 3} \end{array} \right. \rightarrow 5.87 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{s}{k\Omega^{1.}} = 5.87 \text{ x } 10^{-5}\, s^4\, A^2\, kg^{-1}\, m^{-2}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass im Format-Menü, Option Ergebnisformat, Registerkarte "Einheiten" nicht "Einheiten wenn möglich vereinfachen" aktiviert ist.

Ersetzt man noch den nach Anklicken sichtbaren Platzhalter im Ergebnis durch μF (Eintippen von μ durch m, gefolgt durch [Strg] [G], oder aus der Griechisch-Palette entnehmen), so erhält man schließlich

$$u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right) \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, C} \\ \text{gleit, 3} \end{array} \right. \rightarrow 5.87 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{s}{k\Omega^{1.}} = 58.7\ \mu F.$$

Natürlich kann die Lösung der Gleichung auch erfolgen, wenn man nur mit den Zahlenwerten rechnet, die Einheiten also insgesamt weglässt.

4.4.2 Logarithmische Gleichungen

Tritt die Gleichungsvariable in einem Term auf, der logarithmiert wird, so spricht man von einer **logarithmischen Gleichung**.

Beispiele: $\lg x = 4$; $\ln (x + 2) = \ln x + 2$; $x + \ln x = 5$.

Kann eine logarithmische Gleichung nicht mit Hilfe der Exponentialfunktion in eine algebraische Gleichung umgeformt werden, dann ist sie nur mit Hilfe von graphischen oder numerischen Näherungsverfahren zu lösen.

Durch "Entlogarithmieren" zu lösende Grundtypen sind:

- $\mathbf{\log_a u = c}$ | beide Seiten zur Basis a erheben
  $a^{\log_a u} = a^c$, woraus folgt: $u = a^c$.
  Anmerkung: $\log_a u = c$ ist gerade die logarithmische Umkehrung von $u = a^c$.
- $\mathbf{\log_a u = \log_a v}$ | beide Seiten zur Basis a erheben
  Aus $\log_a u = \log_a v$ folgt unmittelbar $u = v$.

Bei der Lösung von logarithmischen Gleichungen ist auf die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ der Gleichung zu achten. Logarithmen sind nur für positive Zahlen definiert!

Beispiel 4.21 : Logarithmische Gleichungen

Löse nach x in $\mathbb{R}$:

a) $\ln \frac{x}{2} = -0{,}4$ **b)** $\ln (2x + 4) + \ln (x - 1) = 3$ **c)** $\lg (x + 2) - \lg x = \lg (2x + 1)$

Lösung

Zu **a)** Die Gleichung ist für alle $x > 0$ definiert.

$$\ln \frac{x}{2} = -0{,}4 \quad | \text{ beide Seiten zur Basis e erheben}$$
$$e^{\ln \frac{x}{2}} = e^{-0{,}4}$$
$$\frac{x}{2} = e^{-0{,}4} \quad \text{oder} \quad x = 2 \cdot e^{-0{,}4} = 1{,}341.$$

Probe: $\ln \frac{1{,}341}{2} \approx -0{,}4$.

Zu **b)** Definitionsmenge $\mathbb{D}$: $(2x + 4) > 0 \Rightarrow x > -2$; $(x - 1) > 0 \Rightarrow x > 1$.
Beide Bedingungen müssen zugleich erfüllt sein. Daher: $x > 1$.

$$\ln (2x + 4) + \ln (x - 1) = 3 \quad | \text{ Anwendung des 1. logarithmischen Rechengesetzes.}$$
$$\ln [(2x + 4)(x - 1)] = 3 \quad | \text{ beide Seiten zur Basis e erheben}$$
$$e^{\ln [(2x + 4)(x - 1)]} = e^3$$
$$2x^2 + 2x - 4 = e^3 \quad | \text{ quadratische Gleichung lösen}$$

$x_1 = 3{,}01$; $x_2 = -4{,}01$.

Da nur $x_1 \in \mathbb{D}$, ist $x_1 = 3{,}01$ die einzige Lösung.

Probe: $\ln (2 \cdot 3{,}01 + 4) + \ln (3{,}01 - 1) \approx 3$.

Zu **c)** Definitionsmenge $\mathbb{D}$: $x > -2$ und $x > 0$ und $x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x > 0$.

$$\lg(x+2) - \lg x = \lg(2x+1)$$
$$\lg \frac{x+2}{x} = \lg(2x+1)$$
$$\frac{x+2}{x} = 2x+1$$
$$x + 2 = 2x^2 + x$$
$$-2x^2 + 2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 = 1$$

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; da $-1 \notin \mathbb{D}$, ist $x_1 = 1$ die einzige Lösung.

Probe: $\lg(1+2) - \lg 1 = \lg 3 - 0 = \lg(2 \cdot 1 + 1)$

Beispiel 4.22 : Anwendungsbeispiel

In der Akustik wird das Verhältnis des Schalldruckes p zu einem festgelegten Bezugsschalldruck $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{Nm}^{-2}$ (= Schalldruck an der Hörschwelle) logarithmiert, wodurch sich ein handlicher Zahlenwert ergibt. Man definiert nun als Schallpegel L:

$$L = 10 \cdot \lg \frac{p^2}{p_0^2}\,\text{dB} = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0}\,\text{dB}.$$

Das Zehnfache dieses Logarithmus erhält die Bezeichnung "dB" (vgl. Seite 92, Beispiel 4.13).
Der Schallpegel L bei der Schmerzschwelle beträgt 120 dB. Berechne den zugehörigen Schalldruck p!

Lösung

Zuerst allgemein:

$L = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0}$ | 3. Rechengesetz für Logarithmen anwenden

$L = \lg \left(\frac{p}{p_0}\right)^{20}$ | beide Seiten zur Basis 10 erheben

$10^L = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{20}$

$\sqrt[20]{10^L} = \frac{p}{p_0}$ oder $p = p_0 \cdot \sqrt[20]{10^L} = 20\,\text{Nm}^{-2}$.

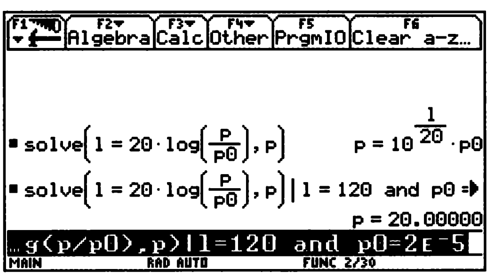
Für $L = 120$ dB:

$120 = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0}$

$6 = \lg \frac{p}{p_0}$ | beide Seiten zur Basis 10 erheben

$10^6 = \frac{p}{p_0}$ oder $p = 10^6 \cdot p_0 = 20\,\text{Nm}^{-2}$.

Voyage 200



Im Überblick: Exponentialgleichung, logarithmische Gleichung

Eine Gleichung, in der die Gleichungsvariable im Exponenten einer Potenz vorkommt, heißt **Exponentialgleichung**.
Einfache Exponentialgleichungen lassen sich oft durch Logarithmieren lösen.

Tritt die Gleichungsvariable in einem Term auf, der logarithmiert wird, so spricht man von einer **logarithmischen Gleichung**.
Bei der Lösung von logarithmischen Gleichungen ist auf die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ der Gleichung zu achten. Sie ergibt sich aus der Tatsache, dass Logarithmen nur für positive Zahlen definiert sind (sowie aus allfälligen sonstigen Einschränkungen wie: keine Division durch 0, kein Radikand negativ).

"Entlogarithmieren" bei einfachen logarithmischen Gleichungen:
(1) Aus $\log_a u = c$ folgt $u = a^c$.
(2) Aus $\log_a u = \log_a v$ folgt $u = v$.
Grundlage dafür ist die Beziehung $a^{\log_a u} = u$, speziell: $e^{\ln u} = u$, $10^{\lg u} = u$.

Aufgaben

Löse folgende Aufgaben in $\mathbb{R}$:

4.36 **a)** $3^x = 81$ **b)** $2^{\frac{x}{2}} = 4$ **c)** $2^{-2x} = \frac{1}{2}$ **d)** $3^{x+2} = 9^x$
e) $2^{x+1} = 0{,}5$ **f)** $4^x - 1 = \frac{2}{3}$ **g)** $3^x = 4$ **h)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = 2$
i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{2}{3}$ **j)** $0{,}4 \cdot 2^{0{,}5 \cdot x} = 0{,}9^x$ **k)** $2 \cdot 4^{-x} = 1$ **l)** $3{,}4^{x-1} = 2 \cdot 4{,}1^x$
m) $\frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **n)** $0{,}2^{1-x} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot 0{,}8^{-x}$ **o)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{340}{468}\right)^x$ **p)** $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$

4.37 **a)** $e^{0{,}3x} = 4$ **b)** $1 - e^{-3t} = 0{,}5$ **c)** $e^{x+1} = 2 \cdot e^{x-1}$ **d)** $1 - 0{,}4 \cdot e^{-\frac{t}{5}} = 0{,}8$
e) $\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 0{,}8$ **f)** $e^{-\left(\frac{t}{10}\right)^2} = 0{,}9$ **g)** $1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} = 0{,}7$ **h)** $e^{-\left(\frac{t}{100}\right)^3} = 0{,}5$

4.38 **a)** $2^{x+1} + 2^x = 4$ **b)** $6 = 3^{x-1} + 2 \cdot 3^{x-3}$ **c)** $4^x + 2^{2x+1} = 3^x - 3^{x-4}$ **d)** $5^x + 5^{x-2} = 3^{2x} - 9^x$
Hinweis: Faktorisiere, d.h. schreibe die Summe (Differenz) als Produkt.

4.39 **a)** $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 3$ **b)** $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 3$ *Hinweis* zu a) und b): setze $u = e^x$.

4.40 **a)** $3^x + 2 \cdot 3^{2x} = 21$ **b)** $2^{-x} + 3 \cdot 2^x = 12{,}25$ *Hinweis* zu a) bzw. b): setze $u = 3^x$ bzw. 2^x.

4.41 Löse nach t:
a) $e^{-\frac{t}{T}} = 0{,}5$ **b)** $e^{-\frac{R}{L}t} = 0{,}8$ **c)** $m = 1 - e^{-2t}$ **d)** $a = 3 \cdot e^{-\lambda t}$ **e)** $h = 50 \cdot 0{,}9^t$

Löse in $\mathbb{R}$:

4.42 **a)** $\lg x = 3$ **b)** $\ln x = \frac{1}{2}$ **c)** $\ln x = 1$ **d)** $\lg (x-3) = 5$
e) $\lg x = -2$ **f)** $\lg \frac{1}{x} = 3$ **g)** $\lg (2x+1) = 0{,}4$ **h)** $\ln (x+3) = -1$
i) $2 \cdot \lg x = \frac{1}{4}$ **j)** $2 \cdot \ln \frac{1}{x} = \frac{3}{4}$ **k)** $\ln \frac{2x}{x+1} = 3{,}1$ **l)** $\lg \frac{2x+1}{x-1} = 0$

4.43 **a)** $\lg x + \lg 5 = 2$ **b)** $\lg 2x = 2 \cdot \lg x$ **c)** $1 + \lg (x-1) = \lg 2x$
d) $\ln (x-2) = \ln (x+3)$ **e)** $\ln (x+1) - 2 = \ln x$ **f)** $\lg (2x+1) - \lg x = 0{,}8$
g) $\ln (3x+1) - 1 = 2 \cdot \ln x$ **h)** $1 - \ln \frac{x}{e} = \ln \frac{x}{2}$ **i)** $\lg x + 1 = \lg \sqrt{x}$

4.44 **a)** $\lg (1-x) - 2 \cdot \lg x = -1$ **b)** $\ln (x^2-4) - \ln (x-2) = 0$
c) $\ln x = 2 + \ln (1-x)$ **d)** $2 \cdot \ln (x+2) = \ln (x+4)$
e) $1 + \ln x = \ln (x+1)$ **f)** $\ln (2x-1) - 2 \cdot \ln x = 1$
g) $\ln (4x-1) - 2 \cdot \ln x = 1$ **h)** $\ln x^2 + \ln x = 1{,}5$
i) $\lg \frac{x}{2} + \lg \left(1 - \frac{x}{2}\right) = -1$ **j)** $\lg (x-3) + 2 \cdot \lg (x+2) = 3 \cdot \lg (x+1)$
k) $\ln (x+3) - \ln x = 5$ **l)** $\lg (x+2) + \lg (x-2) = 4 \cdot \lg x$

4.45 **a)** $x^{\lg x} = 3$ **b)** $x^{\ln x} = 2$ **c)** $2^{1 + \lg x} = 4$ **d)** $3 \cdot 5^{\lg x} = 0{,}6$

4.46 Löse nach der angegebenen Variablen:
a) $\ln \frac{a}{p} = 2;\ p = ?$ **b)** $\lg \frac{I}{I_0} = 3;\ I = ?$ **c)** $\lg \frac{I}{I_0} = -2;\ I = ?$
d) $\ln \frac{2}{a} = -2;\ a = ?$ **e)** $\ln x_0 - \ln x = k;\ x = ?$ **f)** $\lg t - \lg a = 2;\ t = ?$
g) $\ln \frac{2}{p} - \ln 10 = q;\ p = ?$ **h)** $\lg \frac{2}{x+1} = a;\ x = ?$ **i)** $e^{x+2} - 1 = b;\ x = ?$
j) $t = T \cdot \sqrt{-\ln R};\ R = ?$ **k)** $p = e^{25{,}57 - \frac{4934}{T}};\ T = ?$ **l)** $\ln a - \ln \frac{1}{x} = 1;\ x = ?$

4.47 Berechne aus folgenden Formeln die angegebene Variable:
a) $R = e^{-\frac{t}{T}};\quad t = ?$ **b)** $I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x};\quad \mu = ?$
c) $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0};\quad I = ?$ **d)** $R = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b};\quad t = ?$
e) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa - 1};\quad \kappa = ?$ **f)** $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}};\quad \kappa = ?$
g) $S_2 - S_1 = m \cdot R \cdot \ln \frac{p_1}{p_2};\quad \frac{p_1}{p_2} = ?$ **h)** $C = \frac{2\pi\varepsilon \cdot l}{\ln \frac{R}{r}};\quad R = ?$
i) $W = m \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1};\quad V_1 = ?$ **j)** $\alpha = -\frac{1}{\mu} \cdot \ln \frac{F_2}{F_1};\quad \frac{F_2}{F_1} = ?$
k) $v^2 = \frac{m \cdot g}{k}\left(1 - e^{-\frac{2k}{m} \cdot s}\right);\quad s = ?$ **l)** $i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right);\quad t = ?$

4.48 Schreibe folgende Exponentialfunktionen mit der Basis e:
a) $y = 3^x$ **b)** $y = 2{,}8^{-x}$ **c)** $y = 0{,}9^t$ **d)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e)** $y = 0{,}4^{-\frac{t}{2}}$
Hinweis: $a = e^{\ln a}$ (für $a > 0$).

4.49 Löse folgende Aufgaben (Seite 87 ff) rechnerisch:
a) 4.1 c) **b)** 4.2 b) **c)** 4.3 d) **d)** 4.4 c) **e)** 4.5 b) **f)** 4.6 b) **g)** 4.14 c)

4.50 In der Formel $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ für den radioaktiven Zerfall ist N_0 die Anzahl der Kerne zu Beginn, N die Anzahl der nicht zerfallenen Kerne nach der Zeit t und λ die Zerfallskonstante. Zeige, dass $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ die Formel für die Halbwertszeit ist.

4.51 Die Aktivität (Kernzerfälle pro Sekunde, Einheit Bequerel, Bq) einer radioaktiven Substanz lässt sich durch $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ beschreiben, wobei A_0 die Anfangsaktivität, λ die Zerfallskonstante und t die Zeit nach Beginn der Beobachtung bedeuten.

a) Berechne allgemein t aus der Formel!

b) Nach welcher Zeit t besitzt eine Probe von Radon 220 mit $\lambda = 0{,}012\ \text{s}^{-1}$ und $A_0 = 50$ Bq eine Aktivität von 5 Bq?

c) Berechne die Halbwertszeit $T_{1/2}$ von Radon 220!

4.52 Bei einem wichtigen Typ von gedämpften Schwingungen sind die logarithmierten Verhältnisse zweier aufeinander folgender Amplituden $\hat{y}_0$, $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, ... konstant: $\ln \frac{\hat{y}_0}{\hat{y}_1} = \ln \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_2} = \dots$.

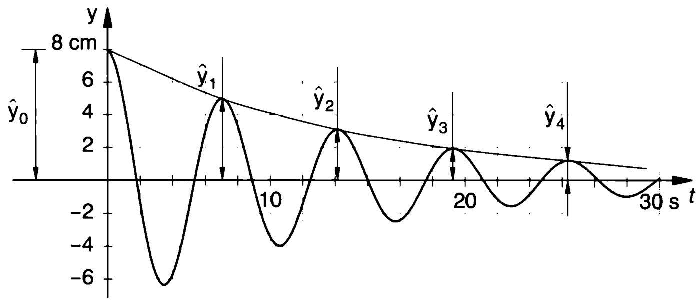


Abb. 4.19

Es wurde gemessen: $\hat{y}_0 = 8{,}0$ cm und $\hat{y}_1 = 5{,}0$ cm.

a) Berechne das logarithmierte Amplitudenverhältnis.

b) Berechne $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$ und $\hat{y}_4$.

c) Stelle *allgemein* eine Beziehung zwischen $\hat{y}_n$ und $\hat{y}_1$ her.

4.53 Über einen festen zylindrischen Körper (Abb. 4.20) ist ein Seil gelegt, mit dem eine Last mit dem Gewicht F_G gleichförmig mit der Kraft F nach oben gezogen wird. Dann gilt: $F = F_G \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$ mit der Reibzahl μ und dem Umschlingungswinkel α, der hier im Bogenmaß einzusetzen ist. Wie groß ist α im Gradmaß, wenn bei $F = 200$ N und $\mu = 0{,}25$ das Gewicht F_G gleich **a)** 180 N **b)** 150 N **c)** 100 N ist?

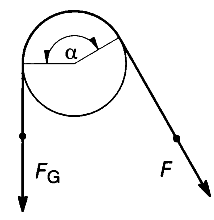


Abb. 4.20

4.54 Wegen der Absorption kann Sonnenlicht nicht in größere Meerestiefen eindringen. Besonderes stark wird rotes Licht absorbiert. Ist I_0 dessen Intensität an der Meeresoberfläche, so beträgt die Intensität $I(x)$ in einer Tiefe x: $I(x) = I_0 \cdot e^{-K \cdot x}$, wobei $K = 2{,}4\ \text{m}^{-1}$ die Absorptionskonstante für rotes Licht ist. Berechne die "Halbwertstiefe" für rotes Licht in Wasser.

4.55 Ein Glas Milch wird zum Zeitpunkt $t = 0$ h aus dem Kühlschrank genommen und auf einen Tisch im Zimmer gestellt. Die Milch erwärmt sich nach der Temperaturgleichung (t in Stunden): $\vartheta = 21\ °\text{C} - 17\ °\text{C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

a) Wie hoch ist die Temperatur im Kühlschrank und im Zimmer?

b) Eine halbe Stunde später hat die Milch eine Temperatur von 10,0 °C. Bestimme daraus die Zeitkonstante τ.

c) Wann ist die Temperatur der Milch gleich 18 °C ?

4.56 Der Schallpegel L kann auch durch das Verhältnis der gegebenen Schallintensität I zur Schallintensität $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{Wm}^{-2}$ bei der Hörschwelle angegeben werden:
$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ dB.

a) Zeige, dass diese Beziehung aus der in Beispiel 4.22 gegebenen Definitionsgleichung für L hergeleitet werden kann, weil $I = \frac{p^2}{Z}$ gilt (Z ist eine konstante Größe, der Schallwellenwiderstand des Mediums).

b) Wie ändert sich der Schallpegel, wenn I bzw. p verdoppelt wird?

4.57 In einem Labor mit einem Motorenprüfstand herrscht ein Schalldruck von 0,2 Nm^{-2}; in einem davon durch eine Wand getrennten Arbeitsraum herrscht ein Schalldruck von 0,01 Nm^{-2}. Wie groß ist die Schalldämmung der Wand?

4.58 Wie groß ist der Schallpegel von drei Schallquellen mit den Schallpegeln $L_1 = 60$ dB, $L_2 = 63$ dB und $L_3 = 64$ dB ?

Hinweis: Schallpegeln dürfen nicht addiert werden! Addiert werden die Schallintensitäten zur Gesamtintensität (oder auch die Quadrate der Schalldrücke). Berechne daher zuerst die Intensitäten I_1, I_2 und I_3 und addiere sie.

4.59 In Abb. 4.21 sind zwei Systeme hintereinander angeordnet. Die Ausgangspannung des ersten Systems ist die Eingangsspannung des zweiten Systems. Berechne das Verhältnis U_3/U_1, wenn die Spannungsdämpfung G_U des ersten Systems −10 dB und die des zweiten Systems −4 dB beträgt.

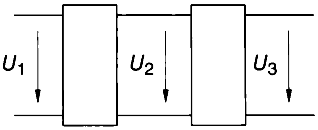


Abb. 4.21

Hinweis: $G_U = 20 \cdot \lg \frac{U_a}{U_e}$ dB mit U_e als Eingangs- und U_a als Ausgangsspannung. Warum müssen hier die dB-Werte addiert werden?

4.60 Die Spannungsdämpfung auf einer Übertragungsstrecke (etwa einem Koaxialkabel) wird ebenfalls durch $G_U = 20 \cdot \lg \frac{U_a}{U_e}$ dB angegeben, wobei wieder U_e und U_a die Eingangs- bzw. Ausgangsspannung ist. Berechne U_a, wenn $U_e = 10$ mV bei $G_U = 6$ dB.

4.61 Es werden zwei gleiche Übertragungsstrecken mit einer Spannungsdämpfung G_U von je 4 dB hintereinander geschaltet. Die Ausgangsspannung der ersten Übertragungsstrecke ist gleich der Eingangsspannung der zweiten Übertragungsstrecke. Wie groß ist die Ausgangsspannung der gesamten Übertragungsstrecke, wenn seine Eingangsspannung 100 mV beträgt?

4.62 Löse graphisch:

a) $2^x - x = 1$ **b)** $3^{-x} + \frac{x}{2} - 0{,}5 = 0$ **c)** $2e^x - 5x = 3$ **d)** $\frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{2}} - x^2 + x + 1 = 0$

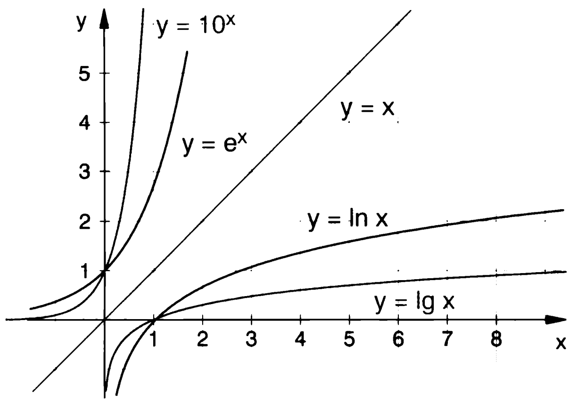
4.63 Löse graphisch:

a) $x + \ln x = 0$ **b)** $x + 2 \cdot \ln(x+1) = 3$ **c)** $\frac{1}{x} \lg x + \sqrt{x+1} = 2$ **d)** $x^2 \cdot \ln(x+3) - 2x = 0$

4.5 Logarithmische Funktionen und Skalen

4.5.1 Logarithmische Funktionen

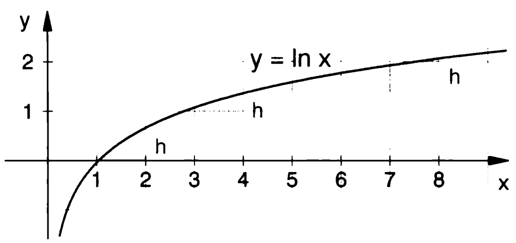
Die Umkehrfunktion der streng monotonen Exponentialfunktion $y = a^x$ ($a > 0$ und $a \neq 1$) heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis a: $y = \log_a x$.



In einem kartesischen Koordinatensystem liegen die Exponentialfunktionen und logarithmischen Funktionen zur gleichen Basis spiegelbildlich zur 1. Mediane $y = x$ (Abb. 4.22).

Abb. 4.22 Logarithmische Funktionen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen

Charakteristische Eigenschaft einer logarithmischen Funktion (Modellvorstellung)



Man erhält *gleiche* Stufenhöhen $\Delta y = h$, wenn die x-Werte etwa von 1 auf 2, von 2 auf 4, von 4 auf 8, usw. fortschreiten, sich also die Schrittweiten Δx von Schritt zu Schritt *verdoppeln*. Dies gilt für jede logarithmische Funktion $y = \log_a x$ mit $a > 1$ und ist auch unabhängig davon, bei welchem $x > 0$ die Verdopplung beginnt.

Abb. 4.23 Charakteristische Eigenschaft einer logarithmischen Funktion

Vergleiche diese Abbildung mit der Abb. 4.3, Seite 78!

Unsere Sinnesorgane "messen" in einem gewissen Bereich annähernd logarithmisch. Bei einer fortschreitenden Verdopplung der Frequenz einer Schallschwingung wird die Zunahme der Tonhöhe als gleich wahrgenommen ("Oktave"). Ähnliches gilt annähernd zwischen Schallintensität und Lautstärke oder zwischen Lichtintensität und Helligkeitsempfinden.

Aus der Tatsache, dass die logarithmischen Funktionen die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen sind, ergeben sich unmittelbar die

Eigenschaften einer Logarithmusfunktion $y = \log_a x$:

1. Sie sind für beliebige **positive** Werte x, also für $x \in \mathbb{R}^+$, erklärt.
2. Ihre Funktionswerte y nehmen alle reellen Zahlen an.
3. Ist $a > 1$, so ist die Logarithmusfunktion überall **streng monoton steigend**. Jede fortschreitende Verdopplung des Argumentes x bewirkt die gleiche Zunahme Δy. Damit steigen die logarithmischen Funktionen nur langsam an.
   Ist $0 < a < 1$, so ist die Logarithmusfunktion überall **streng monoton fallend.**
4. Die Graphen aller Logarithmusfunktionen gehen durch den Punkt (1/0), da $\log_a 1 = 0$.

4.5.2 Logarithmische Skalen

Üblicherweise sind Achsen (x-Achse, y-Achse) gleichabständig geteilt. In den Anwendungen kommen jedoch auch anders geteilte Achsen vor. Eine für die Praxis wichtige Teilung wird im Folgenden besprochen.

Nach Wahl einer bestimmten Längeneinheit l trägt man nicht wie bei einer gleichabständigen Teilung $l \cdot x$, sondern $l \cdot \lg x$ von einem Anfangspunkt A der Achse auf. Man erhält so eine sogenannte **logarithmische Skala** oder eine **logarithmische Teilung** der Achse. Man spricht auch von einer **Logarithmusleiter**.

Beispiel 4.23 : Erstellung einer logarithmischen Skala

a) Es soll für das Intervall [1, 10] eine logarithmische Skala erstellt werden (Zehner-Logarithmus). Als Zeicheneinheit l wird 10 cm gewählt.

b) Wie sieht eine logarithmische Skala für das Intervall [10, 100] aus?

Lösung

Zu **a)** Zuerst wird eine Wertetabelle erstellt:

x	lg x	10 · lg x
1	0	0
2	0,301	3,01
3	0,477	4,77
4	0,602	6,02
...	...	...
8	0,903	9,03
9	0,954	9,54
10	1	10

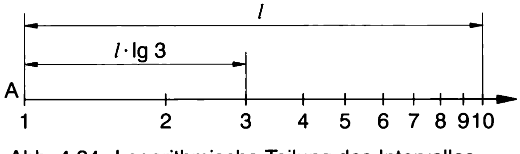


Abb. 4.24 Logarithmische Teilung des Intervalles von 1 bis 10

Aus der Definition eines Logarithmus folgt, dass **logarithmische Skalen nicht mit 0 beginnen** können.

Abb. 4.24 zeigt die logarithmische Teilung des Intervalles [1, 10]. Die Marke "1" fällt mit dem Anfangspunkt A der Achse zusammen. In charakteristischer Weise werden die Abstände zwischen den Teilungsmarken für 2, 3, 4, usw. enger.

Der Abstand zwischen 1 und 10 ist gerade gleich der Zeicheneinheit.
Wegen $\lg 2 = 0{,}3010$ hat die 2-Marke etwa den Abstand $3/10 \cdot l$ von A.
Wegen $\lg 4 = \lg 2^2 = 2 \cdot \lg 2$ und $\lg 8 = \lg 2^3 = 3 \cdot \lg 2$ ist der Abstand zwischen 1 und 4 doppelt und der Abstand zwischen 1 und 8 dreimal so groß wie jener zwischen 1 und 2. Anders gesagt: Die Abstände zwischen 1 und 2, 2 und 4 sowie 4 und 8 sind gleich.

Zu **b)** Wir erstellen wieder eine Wertetabelle:

x	lg x	10 · lg x
10	1	10
20	1,301	13,01
30	1,477	14,77
40	1,602	16,02
...	...	...
80	1,903	19,03
90	1,954	19,54
100	2	20

Beim Vergleich der Tabellen erkennt man, dass die Werte lg x von x = 10, 20, 30, usw. um 1 größer sind als jene von x = 1, 2, 3 usw. Entsprechend sind die Abstände $y_2 = l \cdot \lg x$ jeweils um l größer.

Ist $0 < x < 1$, so ist $\lg x < 0$; die negativen Werte $l \cdot \lg x$ werden von A aus nach links abgetragen. Aus den beiden Wertetabellen des Beispiels 4.23 wird nahegelegt:

> Die logarithmische Teilung von1 bis10 deckt sich mit jener von 10 bis 100, von 0,01 bis 0,1, von 0,1 bis 1, usw.

Beweis:

Wir zeigen, dass die Teilungspunkte für x und 10x, *unabhängig* von x, den Abstand l haben:
$l \cdot \lg(10x) = l \cdot [\lg 10 + \lg x] = l \cdot \lg 10 + l \cdot \lg x = l \cdot 1 + l \cdot \lg x = l + l \cdot \lg x$.

Somit haben etwa 2 und 20, 0,2 und 2 oder 20 und 200 immer den gleichen Abstand l.

Eine logarithmische Skala erstreckt sich oft über mehrere Zehnerpotenzen (Abb. 4.25); sie besteht aus **kongruenten Teilskalen**, die sich nur in der Bezeichnung der Teilungspunkte unterscheiden. Sie besitzt keinen Nullpunkt.

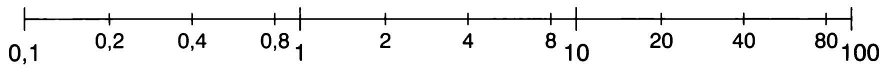


Abb. 4.25 Logarithmische Teilung des Intervalls [0,1; 100]

Für Darstellungen bestimmter Funktionen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem kann es vorteilhaft sein, *eine* oder *beide* Achsen mit einer logarithmischen Skala zu versehen.

Teilt man eine Achse gleichabständig und die andere Achse logarithmisch, so spricht man von einem **einfachlogarithmischen (Funktions-)Papier**. Sind beide Achsen logarithmisch geteilt, so spricht man von einem **doppeltlogarithmischen (Funktions-)Papier**.

Es gibt verschiedene Programme, die eine logarithmische Skalierung bei der graphischen Darstellung von Funktionen ermöglichen. Die folgenden Beispiele wurden mit MathCad ausgeführt. Im Handel gibt es auch einfach- oder doppeltlogarithmische Papiere zu kaufen.

Beispiel 4.24 : Graphen von Exponentialfunktionen auf ordinatenlogarithmischem Papier

Zeichne die Graphen der Funktionen $y = e^{-\frac{x}{2}}$ und $y = 0{,}8 \cdot e^{-x}$ im Intervall $[-4, 4]$ bei logarithmischer Teilung der y-Achse.

Lösung

Das in Abb. 4.26 vorliegende Papier besitzt eine logarithmische Teilung der y-Achse, weshalb es auch ordinatenlogarithmisches Papier genannt wird. Dabei enthält die y-Achse vier kongruente Teilskalen. Die waagrechten grünen Linien markieren in jeder Teilskala eine dezimale Unterteilung: beispielsweise die y-Werte 0,02; 0,03; ... 0,09 zwischen 0,01 und 0,1 oder die y-Werte 0,2; 0,3; ... 0,9 zwischen 0,1 und 1. Besonders fällt auf, dass beide Exponentialfunktionen in diesem Papier als Gerade dargestellt werden.

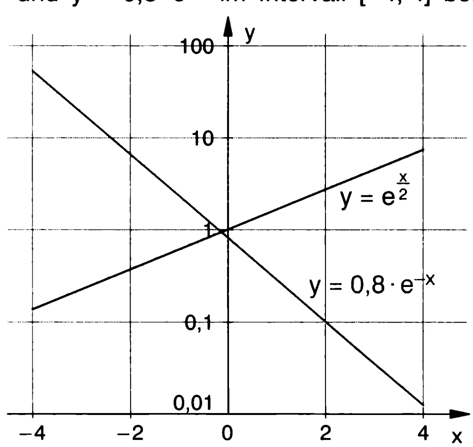


Abb. 4.26 Darstellung von Exponentialfunktionen auf einem ordinatenlogarithmischen Papier

Warum werden Exponentialfunktionen der Form $y = c \cdot e^{ax}$ auf einem ordinatenlogarithmischen Papier als Gerade dargestellt?

Auf der y-Achse wird nicht y, sondern $Y = l \cdot \lg y$ von der 1-Marke aus aufgetragen. l ist die verwendete Zeicheneinheit und damit gleich der Länge einer Teilskala der logarithmischen Skala. l kann gleich 1 gesetzt werden. Wir setzen nun $y = c e^{ax}$.

$\mathbf{Y} = \lg y = \lg (c \cdot e^{ax}) = \lg c + \lg e^{ax} = \lg c + a \cdot x \cdot \lg e = \mathbf{k \cdot x + d}$ mit $k = a \cdot \lg e = 0{,}434 \cdot a$ und $d = \lg c$.

Dies ist eine Geradengleichung!

Ist $a > 0$, so ist auch $k > 0$, d.h. die Gerade hat positive Steigung. Ist dagegen $a < 0$, so hat die Gerade negative Steigung. Unterschiedliche c-Werte führen bei gleichem a auf parallele Gerade.

Beispiel 4.25: Funktionsgraphen auf ordinatenlogarithmischem Papier

Zeichne die Funktion $y = e^{-x^2}$ auf ordinatenlogarithmischem Papier. Überlege vorher die Form des Graphen auf diesem Papier!

Lösung

$Y = \lg y = \lg e^{-x^2} = (-x^2) \cdot \lg e = -0{,}434 \cdot x^2$. Wir erhalten somit in diesem Papier eine quadratische Funktion! Ihr Graph ist wegen $a < 0$ eine sich nach unten öffnende Parabel. Abb. 4.27 und Abb. 4.28 zeigen das unterschiedliche Aussehen der Graphen *derselben* Funktion je nach verwendetem Papier.

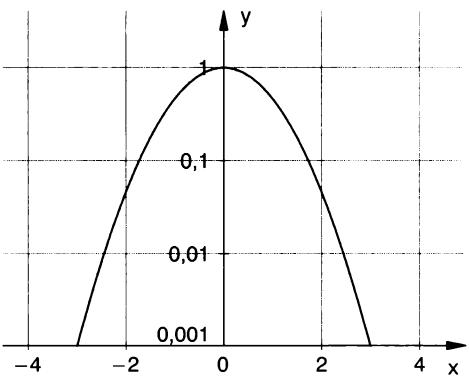


Abb. 4.27 Graph von e^{-x^2} auf ordinatenlogarithmischem Papier

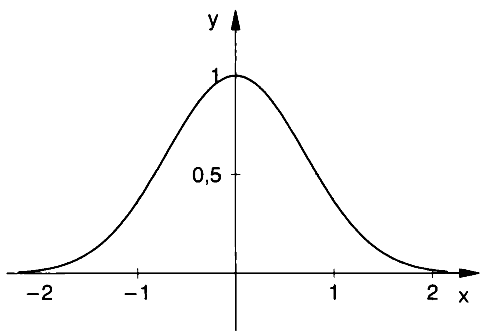


Abb. 4.28 Graph von e^{-x^2} bei gleichabständiger Teilung beider Achsen

Beispiel 4.26 : Logarithmische Funktionen auf abszissenlogarithmischem Papier

Stelle die Funktion $y = 2 \cdot \lg x$ für $x \in [0{,}1; 1000]$ auf einem einfachlogarithmischen Papier dar, dessen *x-Achse* logarithmisch geteilt ist.

Lösung

In diesem Fall spricht man auch von einem *abszissenlogarithmischen Papier.* Wir überlegen zuerst, wie der Graph dieser Funktion auf diesem Papier aussieht.
Auf der x-Achse wird nun nicht x, sondern $X = \lg x$ von der 1-Marke aus aufgetragen. Damit kann geschrieben werden: $\mathbf{y} = 2 \cdot \lg x = \mathbf{2} \cdot \mathbf{X}$. Dies ist auf diesem Papier die Gleichung einer Geraden!

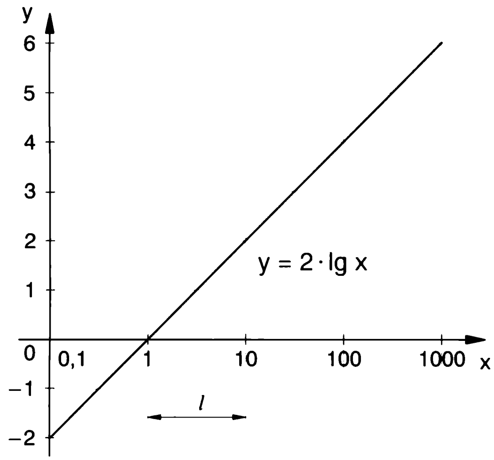


Abb. 4.29 Logarithmische Funktion bei logarithmischer Teilung der x-Achse

Wir skalieren zuerst die x-Achse logarithmisch von 0,1 bis 1000. Dazu wird zuerst eine Zeichenlänge l gewählt und dann vier kongruente Teilskalen mit dieser Länge gezeichnet. Zum Zeichnen der Gerade genügen zwei Punkte (ein dritter dient der Kontrolle):

Wertetabelle:

x	$y = 2 \cdot \lg x$
1	0
100	4
1000	6

Im Beispiel 4.26 erkennt man noch einen weiteren Vorteil einer logarithmischen Teilung. Man kann eine Größe (hier x) über einen *großen* Wertebereich auftragen, wobei die Zeichengenauigkeit relativ gleich bleibt!

Beispiel 4.27 : Doppeltlogarithmische Darstellung

Zeichne die Graphen von $y = 5 \cdot x^2$ und $y = \frac{8}{\sqrt{x}}$ im Intervall [0,1; 10] auf einem doppeltlogarithmischen Papier.

Lösung

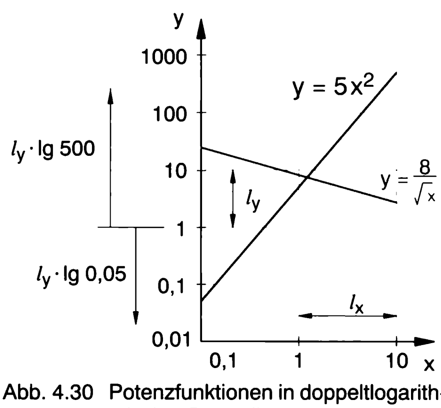


Abb. 4.30 Potenzfunktionen in doppeltlogarithmischer Darstellung

Wir überlegen die Form der Graphen von Potenzfunktionen $y = c\,x^n$. Der Einfachheit halber setzen wir die Zeicheneinheiten l_x und l_y auf den beiden logarithmischen Skalen gleich 1. Dies bedeutet geometrisch nur eine Dehnung oder Streckung der Skalen.

$\mathbf{Y} = \lg y = \lg (c \cdot x^n) = \lg c + \lg x^n = \lg c + n \cdot \lg x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{d}$ mit $k = n$ und $d = \lg c$. Damit erhalten wir eine Geradengleichung für X und Y! Ist $n > 0$, so steigt die Gerade, ist $n < 0$, so fällt sie. Abb. 4.30 zeigt die beiden Funktionsgraphen.

Zum Zeichnen eines Graphen ist zuerst sein Wertebereich der (im Zeichenintervall monotonen) Potenzfunktion festzustellen. Damit kann die nötige Anzahl der Teilskalen auf der y-Achse gefunden werden.

x	$y = 5 \cdot x^2$	$y = \frac{8}{\sqrt{x}}$
0,1	0,05	25,30
1	5	8
10	500	2,53

Daraus folgt, dass die beiden Funktionen graphisch dargestellt werden können, wenn sich die y-Achse von 0,01 bis 1000 erstreckt. Dies sind 5 Teilskalen auf der y-Achse.

Steht kein doppeltlogarithmisches Papier zur Verfügung, muss die Länge l_y einer Teilskala der y-Achse festgelegt werden. Für das Zeichenintervall [0,1; 10] genügen 2 Teilskalen auf der x-Achse mit einer ebenfalls festzulegenden Länge l_x.

Zum Zeichnen des Graphen einer Potenzfunktion, einer Geraden, genügen 2 Punkte (ein dritter Punkt sollte zur Kontrolle gezeichnet werden). Wir wählen $x = 0{,}1$ und $x = 10$. Für die Funktion $y = 5 \cdot x^2$ sind dann die folgenden logarithmierten Ordinatenwerte $Y = l_y \cdot \lg y$ aufzutragen: $l_y \cdot \lg(0{,}05) \approx -1{,}30 \cdot l_y$ bzw. $l_y \cdot \lg(500) \approx +2{,}70 \cdot l_y$. Ist Y negativ, so ist von der 1-Marke nach "unten" abzutragen. Analog geht man bei der Wurzelfunktion vor.

Wir fassen zusammen:

Funktion		Der Graph ist eine **Gerade** im
Exponentialfunktion	$y = c \cdot a^x$	ordinatenlogarithmischen Papier
Logarithmische Funktion	$y = c \cdot \log a^x$	abszissenlogarithmischen Papier
Potenzfunktion	$y = c \cdot x^n$	doppeltlogarithmischen Papier

Wir kehren nun die Aufgabenstellung um: Wie lautet die Gleichung einer Funktion, deren Graph in einem logarithmischen Papier eine Gerade ist?

Beispiel 4.28: Gerade auf einem ordinatenlogarithmischen Papier

In Abb. 4.31 ist die Abkühlung einer Materialprobe in einem ordinatenlogarithmischen Papier dargestellt. Nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz gilt: $y(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $y(t) = \vartheta(t) - \vartheta_K$ und $c = \vartheta_0 - \vartheta_K$. Dabei ist t die Zeit in Stunden, $\vartheta(t)$ die Temperatur zur Zeit t, $\vartheta_K = 5$ °C die Kühlmitteltemperatur und ϑ_0 die Temperatur zur Zeit $t = 0$ h. Bestimme ϑ_0 und k.

Hinweis: $y(t)$ und c sind die Differenzen der momentanen Körpertemperatur bzw. der Anfangstemperatur auf die Kühlmitteltemperatur ("Übertemperaturen").

Lösung

Zur Bestimmung von c und k entnehmen wir zwei Punkte, deren Koordinaten man möglichst genau ablesen kann: (1/80) und (9/7). Einsetzen in $y = c \cdot e^{-kt}$ ergibt:

I: $80 = c \cdot e^{-k \cdot 1}$

II: $7 = c \cdot e^{-k \cdot 9}$

Gleichung II durch Gleichung I ergibt

$\frac{7}{80} = e^{-8k} \Leftrightarrow \ln \frac{7}{80} = -8k$;

daraus: $k \approx 0{,}305\ \text{h}^{-1}$

$c = 80 \cdot e^{0{,}305} \approx 108$ °C;

$\vartheta_0 = \vartheta_K + c \approx 5$ °C + 108 °C = 113 °C.

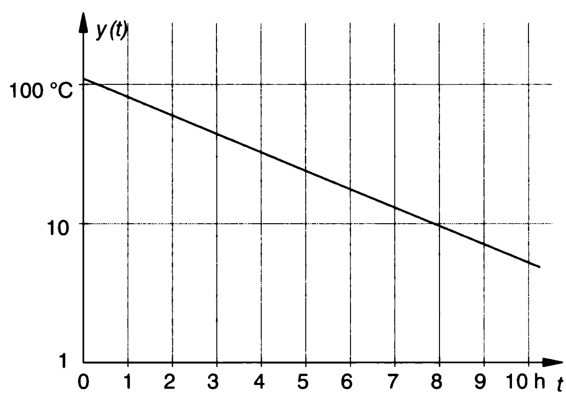


Abb. 4.31 Abkühlung einer Probe

Beispiel 4.29: Gerade auf einem doppeltlogarithmischen Papier

Ermittle die Gleichung der in Abb. 4.32 graphisch dargestellten Funktion.

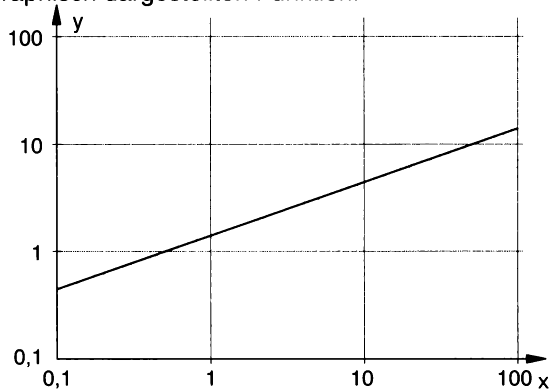


Abb. 4.32

Lösung

Da der Graph in diesem Papier eine Gerade ist, muss es sich um eine Potenzfunktion $y = c \cdot x^n$ handeln. Zur Bestimmung von c und n suchen wir zwei Punkte, von denen man möglichst genau die Koordinaten ablesen kann. Z.B.: (0,5/ 1) und (50/10). Einsetzen in $y = c \cdot x^n$ ergibt:

I: $1 = c \cdot 0{,}5^n$

II: $10 = c \cdot 50^n$

II durch I ergibt:

$10 = \left(\frac{50}{0{,}5}\right)^n = 100^n = 10^{2n} \Rightarrow 2n = 1$ und $n = \frac{1}{2}$.

$c = 0{,}5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}5}} = \sqrt{2}$. Schließlich: $y = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\,x}$.

Im Überblick: Logarithmische Funktionen und Skalen

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$ ($a > 0$ und $a \neq 1$) heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis a: $y = \log_a x$. Sie ist für $x > 0$ definiert.

Für $a > 1$ ist eine Logarithmusfunktion **streng monoton steigend**. Fortschreitende *Verdopplungen* des Argumentes x bewirken *gleiche* Zunahmen Δy. Damit steigen die logarithmischen Funktionen nur langsam an.

Die Graphen aller Logarithmusfunktionen gehen durch den Punkt (1/0), da $\log_a 1 = 0$.

Auf einer **logarithmischen Skala** wird statt eines Zahlenwertes ihr (Zehner-)Logarithmus (multipliziert mit einer Zeicheneinheit) aufgetragen. Sie setzt sich oft aus mehreren kongruenten Teilskalen zusammen.

Logarithmische (Funktions-)Papiere enthalten ein Koordinatensystem, bei dem eine oder beide Achsen logarithmisch geteilt sind. Dementsprechend spricht man von einem abszissen-, ordinaten- oder doppeltlogarithmischen Papier.

Der Funktionsgraph einer
Exponentialfunktion auf einem ordinatenlogarithmischen Papier,
logarithmischen Funktion auf einem abszissenlogarithmischen Papier,
Potenzfunktion auf einem doppeltlogarithmischen Papier ist eine **Gerade**.

Auf einer logarithmischen Skala kann eine Größe über einen *großen* Bereich aufgetragen werden.

Aufgaben

4.64 Zeichne den Graphen folgender Funktion (überlege den Definitionsbereich):

a) $y = \lg(2x)$ **b)** $y = \lg(5x)$ **c)** $y = \lg \frac{x}{2}$ **d)** $y = \lg(x-1)$

e) $y = \ln(x+2)$ **f)** $y = \ln \frac{x-4}{2}$ **g)** $y = \log_2 x$ **h)** $y = \log_4 x$

4.65 Im Jahre 1965 wurde die so genannte Fast Fourier-Transform (FFT) gefunden. Darunter versteht man einen Rechenalgorithmus, der im Zusammenhang mit der elektrischen Übertragung von Signalen (Gesprächen, Musik, Bildern) von Bedeutung ist. Bei n Rechenschritten war die Computerlaufzeit bisheriger Algorithmen stets proportional zu n^2, bei der FFT ist sie proportional zu $n \cdot \log_2 n$. Berechne n^2 und $n \cdot \log_2 n$ und schätze die Laufzeit ab, wenn für einen Rechenschritt 1 µs angenommen wird.
a) $n = 100$ **b)** $n = 1000$ **c)** $n = 100000$ **d)** $n = 1000000$

4.66 Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall [0, 8] bei logarithmischer Skalierung der y-Achse:
a) $y = 0{,}3 \cdot e^x$ **b)** $y = 7{,}4 \cdot e^{\frac{x}{2}}$ **c)** $y = 148 \cdot e^{-0{,}3 \cdot x}$ **d)** $y = 32 \cdot 1{,}8^x$ **e)** $y = 223 \cdot 0{,}77^{2x}$

4.67 Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall [0,1; 100] bei logarithmischer Skalierung der x-Achse:
a) $y = \lg 2x$ **b)** $y = \ln 3x$ **c)** $y = 0{,}5 \cdot \ln \frac{x}{3}$ **d)** $y = 3 \cdot \lg \frac{2x}{3}$ **e)** $y = 0{,}4 \ln \frac{x^2}{3}$

4.68 Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall [1; 10] in doppeltlogarithmischer Darstellung:
a) $y = \frac{x^2}{2}$ **b)** $y = \sqrt[3]{x}$ **c)** $y = 0{,}5 \cdot x^3$ **d)** $y = \sqrt[6]{2x}$ **e)** $y = \frac{8{,}2}{x^2}$

4.69 In welchem Funktionspapier wird die folgende Funktion als Gerade dargestellt?
a) $y = 2^x$ **b)** $y = \frac{1}{x}$ **c)** $y = 3 \cdot \ln \frac{x}{2}$ **d)** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ **e)** $y = 0{,}9^{-x}$

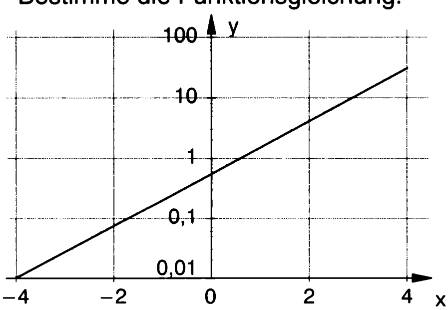
4.70 Um eine exponentielle Temperaturabnahme zu begründen, sollen die Wertepaare (t, ϑ) des Beispiels 4.8 als Punkte in einem entsprechenden Funktionspapier eingetragen werden. Ermittle sodann die Gleichung der Funktion $\vartheta\,(t)$.

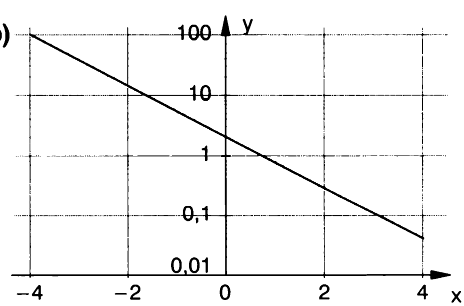
4.71 Bei einer Messung wurden folgende Wertepaare notiert:

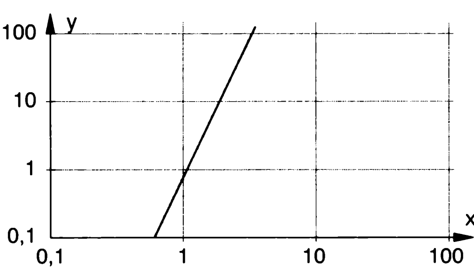
x	2	5	10	40	80
y	1,3	1,8	2,5	5,1	7,2

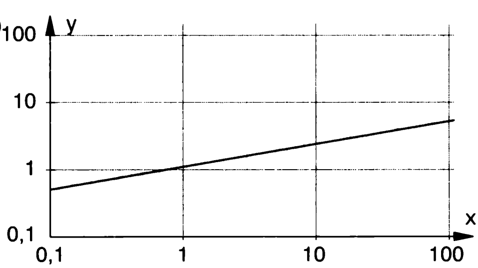
Es soll, nach Darstellung der Messreihe in einem doppeltlogarithmischen Papier, eine näherungsweise Formel für die Abhängigkeit der Größe y von x gefunden werden.

4.72 Bestimme die Funktionsgleichung:

a)


b)


c)


d)


4.6 Hyperbelfunktionen und Areafunktionen

4.6.1 Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen gehören wie die Exponential- und logarithmischen Funktionen zu den transzendenten Funktionen. Sie werden als Summe, Differenz bzw. Quotient von Exponentialfunktionen wie folgt definiert:

Hyperbelsinus:	$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	"Sinus hyperbolicus von x"
Hyperbelcosinus:	$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	"Cosinus hyperbolicus von x"
Hyperbeltangens:	$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	"Tangens hyperbolicus von x"

Man kann auch noch den Hyperbelkotangens als Kehrwert des Hyperbeltangens definieren.

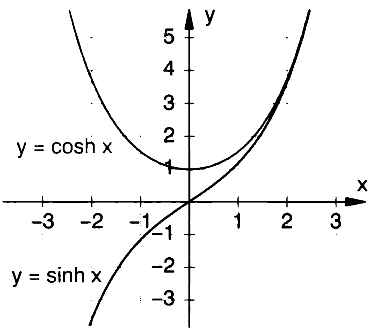


Abb. 4.33 Hyperbelsinus und Hyperbelcosinus

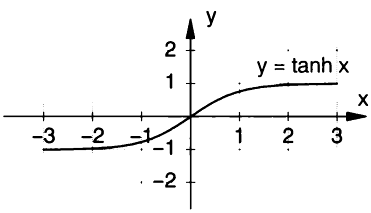


Abb. 4.34 Hyperbeltanges

Beantworte aus Abb. 4.33 und 4.34 folgende Fragen:

1) Gibt es Einschränkungen für die Definitionsbereiche der besprochenen Hyperbelfunktionen?
2) Wie lauten ihre Wertebereiche?
3) Welche Hyperbelfunktionen besitzen Nullstellen?
4) Welche Hyperbelfunktionen sind in ihrem Definitionsbereich streng monoton?
5) Eine der Hyperbelfunktionen ist eine gerade Funktion, die anderen sind ungerade Funktionen. Welche ist die gerade Funktion, welche die ungeraden Funktionen?

Aus Abb. 4.34 erkennt man, dass sich tanhx für wachsende positive x-Werte der Geraden $y = 1$ und dem Betrag nach wachsende negative x-Werte der Geraden $y = -1$ nähern, also Asymptoten sind.

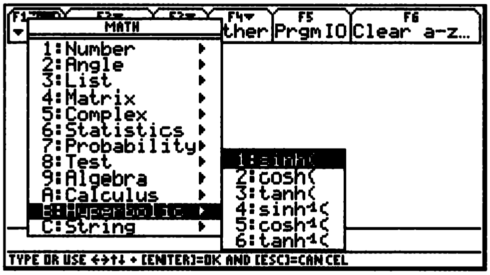
Beispiel 4.30 : Berechnung mit dem Taschenrechner

Berechne **a)** sinh 2,5 **b)** cosh (−3) **c)** tanh 4

Voyage 200

Lösung

Die Eingabe von Funktionen kann, wie schon öfters der Fall, auf unterschiedliche Arten erfolgen:

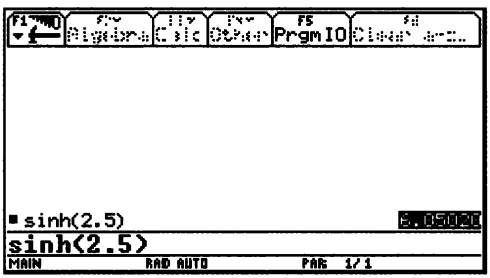


1) Mit 2ND 5 B öffnet man ein Drop-Down-Menü, in dem die hyperbolischen Funktionen aufgelistet sind. Durch Drücken der entsprechenden Zahl oder Auswählen der gewünschten Funktion mit dem Cursor und ENTER wird die gewünschte Funktion in die Eingabezeile geholt.

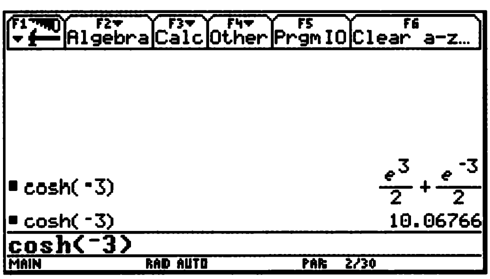
2) Buchstabenweise über die Tastatur.

3) Aus dem Katalog: 2ND 2 und Eingabe des entsprechenden Anfangsbuchstaben und Auswahl mit dem Cursor und ENTER .

Zu **a)**

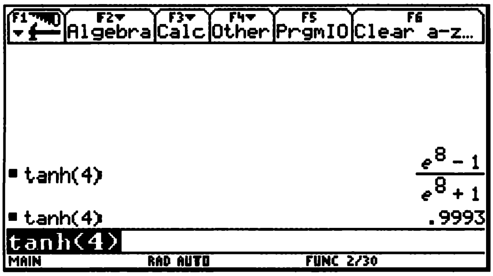


Zu **b)**



Drückt man ENTER , so erhält man das exakte Ergebnis $\frac{e^3}{2}+\frac{e^{-3}}{2}$; drückt man ◆ ENTER , so erhält man ein gerundetes Ergebnis.

Zu **c)**



Der Grund für die Namen der Hyperbelfunktionen liegt in ihrer Entsprechung zu den Kreisfunktionen. Die Hyperbelfunktionen können an der "Einheitshyperbel" (Hyperbel, deren beide Halbachsen gleich 1 sind) ähnlich gedeutet werden wie die Kreisfunktionen am Einheitskreis. Es bestehen Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen, die denen zwischen Kreisfunktionen entsprechen.

Beispiel 4.31 : Beziehung der Hyperbelfunktionen

Zeige: $\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x$

Lösung

$$2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh(2x)$$

Beispiel 4.32 : Kettenlinie

Ein an zwei Punkten gleicher Höhe aufgehängtes, frei hängendes Seil (siehe Abb. 4.35) nimmt unter dem Einfluss der Schwerkraft die Form einer *Kettenlinie* an, die durch einen Hyperbelcosinus beschrieben wird: $y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$. Bestimme den Durchhang d, wenn $s = 100$ m und $a = 40$ m ist.

Lösung

x-Koordinate des Punktes P: $x = 50$;

y-Koordinate des Punktes P:

$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a} = 40 \cdot \cosh \frac{50}{40} = 75{,}5$ m.

Damit:

$d = 75{,}50\text{ m} - 40\text{ m} = 35{,}50$ m.

Beachte: Die x-Achse des Koordinatensystems befindet sich im Abstand *a* unter dem tiefsten Punkt der Kettenlinie. Die y-Koordinate gibt im Allgemeinen nicht die Höhe des Punktes P etwa über dem Bodenniveau an!

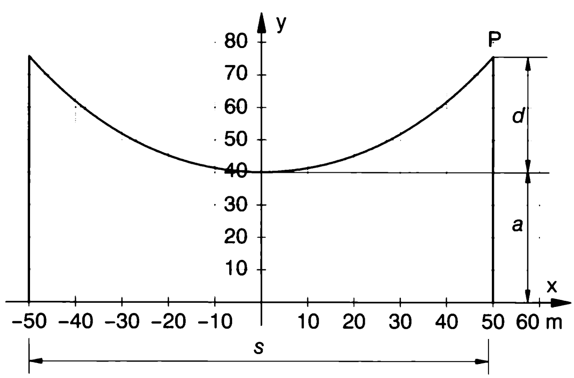


Abb. 4.35 Kettenlinie

4.6.2 Areafunktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen Areafunktionen. Die Funktionen $y = \sinh x$ und $y = \tanh x$ sind in ihren Definitionsbereichen streng monoton und daher umkehrbar. Da die Hyperbelfunktion $y = \cosh x$ in ihrem Definitionsbereich zwei Monotoniebereiche besitzt, muss man sich auf einen Monotoniebereich beschränken; man wählt $[0, \infty[$. Die Wertebereiche der Hyperbelfunktionen werden zu den Definitionsbereichen der Areafunktionen.

Wir definieren:

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen **Areafunktionen**.		
$y = \operatorname{arsinh} x$	"Areasinushyperbolicus von x",	$x \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{arcosh} x$	"Areacosinushyperbolicus von x",	$x \geqslant 1$
$y = \operatorname{artanh} x$	"Areatangenshyperbolicus von x",	$\lvert x \rvert < 1$

Anmerkungen:

(1) Für die Hyperbelfunktionen kann eine Parameterdarstellung angegeben werden, wobei der Parameter als Flächeninhalt eines Hyperbelsektors gedeutet wird. Diese Tatsache ist der Grund für die Bezeichnung "Area" bei der Umkehrung der Hyperbelfunktionen.

(2) Für die Umkehrfunktion des Kotangenshyperbolicus gilt: $\operatorname{arcoth} x = \operatorname{artanh} \frac{1}{x}$ $(\lvert x \rvert > 1)$

Die Graphen der Areafunktionen erhält man durch Spiegelung der Hyperbelfunktionen (der Hyperbelkosinus eingeschränkt auf $[0, \infty[$) an der Geraden $y = x$ (1. Mediane).

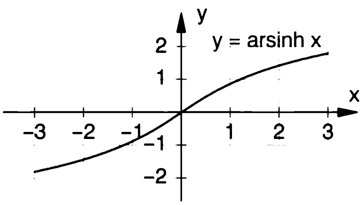


Abb. 4.36 Areasinus-hyperbolicus

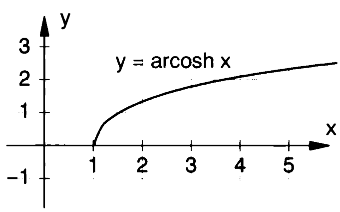


Abb. 4.37 Areacosinus-hyperbolicus

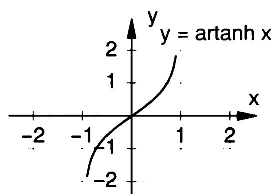


Abb. 4.38 Areatangens-hyperbolicus

Darstellung der Areafunktionen als Logarithmusfunktionen

Im Folgenden wird die Herleitung für die logarithmische Darstellung des Areasinushyperbolicus gezeigt. Die Herleitung für die anderen Areafunktionen wird als Aufgabe empfohlen (siehe Aufgabe 4.80).

a) $y = \operatorname{arsinh} x \;\Leftrightarrow\; x = \sinh y$; diese Gleichung kann man nach y auflösen!

$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$; wir setzen $u = e^y$ und erhalten $x = \frac{u - \frac{1}{u}}{2}$ oder umgeformt $u^2 - 2x \cdot u - 1 = 0$.

Dies ist eine quadratische Gleichung für u: $u_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$.

Überlege, dass $u_1 = x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$, aber $u_2 = x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ ist. Wegen $u = e^y$ und weil e^y stets positiv ist, kann (für eine reelle Lösung) nur $u_1 = x + \sqrt{x^2 + 1} = e^y$ gesetzt werden. Durch Logarithmieren erhält man: $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, also

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

b) $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ für $x \geqslant 1$.

c) $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + x}{1 - x}$ für $\lvert x \rvert < 1$

Voyage 200

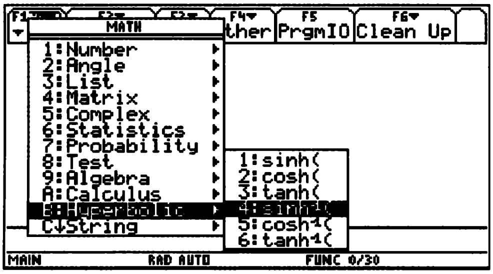
Beispiel 4.33 : Berechnung von Areafunktionswerten

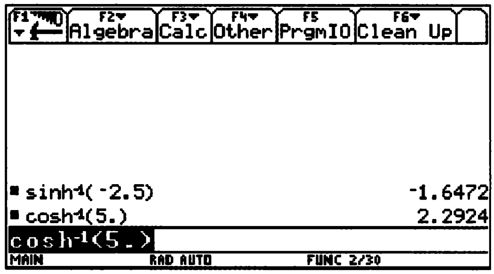
Berechne **a)** arsinh (−2,5) **b)** arcosh 5 **c)** artanh (−3)

Lösung

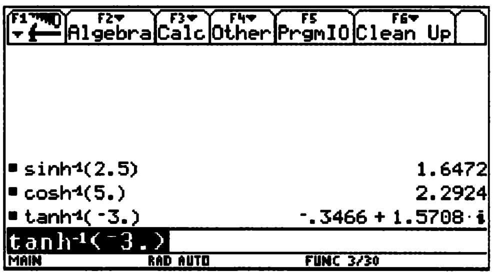
Zu **a)** und **b)**

Mit 2ND 5 B öffnet man im Math-Menü das Untermenü mit den hyperbolischen Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen. Alternativ könnte man auch mit 2ND 2 das Katalog-Menü öffnen und dort die Areafunktionen aufrufen.





Zu **c)**



Die Funktion y = artanh x ist nur für |x| < 1 reell definiert (siehe Abb. 4.38). artanh(-3) ist eine komplexe Zahl.

Beispiel 4.34 : Freier Fall mit Luftwiderstand

Beim freien Fall im lufterfüllten Raum bewirkt der Luftwiderstand, dass die Fallgeschwindigkeit v nur bis zu einem bestimmten Wert, der *Sinkgeschwindigkeit*, ansteigt. Nimmt man an, dass der Luftwiderstand F_R proportional dem Quadrat von v ist ($F_R = kv^2$), so kann man herleiten, dass für ein Fallen aus der Ruhe gilt:

$v = v_S \cdot \tanh \frac{g \cdot t}{v_S}$ mit $v_S = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}}$;

dabei ist t die Fallzeit, m die Masse des fallenden Körpers, $g \approx 10\ \text{ms}^{-2}$ die Fallbeschleunigung. Wir nehmen an, dass für einen Fallschirmspringer gilt: $v_S \approx 4\ \text{ms}^{-1}$.

a) Stelle die Fallgeschwindigkeit v als Funktion der Zeit t dar (Modellannahme: Der Fallschirm ist ab $t = 0$ wirksam; tatsächlich wird er erst nach etwa 2 Sekunden oder auch deutlich später geöffnet).

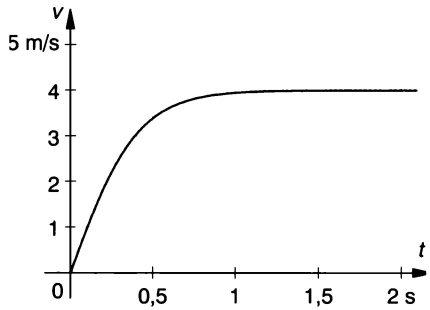
b) Was bedeutet der Faktor v_S?

c) Nach welcher Zeit wird 90% der Sinkgeschwindigkeit erreicht?

Lösung

Zu **a)**

t in s	v in m/s
0	0
0,1	0,9797
0,2	1,8485
0,4	3,0464
0,6	3,6206
0,8	3,8561
1	3,9465
1,5	3,9956
2	3,9996



Zu **b)** Die Funktion y = tanh x nähert sich für wachsende x beliebig dem Wert 1; d.h. v nähert sich daher beliebig dem Wert $1 = v_S$; der Faktor v_S ist also die Sinkgeschwindigkeit.

Anmerkung:
Die Sinkgeschwindigkeit v_S wird erreicht, wenn der Luftwiderstand $F_R = k \cdot v_S^2$ gleich groß geworden ist wie das Körpergewicht $m \cdot g$: $k \cdot v_S^2 = m \cdot g$; daraus erhält man $v_S = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}}$.

Zu **c)** $0{,}9 \cdot v_S = v_S \cdot \tanh \frac{g \cdot t}{v_S}$ oder $0{,}9 = \tanh \frac{g \cdot t}{v_S}$;

Umkehrung: $\frac{g \cdot t}{v_S} = \operatorname{artanh} 0{,}9$;

$t = \frac{v_S}{g} \cdot \operatorname{artanh} 0{,}9 \approx 0{,}6\,\text{s}$; nach etwa 0,6 s wird 90% der Sinkgeschwindigkeit erreicht.

Im Überblick: Hyperbel- und Areafunktionen

Hyperbelfunktionen:

$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

Sie sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Areafunktionen: Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

$y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $x \geqslant 1$.

$y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + x}{1 - x}$, $|x| < 1$

Aufgaben

4.73 Berechne den Funktionswert sowohl direkt als auch über seine Definition durch Exponentialfunktionen mit dem Taschenrechner:
a) sinh 2,1 **b)** sinh (−1,8) **c)** cosh 2,1 **d)** cosh (−2,1)
e) cosh 0 **f)** tanh 2 **g)** tanh 0,4 **h)** tanh (−1,8)

4.74 Zeige: **a)** $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ **b)** $(\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 = \cosh(2x)$
Anmerkung: Statt $(\cosh x)^2$ und $(\sinh x)^2$ schreibt man kurz $\cosh^2 x$ bzw. $\sinh^2 x$.

4.75 Bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes ist die Fallgeschwindigkeit für einen die Zeit t frei fallenden Körper $v = v_S \cdot \tanh\left(\frac{g \cdot t}{v_S}\right)$.
Für einen Rettungsfallschirmspringer wird $v_S = 6\ \mathrm{ms}^{-1}$ angenommen. Ferner nimmt man an, dass der Fallschirm bereits ab $t = 0$ s voll wirksam ist.

a) Stelle die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit t graphisch dar!
b) Ermittle graphisch und rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v = 2{,}5\ \mathrm{ms}^{-1}$ bzw. $5\ \mathrm{ms}^{-1}$ beträgt?
c) Wann wird 50% der Sinkgeschwindigkeit erreicht?
d) Für den Fallweg s kann hergeleitet werden: $s = \frac{v_S^2}{g} \cdot \ln\left(\cosh \frac{g \cdot t}{v_S}\right)$. Berechne s für $t = 0{,}1$ s und 1 s und vergleiche mit dem freien Fall ohne Luftwiderstand ($s = \frac{1}{2} g\, t^2$).
e) Ermittle graphisch und rechnerisch, wie lange ein Fall aus 1000 m Höhe dauert, und vergleiche diesen Wert mit einem freien Fall ohne Luftwiderstand.

4.76 Von einem durchhängenden Seil (siehe Abb. 4.35) sind a = 100 m und s = 300 m gegeben. Berechne den Durchhang.

4.77 Ein Leitungsseil (Abb. 4.39) ist in einer Höhe h = 10 m auf zwei Masten befestigt, die voneinander einen Abstand s = 80 m haben. Die Gleichung der Seilkurve ist durch $y = 800 \cdot \cosh \frac{x}{800} - 791$ gegeben (x und y sind Zahlenwerte für Meterangaben).
a) Wie hoch hängt die Leitung an ihrem tiefsten Punkt über dem Erdboden?

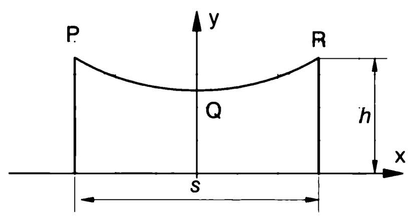


Abb. 4.39

b) Häufig wird eine Kettenlinie durch eine Parabel angenähert. Lege eine Parabel durch die Punkte P, Q und R. Wie groß ist der Unterschied zwischen der Seilkurve und der Parabel für x = 20?

4.78 Ein Leitungsseil (Abb. 4.39) ist in einer Höhe h = 8 m auf zwei Masten befestigt, die voneinander einen Abstand s = 50 m haben.
Die Seilkurve ist durch $y = 200 \cdot \cosh \frac{x}{200} + b$ gegeben.
a) Berechne b!
b) Aus Sicherheitsgründen ist ein Mindestabstand von 5,5 m zwischen tiefstem Seilpunkt und Erdboden gefordert. Wird dies eingehalten?

4.79 Berechne den Funktionswert direkt und über seine logarithmische Darstellung mit dem Taschenrechner:
a) arsinh 2,6 **b)** arsinh (−0,4) **c)** arcosh 1,5 **d)** arcosh 1
e) arcosh 4 **f)** artanh 0 **g)** artanh 0,3 **h)** artanh (−0,8)

4.80 Stelle als logarithmische Funktion dar:
a) y = arcosh x **b)** y = artanh x

5 Kreisfunktionen

Wir haben die Kreisfunktionswerte bisher als wirksames Werkzeug bei der Dreiecksberechnung kennengelernt. Die Bedeutung der Kreisfunktionen geht jedoch weit darüber hinaus; sie beruht auf einer Eigenschaft, die alle bisher besprochenen Funktionen nicht haben: sie sind **periodisch**. Aus diesem Grund werden sie zur Beschreibung von periodischen Vorgängen wie beispielsweise Schwingungen eingesetzt.

5.1 Kreisfunktionswerte beliebiger Winkel

Eine Drehung um einen festen Punkt wird durch einen **(Dreh-)Winkel** angegeben. Er kann beliebige positive (bei Linksdrehung) oder negative Werte (bei Rechtsdrehung) annehmen. Wir betrachten einen am Einheitskreis umlaufenden Punkt P, dessen Drehwinkel gleich α ist (Abb. 5.1).

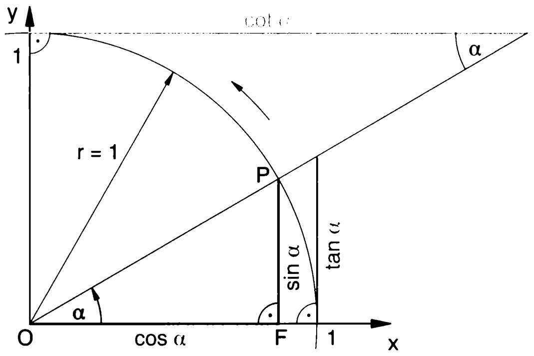


Abb. 5.1 Kreisfunktionen am Einheitskreis.

In Abb. 5.1 sind die vier Kreisfunktionswerte für einen Winkel α zwischen 0° und 90° am Einheitskreis gezeichnet. (vgl. "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 141). Ausgehend von der üblichen Definition der vier Kreisfunktionswerte im rechtwinkligen Dreieck OFP der Abb. 5.1 lässt sich Folgendes feststellen:

(1) Der Sinuswert ist gleich der y-Koordinate, der Kosinuswert gleich der x-Koordinate von P.

(2) Damit folgt im Dreieck OFP, dass

$\tan\alpha = \frac{\overline{FP}}{\overline{OF}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und

$\cot\alpha = \frac{\overline{OF}}{\overline{FP}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Dieser Sachverhalt wird verallgemeinert und man definiert für *beliebige* Winkel:

$\sin\alpha =$ y-Koordinate
$\cos\alpha =$ x-Koordinate
des zu α gehörigen Punktes P am Einheitskreis.

Falls der Nenner $\neq 0$: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Der Kotangens eines Winkels ist nur der Kehrwert des Tangens: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$. Aus diesem Grund kann auf den Kotangens meist verzichtet werden.

Beispiel 5.1 : Kreisfunktionswerte verschiedener Winkel

Gegeben sind die Winkel $\alpha = 60°, 150°, 220°$ und $-45°$.

a) Stelle die Kreisfunktionswerte dieser Winkel am Einheitskreis dar.

b) Ermittle anschließend ihre Werte mit dem Taschenrechner.

Lösung

Zu **a)** Zu beachten ist, dass die Kreisfunktionswerte keine Längen, sondern Koordinaten sind, die negativ sein können. Das Vorzeichen eines Tangens wird durch die Lage des Tangentenabschnitts angezeigt, wenn die Tangente *stets* an der Einsmarke der x-Achse an den Einheitskreis gezeichnet wird. Dazu muss man gegebenenfalls den Strahl von O durch P nach hinten verlängern!

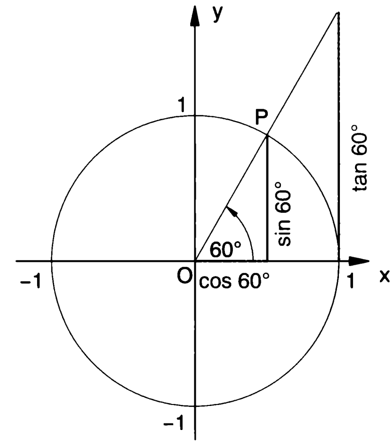


Abb. 4.2 1. Quadrant

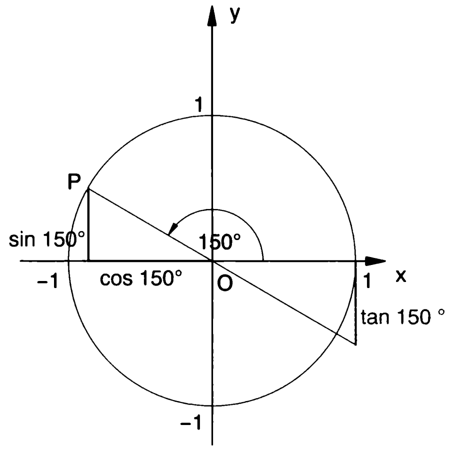


Abb. 4.3 2. Quadrant

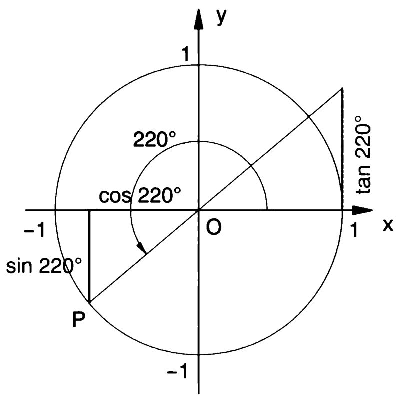


Abb. 4.4 3. Quadrant

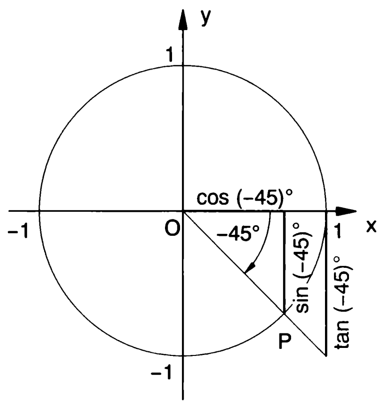


Abb. 4.5 4. Quadrant

Zu **b)** Überlege *vor* der Berechnung mit dem Taschenrechner den ungefähren Wert aus der Zeichnung!

α	60°	150°	220°	−45°
sin α	0,866	0,5	−0,643	−0,707
cos α	0,5	−0,866	−0,766	0,707
tan α	1,732	−0,577	0,839	−1

Hätte man statt $\alpha = -45°$ den positiven Winkel $\alpha = 315°$ verwendet, so würden wir denselben Punkt P am Einheitskreis erhalten; daher: $\sin(-45°) = \sin 315°$, $\cos(-45°) = \cos 315°$, usw.

Wie lauten die exakten Werte für die Winkel 60°, 150° und −45°?
(Siehe eventuell "Ingenieur-Mathematik 1", Aufgabe 4.56, Seite 143)

Aus der Darstellung am Einheitskreis erkennt man:

(1) **Sinus- und Kosinuswerte:** $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ und $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

(2) **Tangenswerte:** Kommt der spitze Winkel α beliebig nahe gegen 90°, so wächst der Tangentenabschnitt über alle Grenzen; $\tan\alpha$ geht gegen ∞. Im 2. Quadranten ist $\tan\alpha$ negativ. Ist $\alpha > 90°$ und dabei jedoch nahe bei 90°, etwa $\alpha = 91°$, so ist $\tan\alpha$ stark negativ; kommt α dabei 90° beliebig nahe, so geht $\tan\alpha$ gegen $-\infty$. Eine weitere "Unendlichkeitsstelle" ist 270°. Für $\alpha = 90°$ und $\alpha = 270°$ ist daher $\tan\alpha$ nicht definiert. Somit: $-\infty < \tan\alpha < \infty$.

Damit ist zu jedem Winkel α genau ein Sinus-, Kosinus- und Tangenswert definiert (beim letztgenannten mit Ausschluss jener Winkel, für die der Nenner gleich 0 ist). Es liegen daher drei Funktionen vor, die man **Kreisfunktionen, Winkelfunktionen** oder **trigonometrische Funktionen** nennt.

Einige häufig auftretende Kreisfunktionswerte (überlege am Einheitskreis):

α	0° = 0 rad	90° = $\pi/2$	180° = π	270° = $3\pi/2$	360° = 2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Das Symbol "∞" oder "$-\infty$" bedeutet, dass bei beliebiger Annäherung an den betreffenden Winkel α die Funktionswerte über oder unter alle Schranken wachsen; die Funktion ist dort nicht definiert.

! Es ist vorteilhaft, sich die bildliche Darstellung der Kreisfunktionswerte am Einheitskreis einzuprägen! Bei einiger Übung ist es möglich, mit einer Skizze oder auch allein aus der Vorstellung verschiedene Sachverhalte bei Kreisfunktionen am Einheitskreis "abzulesen".

Periodizität der Kreisfunktionen

Wird 360° zum Winkel α addiert oder von ihm subtrahiert, so nimmt der zugehörige Punkt am Einheitskreis dieselbe Lage ein wie beim Winkel α; d.h. alle vier Kreisfunktionswerte haben wieder denselben Wert wie beim Winkel α.

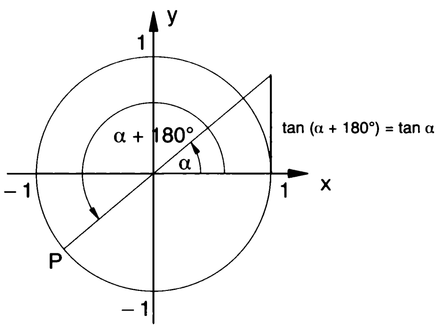


Abb. 5.6 Periodizität des Tangens und Kotangens

Beispielsweise gilt:

$\sin 30° = \sin 390° = \sin 750° = \sin(-330)° = \ldots$

Die Tangenswerte wiederholen sich aber schon nach einer Addition oder Subtraktion von 180°, wie man für die Addition von 180° aus Abb. 5.6 entnimmt.

Beispielsweise gilt:

$\tan 30° = \tan 210° = \tan 390° = \tan(-150°) = \ldots$

Periodizität der Kreisfunktionen

$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha$
$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\tan(\alpha + k \cdot 180°) = \tan\alpha$

Kreisfunktionen negativer Winkel

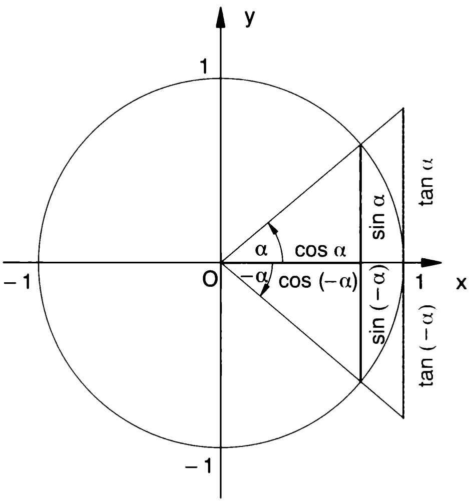


Abb. 5.7 Kreisfunktionswerte negativer Winkel

Die Kreisfunktionen negativer Winkel können in einfacher Weise auf positive Winkel zurückgeführt werden. Aus der Darstellung am Einheitskreis erkennt man unmittelbar, dass für α und $-\alpha$ die Sinus-, Tangenswerte entgegengesetzt gleich, die Kosinuswerte jedoch gleich sind:

Kreisfunktionen negativer Winkel

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

Beispiel 5.2 : Winkel zu einem Kreisfunktionswert

Ermittle mit Hilfe des Taschenrechners jene Winkel α zwischen 0° und 360°, für die

a) $\sin\alpha = 0{,}8$ **b)** $\cos\alpha = -0{,}7$ **c)** $\tan\alpha = 1{,}5$ **d)** $\cot\alpha = 0{,}6$

Lösung

Zu **a)**

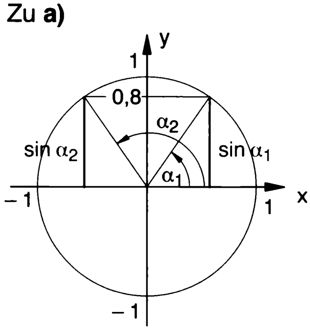


Abb. 5.8

Aus Abb. 5.8 entnimmt man, dass es zwischen 0° und 360° *zwei* Winkel gibt, für die der Sinuswert gleich 0,8 ist!

Taschenrechnerergebnis: $\alpha_1 = 53{,}1°$.

Man überlegt leicht, dass $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 126{,}9°$.

Probe: $\sin\alpha_2 = 0{,}8$.

Auch $\alpha_1 + 360° = 413{,}1°$ besitzt als Sinuswert 0,8. So könnte man fortfahren, es gibt unendlich viele Winkel α mit $\sin\alpha = 0{,}8$. Diese Winkel liegen jedoch alle schon außerhalb des vorgegebenen Winkelbereichs von 0° bis 360°.

Zu **b)**

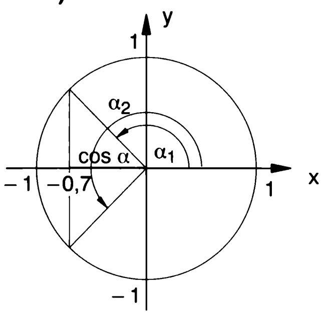


Abb. 5.9

Taschenrechner: $\alpha_1 = 134{,}4°$.

Auch hier gibt es wieder (Abb. 5.9) zwei Winkel, deren Kosinuswert gleich $-0{,}7$ ist:

$\alpha_1 = 134{,}4°$; $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 = 225{,}6°$ (überlege!);

Probe: $\cos \alpha_2 = -0{,}7$.

Zu **c)**

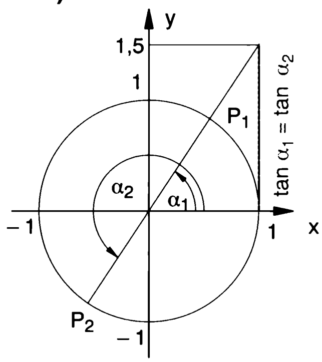


Abb. 5.10

Taschenrechner: $\alpha_1 = 56{,}3°$. Man entnimmt aus Abb. 5.10, dass ein zweiter möglicher Winkel $\alpha_2 = \alpha_1 + 180° = 236{,}3°$ ist (jeder Tangenswert wiederholt sich nach 180°!).

Probe: $\tan \alpha_2 = 1{,}5$.

Zu **d)** Da $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$, gilt $\tan \alpha = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}667$. Daraus $\alpha_1 = 59{,}0°$ und $\alpha_2 = \alpha_1 + 180° = 239{,}0°$.

Achtung!

Ist ein Kreisfunktionswert gegeben und der Winkel gesucht, so gibt der Taschenrechner nur einen einzigen möglichen Winkel (nämlich jenen, der dem Winkel 0° am nächsten liegt) an. Der Anwender muss selbst entscheiden, ob dieser Winkel schon der gesuchte ist oder dieser daraus erst überlegt werden muss!

Begründe, warum tan α positives Vorzeichen besitzt, wenn sin α und cos α gleiches Vorzeichen, und negatives Vorzeichen besitzt, wenn sin α und cos α ungleiches Vorzeichen haben.

Zusammenfassend ist in der folgenden Tabelle das Vorzeichenverhalten der Kreisfunktionen für Winkel α in den vier Quadranten zusammengefasst.

	1. Quadrant	2. Quadrant	3. Quadrant	4. Quadrant
sinα	+	+	–	–
cosα	+	–	–	+
tanα	+	–	+	–

Beispiel 5.3 : Resultierende eines ebenen Kräftesystems

Vier Kräfte (Abb. 5.11) mit den Beträgen $F_1 = 350$ N, $F_2 = 400$ N, $F_3 = 300$ N und $F_4 = 250$ N greifen in einem Massenpunkt an. Die zwischen der positiven x-Achse und der jeweiligen Kraft gemessenen Winkel sind: $\alpha_1 = 20°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = 220°$ und $\alpha_4 = 340°$.

Bestimme rechnerisch den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$ sowie den Winkel α_R, den sie mit der positiven x-Achse einschließt.

Lösung

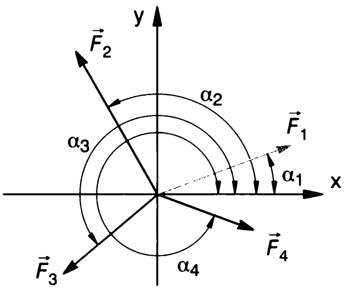


Abb. 5.11 Kräfte in der Ebene

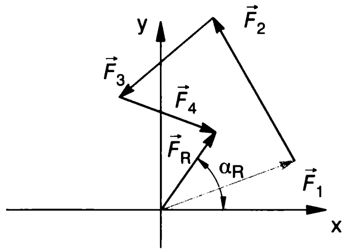


Abb. 5.12 Kräfteplan als graphische Lösung

Ist die Richtung eines beliebigen Vektors $\vec{a}$ mit dem Betrag a durch seinen Winkel zur positiven x-Achse gegeben, so können seine Koordinaten für jede Lage einheitlich angegeben werden. In Abb. 5.13 hat die Vektorspitze P nach der Definition des Sinus und Kosinus eines beliebigen Winkels α vorzeichenrichtig die Koordinaten $a \cdot \cos\alpha$ und $a \cdot \sin\alpha$, was daher auch die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$ sind.

Wir können daher schreiben:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos\alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin\alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos\alpha_4 \\ F_4 \cdot \sin\alpha_4 \end{pmatrix}.$$

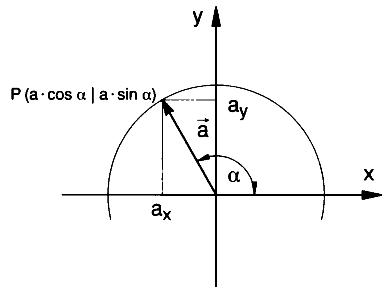


Abb. 5.13 Koordinaten eines Vektors

Die resultierende Kraft ist die Vektorsumme der vier Kräfte: $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i$. Diese Vektorgleichung zerfällt in zwei Gleichungen für die Koordinaten (skalaren Komponenten) in x- und y-Richtung. Sind F_{Rx} und F_{Ry} die Koordinaten der resultierenden Kraft F_R, so gilt:

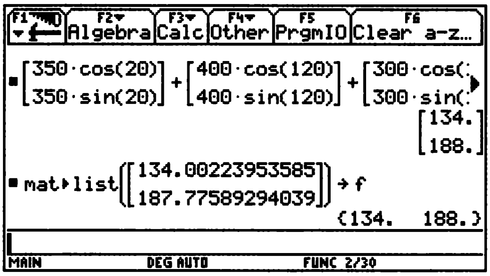
$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{4} F_i \cdot \cos\alpha_i =$$
$$= 350\text{ N} \cdot \cos 20° + 400\text{ N} \cdot \cos 120° + 300\text{ N} \cdot \cos 220° + 250\text{ N} \cdot \cos 340° = 134\text{ N}.$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{4} F_i \cdot \sin\alpha_i =$$
$$= 350\text{ N} \cdot \sin 20° + 400\text{ N} \cdot \sin 120° + 300\text{ N} \cdot \sin 220° + 250\text{ N} \cdot \sin 340° = 188\text{ N};$$

Damit ergibt sich

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 231\text{ N} \quad \text{und} \quad \tan\alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = 1{,}403 \quad \Rightarrow \quad \alpha_R = 54{,}5°.$$

Voyage 200



Der Summenvektor $\vec{F}_R$ kann durch den mat▶list-Befehl (im MATH/List-Menü) in eine einfache Liste von Zahlenwerten umgewandelt werden. Diese kann etwa unter dem Namen f gespeichert werden. f[1] und f[2] sind dann die Koordinatenwerte F_{Rx} und F_{Ry}, mit denen weitergerechnet werden kann.

Beispiel 5.4 : Übungen am Einheitskreis

Bestätige am Einheitskreis die Richtigkeit folgender Beziehungen:

a) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ und $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

b) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

c) $\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$

Lösung

Die Richtigkeit der Beziehungen erkennt man unmittelbar aus dem Vergleich von kongruenten rechtwinkligen Dreiecken in den folgenden Abbildungen.

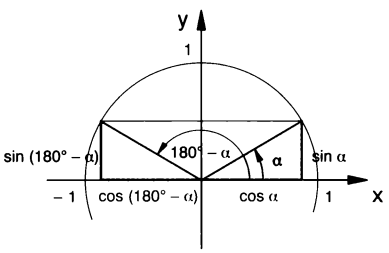


Abb. 5.14 Zu **a)**

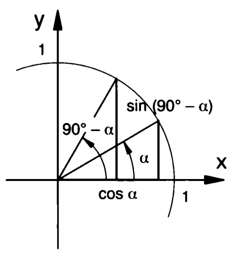


Abb. 5.15 Zu **b)**

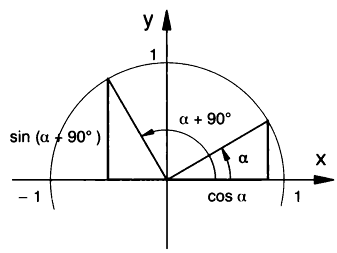


Abb. 5.16 Zu **c)**

Die Beziehungen gelten allgemein und nicht nur, wie in den Abbildungen gezeigt, für spitze Winkel α. Es gibt eine große Anzahl von Beziehungen ähnlich jenen in diesem Beispiel. Man kann sie leicht am Einheitskreis bestätigen.

Beispiel 5.5 : Vereinfachungen

a) sin 220° ist auf einen Kreisfunktionswert eines spitzen Winkels zurückzuführen.

b) Vereinfache den Term $\frac{\cos(\alpha - 450°)}{\sin(\alpha + 450°)}$; mit Zahlenprobe $\alpha = 30°$.

Lösung

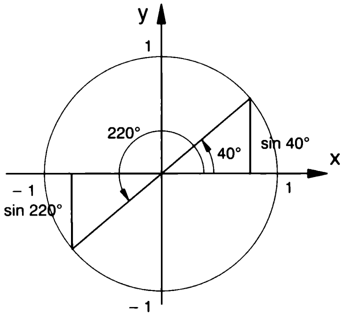


Abb. 5.17

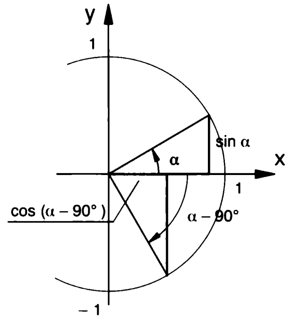


Abb. 5.18

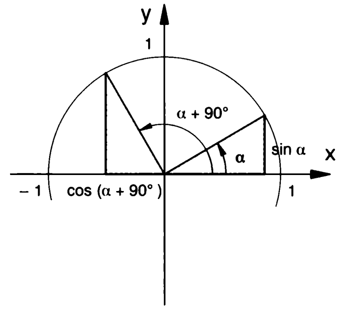


Abb. 5.19

Zu **a)** 220° ist ein Winkel, der im 3. Quadranten liegt; sin 220° muss daher negativ sein.

$\sin 220° = \sin(40° + 180°) = -\sin 40°$, wie man der Abb. 5.17 entnimmt.

Überlege, dass $\sin 40° = \cos 50°$ ist und dass daher auch $\sin 220° = -\cos 50°$.

Bestätige die Umformung mit dem Taschenrechner!

Zu **b)** Auf Grund der Periodizität sowie von Abb. 5.18 und von Abb. 5.19 folgt

$$\frac{\cos(\alpha - 450°)}{\sin(\alpha + 450°)} = \frac{\cos(\alpha - 90°)}{\sin(\alpha + 90°)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

Zahlenprobe: $\dfrac{\cos(30° - 450°)}{\sin(30° + 450°)} = \dfrac{\cos(-420°)}{\sin 480°} = 0{,}577;\quad \tan 30° = 0{,}577.$

Aufgaben

5.1 Zeichne einen Einheitskreis (Zeicheneinheit: 5 cm) und ermittle durch Abmessen im Rahmen der Zeichengenauigkeit die folgenden Kreisfunktionswerte. Vergleiche dann mit dem Taschenrechnerergebnis!

a) sin 50°	**b)** cos 50°	**c)** tan 50°	**d)** cot 50°
e) sin 140°	**f)** cos 140°	**g)** tan 140°	**h)** cot 140°
i) sin 240°	**j)** cos 240°	**k)** tan 240°	**l)** cot 240°
m) sin 325°	**n)** cos 325°	**o)** tan 325°	**p)** cot 325°

5.2 Setze das richtige Zeichen: =, < oder > nach Überlegung am Einheitskreis. Bestätige dann das Ergebnis mit dem Taschenrechner.

a) sin 20°	sin 30°	**b)** cos 20°	cos 30°	**c)** tan 20°	tan 30°
d) sin 40°	tan 40°	**e)** sin 40°	sin 140°	**f)** cos 40°	cos 140°
g) sin 50°	sin (–50°)	**h)** cos 50°	cos (–50°)	**i)** tan 40°	tan 220°

5.3 Veranschauliche am Einheitskreis an Hand eines spitzen Winkels α, dass gilt:

a) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

b) $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$

c) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

5.4 Ebenso:

a) $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$

b) $\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$

c) $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$
$\tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha$

5.5 In welchem der vier Quadranten kann α liegen, wenn

a) $\sin\alpha = 0{,}2$ **b)** $\cos\alpha = 0{,}8$ **c)** $\tan\alpha = 0{,}3$
d) $\sin\alpha = -0{,}4$ **e)** $\cos\alpha = -0{,}5$ **f)** $\tan\alpha = -3$

5.6 Die folgenden Kreisfunktionswerte sind mit derselben Funktion mit einem spitzen Winkel α ($0 < \alpha < 90°$) zu schreiben. Bestätige das Ergebnis mit dem Taschenrechner.

a) $\sin 160°$ **b)** $\sin 201°$ **c)** $\cos 144°$ **d)** $\cos 218°$
e) $\sin 315°$ **f)** $\cos 298°$ **g)** $\tan 212°$ **h)** $\tan 308°$
i) $\sin 400°$ **j)** $\sin 520°$ **k)** $\cos 485°$ **l)** $\cos 1000°$

5.7 Bestimme die möglichen Winkel α mit $0° \leqslant \alpha < 360°$. Überlege am Einheitskreis (ohne Verwendung des Taschenrechners!):

a) $\sin\alpha = 0$ **b)** $\cos\alpha = 0$ **c)** $\sin\alpha = 1$ **d)** $\cos\alpha = 1$
e) $\sin\alpha = -1$ **f)** $\cos\alpha = -1$ **g)** $\tan\alpha = 0$ **h)** $\tan\alpha = 1$

5.8 Bestimme die Winkel α mit $0° \leqslant \alpha < 360°$ mit dem Taschenrechner:

a) $\sin\alpha = 0{,}32$ **b)** $\sin\alpha = 0{,}67$ **c)** $\cos\alpha = 0{,}86$
d) $\sin\alpha = -0{,}44$ **e)** $\cos\alpha = -0{,}17$ **f)** $\tan\alpha = 1{,}92$
g) $\tan\alpha = -0{,}35$

5.9 Bestimme die Winkel x im Bogenmaß $0 \leqslant x < 2\pi$ mit dem Taschenrechner:

a) $\sin x = 0{,}44$ **b)** $\sin x = 0{,}70$ **c)** $\cos x = 0{,}81$
d) $\sin x = -0{,}39$ **e)** $\cos x = -0{,}75$ **f)** $\tan x = 4{,}22$
g) $\tan x = -0{,}80$

5.10 Vereinfache (x ist ein Winkel im Bogenmaß):

a) $\sin(\pi - x)$ **b)** $\cos(\pi - x)$ **c)** $\sin(\pi + x)$ **d)** $\cos(\pi + x)$
e) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **f)** $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **g)** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **h)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
i) $\sin(x + 3\pi)$ **j)** $\cos(x + 3\pi)$ **k)** $\sin(x + 5\pi)$ **l)** $\sin(x - 2\pi)$
m) $\cos(x - 2\pi)$ **n)** $\tan(x + \pi)$ **o)** $\tan(x - \pi)$ **p)** $\tan(x + 3\pi)$

5.2 Zusammenhang zwischen den Kreisfunktionen

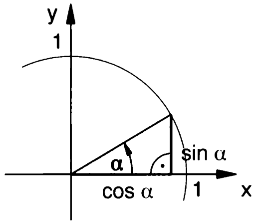


Abb. 5.20 Zum "trigonometrischen Pythagoras"

Bei Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck in Abb. 5.20 entnimmt man: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Für $\sin \alpha \cdot \sin \alpha = (\sin \alpha)^2$ wird üblicherweise kurz $\sin^2 \alpha$ geschrieben; dies darf nicht mit $\sin \alpha^2 = \sin (\alpha \cdot \alpha)$ verwechselt werden. Entsprechendes gilt auch bei den anderen drei Kreisfunktionen!

Zusammen mit den Definitionsgleichungen für den Tangens und Kotangens bestehen nun die folgenden grundlegenden Beziehungen:

Grundbeziehungen zwischen den Kreisfunktionen

(1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(2) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(3) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$

Aus Gleichung (1) folgt $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ oder $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

Beispiel 5.6 : Umrechnung zwischen den Kreisfunktionen

a) Zeige: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

b) Zeige, dass für $0 \leqslant \alpha < 90°$ gilt: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$.
Führe anschließend die Zahlenprobe mit $\alpha = 70°$ durch.

c) Von einem *spitzen* Winkel α kennt man $\sin \alpha = 0{,}8$. Berechne $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ohne vorherige Berechnung des Winkels α mit dem Taschenrechner. Überprüfe die Rechnung am Einheitskreis!

Lösung

Zu **a)** $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Zu **b)** Wir formen den rechts stehenden Term um:

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

Zahlenprobe: $\tan 70° = 2{,}747$; $\frac{\sin 70°}{\sqrt{1 - \sin^2 70°}} = 2{,}747$.

Zu **c)**

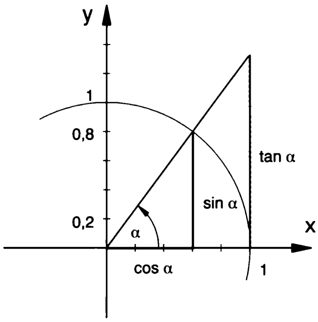


Abb. 5.21

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5};$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}.$

Nach der Vorgangsweise in Beispiel 5.6 kann man auch allgemein für Winkel α mit $0 \leqslant \alpha < 90°$ folgende **Umrechnungstabelle** herleiten:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\sin\alpha =$	–	$\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$	–	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$
$\tan\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	–

Aufgaben

5.11 Von einem spitzen Winkel α kennt man einen Kreisfunktionswert. Bestimme *ohne* Verwendung des Taschenrechners die drei anderen Kreisfunktionswerte!

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ **b)** $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ **c)** $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

d) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ **e)** $\cos\alpha = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ **f)** $\tan\alpha = \sqrt{3}$

5.12 Vereinfache folgende Terme (α ist ein spitzer Winkel):

a) $\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$ **b)** $\frac{\cos\alpha}{\cot\alpha}$ **c)** $\tan\alpha\cdot\cot\alpha$

d) $\tan\alpha\cdot\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ **e)** $\cot\alpha\cdot\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ **f)** $\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$ **h)** $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$ **i)** $\frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

j) $\sin\alpha\cdot\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$ **k)** $\frac{\cos\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$ **l)** $\frac{\sin\alpha}{1 + \cot^2\alpha}$

5.3 Trigonometrie des schiefwinkligen Dreiecks

Ein Dreieck, das nicht rechtwinklig ist, heißt **schiefwinkliges** oder **allgemeines Dreieck**. Ein solches Dreieck ist durch drei unabhängige Bestimmungsstücke festgelegt. Wir beschränken uns dabei auf Seiten und Winkel (dabei muss mindestens eine Seite darunter sein). Dann können unbekannte Seiten oder Winkel stets mit Hilfe des **Sinussatzes** oder des **Kosinussatzes** berechnet werden.

Beispiel 5.7 : Einführendes Beispiel – Sinussatz

Von einem Dreieck ABC kennt man: b = 10,0 cm; $\alpha = 65°$; $\beta = 42°$. Berechne die Seiten a und c.

Lösung

Für den dritten Winkel γ gilt: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 73°$; d.h. es liegt kein rechtwinkliges Dreieck vor.

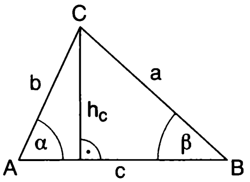


Abb. 5.22 Zur Herleitung des Sinussatzes

Durch die Höhe h_c wird das Dreieck ABC in Abb. 5.22 in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Es gilt:

$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha;$

$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a \cdot \sin\beta.$

Setzt man die für h_c erhaltenen Terme gleich, so erhält man

$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ oder $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. (*)

Daraus: $a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 13{,}5$ cm.

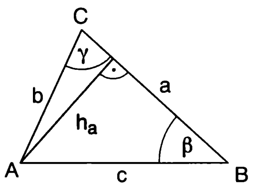


Abb. 5.23 Zur Herleitung des Sinussatzes

Man kann im Dreieck ABC auch die Höhe h_a einzeichnen (Abb. 5.23) und dann wieder wie oben vorgehen:

$\sin\beta = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \cdot \sin\beta;$

$\sin\gamma = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \cdot \sin\gamma.$

Setzt man die für h_a erhaltenen Terme gleich, so erhält man

$c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$ oder $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. (**)

Daraus: $c = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 14{,}3$ cm.

Die Beziehungen (*) und (**) kann man auch für ein beliebiges stumpfwinkliges Dreieck ableiten. Fasst man diese beiden Beziehungen zusammen, so erhält man den

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Die Seiten eines beliebigen Dreiecks verhalten sich wie die Sinuswerte ihrer *gegenüberliegenden* Winkel.

Der Sinussatz enthält also *mehrere* Gleichungen. Eine dieser Gleichungen kann zur Seiten- oder Winkelberechnung dienen, wenn gegeben sind:

- Zwei Seiten und einer der gegenüberliegenden Winkel,
- eine Seite und zwei Winkel (wie in Beispiel 5.7).

In den anderen Fällen hilft der Kosinussatz weiter.

Wie lautet der Sinussatz, wenn das Dreieck rechtwinklig ist, etwa $\gamma = 90°$ ist ?

Beispiel 5.8 : Einführendes Beispiel – Kosinussatz

Von einem Dreieck ABC kennt man: $b = 5{,}2$ cm; $c = 6{,}0$ cm; $\alpha = 42°$. $a = ?$

Lösung

Wir gehen vom rechtwinkligen Dreieck ADC in Abb. 5.24 aus:

$\cos\alpha = \frac{u}{b} \Rightarrow u = b \cdot \cos\alpha$ und $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$;

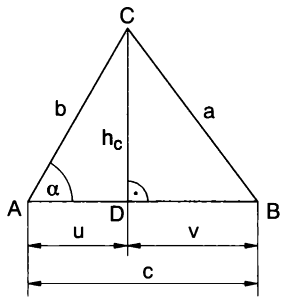


Abb. 5.24 Zur Herleitung des Kosinussatzes

Im Dreieck DBC kann der pythagoräische Lehrsatz mit $v = c - u$ angewendet werden:

$a^2 = h_c^2 + v^2$

$a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2$

$a^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha$

$a^2 = b^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha. \qquad (***)$$

Setzt man für b, c und α ein, so erhält man $a = 4{,}1$ cm.

α ist der Winkel, der a gegenüberliegt; man kann dies auch so ausdrücken: α ist jener Winkel, der von den beiden auf der rechten Seite der Gleichung (***) stehenden Seiten *eingeschlossen* wird. In diesem Sinne kann man entsprechende Gleichungen auch für β und γ formulieren.

Kosinussatz

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta}$

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$

Das Quadrat einer Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem Kosinus des von ihnen *eingeschlossenen* Winkels.

Der Kosinussatz wird verwendet, wenn gegeben sind:

- Drei Seiten,
- zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel wie in Beispiel 5.8.

Der Kosinussatz geht in den pythagoräischen Lehrsatz über, wenn das Dreieck rechtwinklig ist (überlege !).

Bei der Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks lassen sich je nach Angabe vier Grundaufgaben unterscheiden, die alle mit Hilfe des Sinus- oder Kosinussatzes lösbar sind. Dieselbe Einteilung liegt auch den vier Kongruenzsätzen zugrunde (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 124):

Die vier Grundaufgaben der Dreiecksberechnung:	
1. Gegeben: drei Seiten	Beginn mit Kosinussatz
2. Gegeben: zwei Seiten und der von ihnen *eingeschlossene* Winkel	Beginn mit Kosinussatz
3. Gegeben: zwei Seiten und ein Winkel, der einer dieser Seiten *gegenüberliegt*	Beginn mit Sinussatz; eindeutig lösbar, wenn der gegebene Winkel der größeren Seite gegenüberliegt!
4. Gegeben: eine Seite und zwei Winkel	Beginn mit Sinussatz

Wir haben bereits die 2. Grundaufgabe (Beispiel 5.8) und die 4. Grundaufgabe (Beispiel 5.7) behandelt. Es folgen die beiden anderen Grundaufgaben.

Beispiel 5.9 : 3. Grundaufgabe

Von einem Dreieck ABC kennt man: $a = 4{,}5$ cm; $b = 6{,}0$ cm; $\alpha = 46°$. Berechne c und die restlichen Winkel!

Lösung

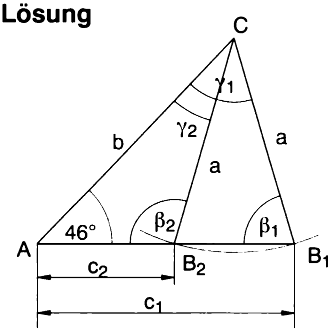


Abb. 5.25 Problemfall der 3. Grundaufgabe

Sinussatz: $\frac{4,5\text{ cm}}{\sin 46°} = \frac{6,0\text{ cm}}{\sin\beta}$.

Daraus: $\sin\beta = \frac{6,0\text{ cm}}{4,5\text{ cm}}\cdot\sin 46° = 0{,}959$.

Zur Lösung der Gleichung $\sin\beta = 0{,}959$ ist anzugeben, welcher Winkelbereich für β in Betracht kommt. Aus Abb. 5.25 sieht man, dass es zwei Lösungen gibt, also $0° < \beta < 180°$ zulässig ist:

$$\sin\beta = 0{,}959 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \beta_1 = 73{,}6° \\ \beta_2 = 180° - \beta_1 = 106{,}4°. \end{cases}$$

Die Rechnung ist nun für beide Lösungsfälle getrennt weiterzuführen:

Fall 1: $\beta_1 = 73{,}6°$:

$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1) = 60{,}4°$;

$\frac{c_1}{\sin\gamma_1} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$c_1 = a\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = 5{,}4$ cm.

Fall 2: $\beta_2 = 106{,}4°$:

$\gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2) = 27{,}6°$;

$\frac{c_2}{\sin\gamma_2} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$c_2 = a\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha} = 2{,}9$ cm.

Wird a kleiner als 4,5 cm, so kann der Fall auftreten, dass es überhaupt keine Lösung gibt! Ist jedoch a größer als b, so gibt es nur noch eine Lösung: damit ist aber α der Winkel geworden, der der größeren der beiden Seiten a oder b gegenüberliegt. Wie aus den Kongruenzsätzen ("Ingenieur-Mathematik 1", Seite 124) hervorgeht, ist die *3. Grundaufgabe jedenfalls eindeutig lösbar, wenn der gegebene Winkel der größeren Seite gegenüberliegt*!

Auch wenn in einer praktischen Fragestellung zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind, so ist trotzdem in der Regel nur eines der beiden möglichen Dreiecke das gesuchte. Welches dies ist, kann aber mit dem Sinussatz allein nicht entschieden werden!

Beispiel 5.10 : 1. Grundaufgabe

Von einem Dreieck ABC kennt man: a = 9,8 cm; b = 10,1 cm; c = 12,6 cm. Berechne die Winkel des Dreiecks!

Lösung

Da die drei Seiten gegeben sind, ist mit dem Kosinussatz zu beginnen. Damit berechnet man einen Winkel. Einen weiteren Winkel kann man mit dem Sinussatz (3. Grundaufgabe) berechnen oder - numerisch etwas aufwendiger - wieder mit dem Kosinussatz; der dritte Winkel errechnet sich natürlich aus der Winkelsumme des Dreiecks.

Rechnet man den zweiten Winkel mit dem Sinussatz, sollte man vorher mit dem Kosinussatz den größten der drei Winkel berechnet haben. Damit hat man den Problemfall der der 3. Grundaufgabe (Winkel liegt der kleineren Seite gegenüber) ausgeschaltet: der aus dem Sinussatz folgende Winkel kann nur kleiner als 90° sein.

Den größten Winkel in einem Dreieck erkennt man daran, dass er der längsten Seite gegenüberliegt. In unserem Fall ist es der Winkel γ.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$;

daraus: $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = 0{,}198 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 78{,}6°$.

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin\gamma = 0{,}762 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 49{,}7°$.

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 51{,}8°$.

Beispiel 5.11 : Schubkurbeltrieb

Ein Schubkurbeltrieb (Abb. 5.26) führt eine Drehbewegung in eine geradlinige Bewegung (oder umgekehrt) über. Die Schubstange mit der Länge l ist drehbar im Punkt A mit einem Schwungrad verbunden. Berechne den Abstand s vom äußeren Totpunkt T (größte Entfernung des Punktes A von M) als Funktion des Drehwinkels φ.

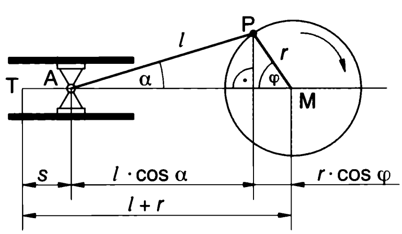


Abb. 5.26 Schubkurbeltrieb

Lösung

Aus Abb. 5.26 folgt:

$s = l + r - r \cdot \cos \varphi - l \cdot \cos \alpha = r \cdot (1 - \cos \varphi) + l \cdot (1 - \cos \alpha)$.

Sinussatz im Dreieck AMP:

$\frac{l}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{r \cdot \sin \varphi}{l}$.

Wegen $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ folgt weiters:

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{l^2}}$.

Setzt man oben in die Gleichung für s ein, so erhält man:

$s = r \cdot (1 - \cos \varphi) + l \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}\right)$.

Trigonometrische Flächenformel

Kennt man von einem Dreieck zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, so lässt sich leicht die Fläche berechnen.

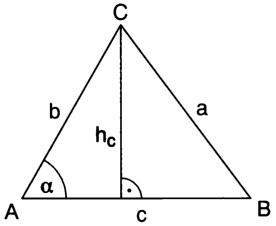


Abb. 5.27 Zur Herleitung der trigonometrischen Flächenformel

Wir gehen von der Flächenformel $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ aus. Der Abb. 5.27 entnimmt man:

$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h_c = b \cdot \sin \alpha$;

Einsetzen in die oben stehende Flächenformel ergibt:

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha$.

Durch Vertauschen der Bezeichnungen erhält man:

Trigonometrische Flächenformel

$\mathbf{A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma}$.

Der Flächeninhalt A eines beliebigen Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des *eingeschlossenen* Winkels.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks gegeben, so berechnet man A mit der Heron'schen Flächenformel ("Ingenieur-Mathematik 1", Seite 126) oder nach Berechnung eines Winkels mit dem Kosinussatz mit der Trigonometrischen Flächenformel.

Beispiel 5.12 : Trigonometrische Flächenformel

Von einem Parallelogramm kennt man die Seiten a = 32,0 cm und b = 24,0 cm sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\alpha = 70°$.
Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Lösung

Ein Parallelogramm (Abb. 5.28) zerfällt durch Ziehen einer Diagonalen in zwei Dreiecke. Somit:

$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha = a \cdot b \cdot \sin \alpha = 722\ \text{cm}^2$.

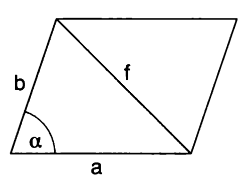


Abb. 5.28

Aufgaben

5.13 Bestimme die fehlenden Bestimmungsstücke des Dreiecks (Längen in mm):

	a	b	c	α	β	γ	A
a)	45	36				53°	
b)		45	50			18°	
c)	65	110	60				
d)			70	40°	47°		
e)		100	40	50°			
f)	50	40			30°		
g)		50	70				1480 mm^2
h)	70				66°		2974 mm^2

5.14 Kann mit den folgenden Bestimmungsstücken (Längen in mm) ein Dreieck berechnet werden? Worin liegt das Problem?

	a	b	c	α	β	γ
a)	50	40			70°	
b)	80	30	40			

5.15 Von einem Parallelogramm kennt man die beiden Seiten a und b sowie einen der Winkel α oder β.

(1) Berechne die Länge der Diagonalen e und f sowie den Flächeninhalt A.

(2) Berechne den Winkel zwischen den Diagonalen.

(3) Zeige, dass die Diagonale e den Winkel α nicht halbiert.

	a	b	α	β
a)	12,5 cm	4,8 cm	35°	
b)	19,6 cm	12,4 cm		56°
c)	6,5 cm	12,5 cm	110°	
d)	34,6 cm	12,8 cm		123°

5.16 Zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die miteinander den Winkel α einschließen, greifen in einem Punkt an. Ermittle den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$, den Betrag der Differenz $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ sowie die Winkel, welche die Kräfte $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$ mit der resultierenden Kraft einschließen!

a) $F_1 = 20$ N, $F_2 = 30$ N, $\alpha = 65°$ **b)** $F_1 = 120$ N, $F_2 = 230$ N, $\alpha = 112°$

5.17 Ergänze die folgende Tabelle (Bezeichnungen in Abb. 5.29):

	a)	b)	c)	d)
F_1	30 N			
F_2		95 N		200 N
F_R			120 N	400 N
α	20°	60°	75°	
φ	75°	120°	115°	70°

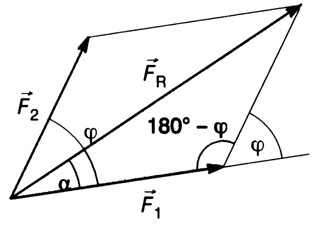


Abb. 5.29

5.18 Drei Kräfte F_1 = 400 N, F_2 = 600 N und F_3 = 700 N, die sich das Gleichgewicht halten, greifen an einem Massenpunkt an. Berechne die Winkel, die ihre Wirkungslinien miteinander einschließen!

5.19 Auf einer unter dem Winkel ε = 5° ansteigenden Straße (Abb. 5.30) steht ein Turm. An zwei Punkten A und B der Straße mit dem Abstand 60 m werden die Höhenwinkel α = 55° und β = 70° gemessen. Berechne die Höhe h des Turms.

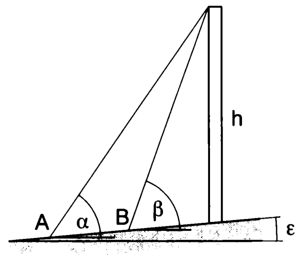


Abb. 5.30

5.20 Berechne die Seilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (Abb. 5.31), wenn α = 20°, β = 15° und G = 100 N ist.

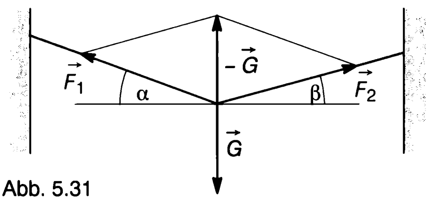


Abb. 5.31

5.21 Es soll die Länge (Abb. 5.32) einer unzugänglichen Strecke PQ berechnet werden. Dazu wird eine Basis $\overline{AB}$ = 120 m bestimmt und von den Endpunkten A und B werden die Winkel zu den Punkten P und Q gemessen: $\alpha_1 = 54°$, $\alpha_2 = 35°$, $\beta_1 = 80°$, $\beta_2 = 40°$.

Anmerkung: Diese Aufgabe wird im Vermessungswesen als "doppelter Vorwärtseinschnitt" bezeichnet.

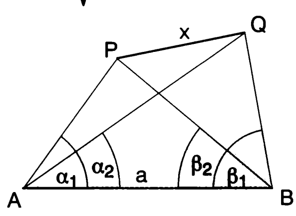


Abb. 5.32

5.22 Um die Drehrichtung nicht zu ändern, wird zwischen zwei Zahnrädern (Abb. 5.33) ein drittes Zahnrad eingefügt. Berechne die Abstandsmaße u und v (Maße in mm).

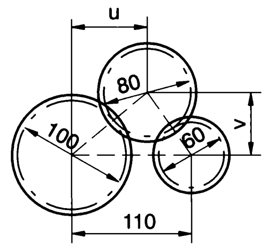


Abb. 5.33

5.23 Eine Kugel hat ein Gewicht von F_G = 140 N (Abb. 5.34). Wie groß sind die Stützkräfte F_1 und F_2 auf die Führungswände?

5.24 Bestimme die Stablängen a und d des Dachbinders in Abb. 5.35, wenn b = 3,50 m, c = 2,50 m, α = 13° und β = 42° beträgt.

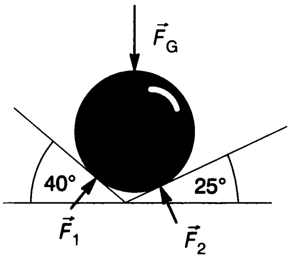


Abb. 5.34

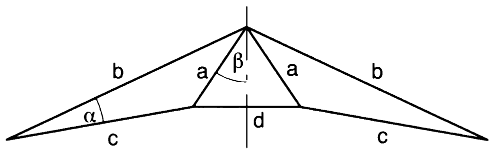


Abb. 5.35

5.25 Berechne die Innenwinkel und den Flächeninhalt folgender Vierecke ABCD:

a) A(2/2), B(6/4), C(8/9), D(3/8)

b) A(−4/0), B(3/−3), C(2/3), D(0/5)

5.26 Es soll (Abb. 5.36) die Entfernung x zwischen zwei Punkten P und Q, zwischen denen kein Sichtkontakt besteht, bestimmt werden. Außerdem ist der Punkt Q nicht zugänglich. In der Nähe des Punktes P werden deshalb zwei Punkte A und B gewählt und ihre Entfernung zu P gemessen: a = $\overline{AP}$ = 98 m und b = $\overline{BP}$ = 82 m; außerdem werden die Winkel α = 81°, β = 99° und φ = 132° gemessen. Berechne x!

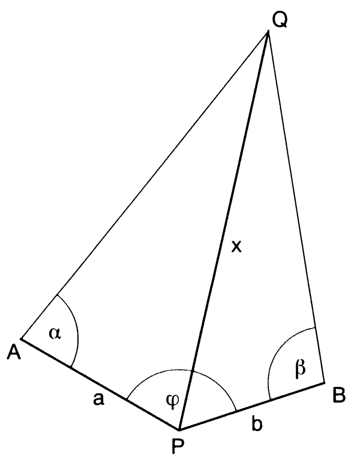


Abb. 5.36

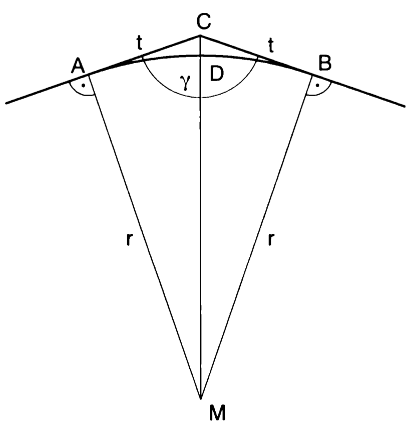


Abb. 5.37

5.27 Zwei geradlinige Straßenstücke (Abb. 5.37) sollen durch einen Kreisbogen verbunden werden. Vorgegeben sind folgende Daten: t = 156 m, γ = 142°. Berechne den Kreisradius, die Länge des Kreisbogens zwischen A und B sowie die Länge von CD.

5.4 Summensätze

Ist sin (α + β) = sin α + sin β? Wir machen eine Zahlenprobe mit α = 30° und β = 60°:
sin (30° + 60°) = sin 90° = 1; sin 30° + sin 60° = 0,5 + 0,866 = 1,366.

Die Zahlenprobe ergibt keine Übereinstimmung, daher muss die fragliche Behauptung falsch sein! Entsprechende Ungleichheiten bei anderen Funktionen sind:

$\ln(1+2) \neq \ln 1 + \ln 2$; $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$; $(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2$ u.a.

Tatsächlich gibt es eine Möglichkeit, Kreisfunktionswerte einer *Summe* von Winkeln durch Funktionswerte der *einzelnen* Winkel auszudrücken. Beispielhaft erfolgt die Herleitung einer Formel für sin (α + β) bei spitzen Winkeln α und β. Die Angabe der weiteren Beziehungen erfolgt ohne Beweis.

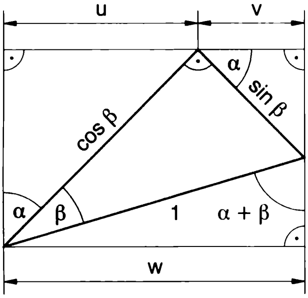


Abb. 5.38 Erster Summensatz

In Abb. 5.38 ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 1 und einem Winkel β gezeichnet [3]; es besitzt dann die Katheten cos β und sin β. Überlege das Auftreten der anderen eingezeichneten Winkel!

Aus den weiteren rechtwinkligen Dreiecken berechnet man:

$u = \sin\alpha \cdot \cos\beta$, $v = \sin\beta \cdot \cos\alpha$ und $w = \sin(\alpha + \beta)$.

Somit erhalten wir als gewünschte Beziehung:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

Erster Summensatz der Kreisfunktionen

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Die Formeln für die Summe und die Differenz zweier Winkel wurden zusammengefasst; es ist genau auf die Vorzeichen zu achten! Der erste Summensatz ist für Anwendungen von großer Bedeutung.

Sonderfall des ersten Summensatzes: β = α

Kreisfunktionswerte des doppelten Winkels

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Beispiel 5.13 : Erster Summensatz

Zeige mit Hilfe des ersten Summensatzes:

a) $\sin(30° + 60°) = 1$
b) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
c) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
d) $\tan(\alpha + 180°) = \tan\alpha$

Lösung

Zu **a)** $\sin(30° + 60°) = \sin 30° \cdot \cos 60° + \cos 30° \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1.$

Zu **b)** $\sin(180° - \alpha) = \sin 180° \cdot \cos\alpha - \cos 180° \cdot \sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha - (-1) \cdot \sin\alpha = \sin\alpha.$

Zu **c)** $\cos(180° - \alpha) = \cos 180° \cdot \cos\alpha + \sin 180° \cdot \sin\alpha = (-1) \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = -\cos\alpha.$

Zu **d)** $\tan(\alpha + 180°) = \frac{\tan\alpha + \tan 180°}{1 - \tan\alpha \cdot \tan 180°} = \frac{\tan\alpha + 0}{1 - \tan\alpha \cdot 0} = \tan\alpha.$

b) und **c)** wurde in Beispiel 5.4, Seite 129, über den Einheitskreis gezeigt. **d)** drückt die Periodizität der Tangensfunktion aus.

Beispiel 5.14 : Sonderfall des ersten Summensatzes

Zeige: **a)** $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$ **b)** $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

Lösung

Zu **a)** $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$
$= \tan\alpha.$

Zu **b)** Wir formen die rechte Seite der Gleichung um:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot [1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)] = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot [(1 - \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha] = \frac{1}{2} \cdot [\sin^2\alpha + \sin^2\alpha] = \sin^2\alpha.$$

Beispiel 5.15 : Schnittwinkel zweier Geraden

Ermittle den Schnittwinkel der Geraden mit den Gleichungen g_1: $y = k_1 \cdot x + d_1$ und g_2: $y = k_2 \cdot x + d_2$ $(k_1 \neq k_2)$.
Konkretes Beispiel: g_1: $y = 2x - 1$ und g_2: $y = \frac{x}{3} + 1$.

Lösung

Sind α und β die Steigungswinkel der beiden Geraden (Abb. 5.39), so gilt: $k_1 = \tan\alpha$; $k_2 = \tan\beta$; $\alpha - \beta$ ist der Schnittwinkel:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} =$$
$$= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta = 45°.$$

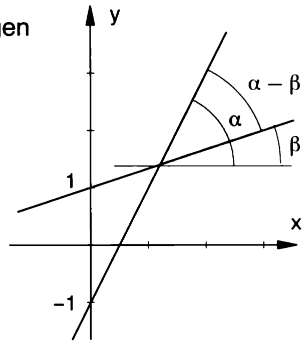


Abb. 5.39

Beispiel 5.16 : Projektierung einer Straße

In Abb. 5.40 ist ein *Vertikalschnitt* durch ein Gelände gezeichnet, auf dem zwei geradlinige Straßenstücke mit Steigungen $k_1 = 8\%$ und $k_2 = 3\%$ durch ein Kreisbogenstück ineinander übergeführt werden sollen. Berechne die für eine Profilabsteckung nötige Länge $t = \overline{AT} = \overline{BT}$; wenn als Ausrundungsradius $r = 1500$ m gewählt wird.

Lösung

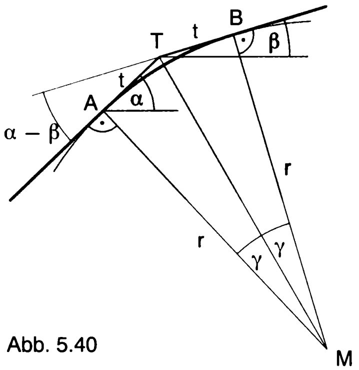


Abb. 5.40

Für die Differenz $\alpha - \beta$ der Steigungswinkel der Straßenstücke (Abb. 5.40) gilt: $\alpha - \beta = 2 \cdot \gamma$ (Normalenwinkel).

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ATM folgt:

$\tan \gamma = \frac{t}{r}$.

Nun gilt einerseits, weil $k_1 \cdot k_2$ sehr klein ist:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \approx k_1 - k_2.$$

Andererseits ist

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan 2\gamma = \frac{2 \cdot \tan\gamma}{1 - \tan^2\gamma} \approx 2 \cdot \tan\gamma = \frac{2t}{r}.$$

Hier wurde verwendet, dass $\tan^2 \gamma = \left(\frac{t}{r}\right)^2$ vernachlässigbar klein ist. Durch Gleichsetzen erhält man $k_1 - k_2 = 2 \cdot \frac{t}{r}$ und daraus schließlich $t = \frac{r}{2} \cdot (k_1 - k_2) = 750 \cdot (0{,}08 - 0{,}03)$ m $= 37{,}5$ m.

Beispiel 5.17 : Reibung auf einer schiefen Ebene

Eine Last mit dem Gewicht F_G wird auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel α, Gleitreibungszahl μ) mit konstanter Geschwindigkeit v nach oben bewegt (Abb. 5.41). Berechne die dazu erforderliche Kraft F, welche parallel zur Gleitfläche wirkt. Konkret: Masse der Last 1 kg, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}3$.

Lösung

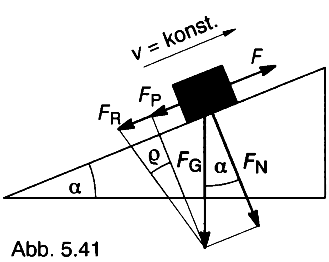


Abb. 5.41

Die Aufwärtsbewegung ist gleichförmig, wenn sich die Kräfte in der Ebene parallel zur Gleitfläche aufheben:

(*) $F = F_P + F_R$,

wobei $F_P = F_G \cdot \sin\alpha$ die parallel zur Gleitfläche liegende Komponente der Gewichtskraft F_G und F_R die ebenfalls parallel zur Gleitfläche wirkende Reibungskraft ist. F_R wirkt der Bewegung entgegen und ist proportional (Proportionalitätsfaktor μ) der Kraft F_N, welche normal auf die Gleitfläche wirkt: $F_R = \mu \cdot F_N$; wegen $F_N = F_G \cdot \cos\alpha$ folgt $F_R = \mu \cdot F_G \cdot \cos\alpha$. Einsetzen in die Gleichung (*) ergibt die gewünschte Kraft F:

$F = F_G \cdot \sin\alpha + \mu \cdot F_G \cdot \cos\alpha = F_G(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)$.

Wir setzen weiters $\tan\varrho = \mu$ mit dem sogenannten Gleitreibungswinkel ϱ. Hat die schiefe Ebene einen Neigungswinkel unter ϱ, so reicht die Reibung aus, dass die Last nicht mehr ohne Mithilfe die schiefe Ebene hinunterrutscht. Damit erhält man schließlich für F unter Anwendung des ersten Summensatzes:

$$F = F_G\,(\sin\alpha + \tan\varrho \cdot \cos\alpha) = F_G\left(\sin\alpha + \frac{\sin\varrho}{\cos\varrho}\cdot\cos\alpha\right) =$$

$$= F_G\,\frac{\sin\alpha\cdot\cos\varrho + \sin\varrho\cdot\cos\alpha}{\cos\varrho} = F_G\,\frac{\sin(\alpha+\varrho)}{\cos\varrho}.$$

Konkret: $F_G = m\cdot g = 1\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{ms}^{-2} = 9{,}81\ \text{N}$; $\tan\varrho = 0{,}3$, daraus $\varrho = 16{,}7°$;
$F = 9{,}81\ \text{N}\cdot\dfrac{\sin(20° + 16{,}7°)}{\cos 16{,}7°} = 6{,}1\ \text{N}$.

Zweiter Summensatz

Neben dem ersten Summensatz gibt es noch einen weiteren Summensatz. Dieser macht es möglich, die Summe (Differenz) zweier Sinuswerte oder Kosinuswerte durch ein Produkt auszudrücken. Auf seine Herleitung, die aus dem ersten Summensatz erfolgen kann, wird nicht eingegangen.

Zweiter Summensatz

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Beispiel 5.18 : Zweiter Summensatz

Forme $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha$ mit Hilfe des zweiten Summensatzes in ein Produkt um!

Lösung

$$\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2\cdot\sin\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha-3\alpha}{2} = 2\cdot\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Aufgaben

5.28 Zeige mit Hilfe des 1. Summensatzes:

a) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ **b)** $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ **c)** $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$
d) $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$ **e)** $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$ **f)** $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$

5.29 Ebenso (x ist nun ein Winkel im Bogenmaß):

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ **b)** $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ **c)** $\sin(x - \pi) = -\sin x$
d) $\cos(x - \pi) = -\cos x$ **e)** $\tan(x + \pi) = \tan x$ **f)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

5.30 Vereinfache:

a) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ **b)** $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin(-\alpha)}$ **c)** $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

d) $(1+\cos 2\alpha)\cdot(1+\tan^2\alpha)$ **e)** $(1-\cos 2\alpha)\cdot(1+\cot^2\alpha)$

5.31 Vereinfache:

a) $\sin(300°-\alpha)-\cos(150°+\alpha)$ **b)** $\cos(300°+\alpha)+\sin(150°+\alpha)$

c) $\frac{\sin(180°+\alpha)}{\sin(270°+\alpha)}$ **d)** $\sin\alpha+\sin(\alpha+120°)+\sin(\alpha+240°)$

e) $\tan(45°+\alpha)\cdot\tan(45°-\alpha)$

5.32 Zeige:

a) $\cos(60°+\alpha)+\cos(60°-\alpha)=\cos\alpha$ **b)** $\sin(30°+\alpha)-\sin(30°-\alpha)=\sqrt{3}\cdot\sin\alpha$

c) $\sin(\alpha+60°)+\sin(\alpha-60°)=\sin\alpha$ **d)** $2\cdot\sin\frac{90°+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{90°-\alpha}{2}=1+\sin\alpha$

e) $\tan(45°+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ **f)** $\tan(45°-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

5.33 Zeige:

a) $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot(1+\cos 2\alpha)$ **b)** $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$

c) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$ **d)** $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

e) $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ **f)** $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$

g) $\tan\alpha-\cot\alpha=-\frac{2}{\tan 2\alpha}$ **h)** $\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\cdot(1-\tan^2\alpha)$

i) $\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos 2\alpha$ **j)** $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$

5.34 Zeige: $\sin 3x=3\cdot\sin x-4\cdot\sin^3 x$. *Hinweis*: $\sin 3x=\sin(2x+x)$.

5.35 Zeige:

a) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$ **b)** $\frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}$

Hinweis: Setze $\alpha=2\cdot\beta$

5.36 Vereinfache soweit wie möglich:

a) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ **b)** $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ **c)** $\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}$

5.37 Zeige:

a) $\sin\alpha+\sin 3\alpha=2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$ **b)** $\cos\alpha+\cos 3\alpha=2\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha$

5.38 Zeige, dass $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha+45°)$. *Hinweis*: $\cos\alpha=\sin(\alpha+\ldots)$

5.5 Die Graphen der Kreisfunktionen

Im folgenden werden die bei Funktionen üblichen Bezeichnungen x für die unabhängige und y für die abhängige Variable verwendet. So schreiben wir nun für die Funktionsgleichung der Sinusfunktion y = sin x , d.h. x bezeichnet nun den Winkel.

1. Der Graph der Sinusfunktion

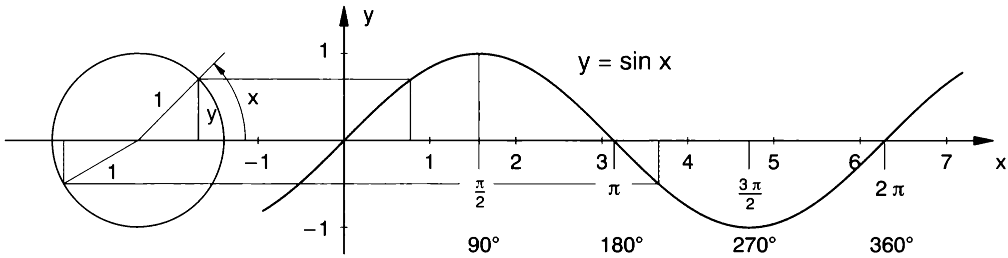


Abb. 5.42 Graph der Sinusfunktion y = sin x

! Bei der graphischen Darstellung der Kreisfunktionen wird üblicherweise der Winkel im Bogenmaß verwendet. Dadurch können die Längeneinheiten auf beiden Achsen gleich groß gewählt werden.

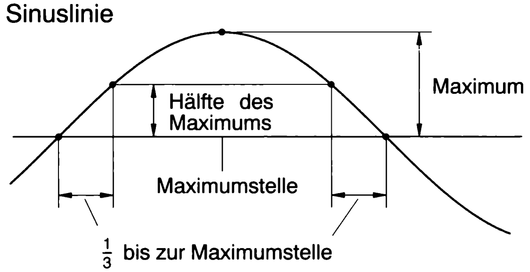
Der Sinuswert y kann für jeden Winkel $x \in \mathbb{R}$ gebildet werden. Der Graph der Sinusfunktion (Abb. 5.42) wird auch als **Sinuslinie** bezeichnet. Man kann an ihr alle schon bei der Darstellung der Sinuswerte am Einheitskreis beschriebenen Eigenheiten der Sinuswerte ablesen.

(1) Die Sinusfunktion ist **periodisch** mit der Periode 2π (oder 360°).

(2) Ihre Werte liegen zwischen − 1 und 1.

Es ist günstig, sich die Werte $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ und $\frac{3\pi}{2} = 4{,}71$ zu merken, an denen der Funktionswert 1 bzw. − 1 ist.

(3) Nullstellen: $k\pi$ (oder $k \cdot 180°$) mit $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$.



Zum schnellen Zeichnen (Abb. 5.43) einer beliebigen Sinuslinie kann man verwenden, dass $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$ gerade ein Drittel der Länge zwischen $\alpha = 0°$ und der Maximumstelle ist.

Abb. 5.43 Skizze einer Sinuslinie

2. Der Graph der Kosinusfunktion

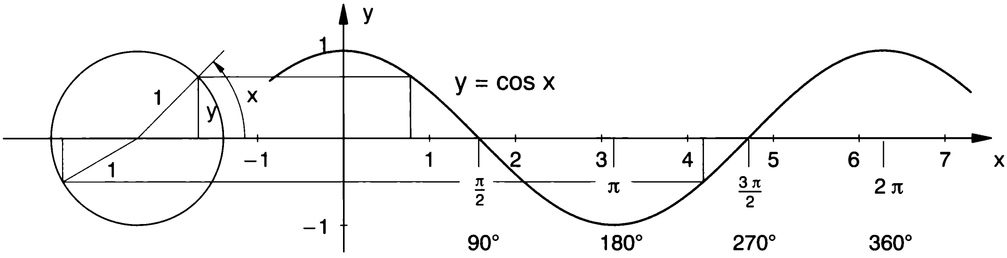


Abb. 5.44 Graph der Kosinusfunktion y = cos x

Der Graph der Kosinusfunktion (Abb. 5.44) ist **deckungsgleich mit dem Graphen der Sinusfunktion**, da $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ – siehe Beispiel 5.4 c), Seite 129. Er ist gegenüber dem Graphen der Sinusfunktion nur um $\frac{\pi}{2}$ oder 90° nach links verschoben!

Beschreibe unter diesem Gesichtspunkt die Eigenschaften der Kosinusfunktion!

3. Der Graph der Tangensfunktion

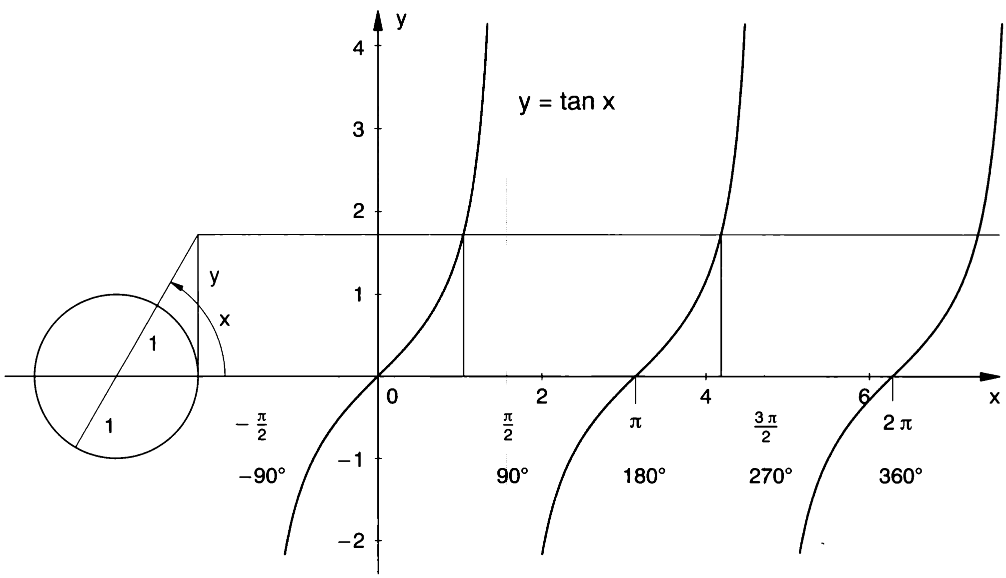


Abb. 5.45 Graph der Tangensfunktion y = tan x

(1) Die Tangensfunktion ist nicht definiert für Winkel $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$, usw., wo sie sogenannte Unendlichkeitsstellen besitzt.
(2) Sie ist **periodisch** bereits mit der Periode π (oder 180°).
(3) Ihr Wertebereich umfasst alle reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
(4) Nullstellen: $k\pi$ (oder $k \cdot 180°$) mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (wie die Sinusfunktion, warum?).

Aufgaben

5.39 Rechne um:

$\alpha°$	20°			53°	−130°			249°
α rad		0,48	1			−1,3	3,7	

5.40 Ergänze eine der drei Eigenschaften: gerade / ungerade / weder gerade noch ungerade

a) Die Sinusfunktion ist eine … Funktion;

b) Die Cosinusfunktion ist eine … Funktion;

c) Die Tangensfunktion ist eine … Funktion;

5.41 Skizziere den Graphen der **a)** Sinusfunktion **b)** Kosinusfunktion (Einheit: 2 cm) für $-1 \leqslant x \leqslant 8$. Gib die Nullstellen und Extremstellen an! Markiere auf der x-Achse die 4 Quadranten und gib das Vorzeichenverhalten der beiden Funktionen an.

5.42 Skizziere den Graphen der Tangensfunktion (Einheit: 2 cm) für $-1 \leqslant x \leqslant 8$. Für welche Winkel x ist diese Funktion nicht definiert? Welche Periode besitzt die Tangensfunktion?

5.43 Welche Eigenschaft kann als Haupteigenschaft der Kreisfunktionen gelten?

5.44 Wahr oder falsch? ($k \in \mathbb{Z}$)

a) Die Nullstellen x_k der Sinusfunktion lauten: $x_k = k \cdot \pi$

b) Die Nullstellen x_k der Kosinusfunktion lauten: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

c) Die Nullstellen x_k der Tangensfunktion lauten: $x_k = k \cdot \pi$

5.45 Die Maximumstellen x_k der Sinusfunktion lauten: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Gib in ähnlicher Weise an:

a) Die Minimumstellen der Sinusfunktion;

b) Die Maximumstellen der Kosinusfunktion;

c) Die Minimumstellen der Kosinusfunktion.

5.46 Gib die Unendlichkeitsstellen der Tangensfunktion an.

5.47 Ergänze:

a) Die Sinusfunktion ist streng monoton … im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \ldots\right]$;

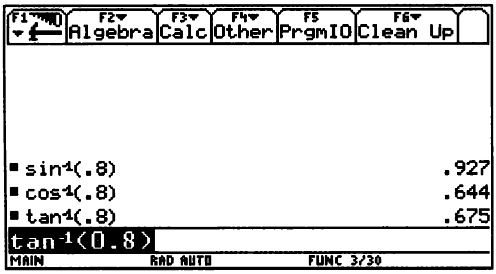
b) Die Kosinusfunktion ist streng monoton … im Intervall $[0, \ldots]$;

c) Die Tangensfunktion ist streng monoton … im Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \ldots\right[$.

Voyage 200

5.6 Die Arkusfunktionen

Zu jedem Winkel $x \in \mathbb{R}$ gibt es (genau) einen Sinuswert y; wir fragen nun umgekehrt: wie kommt man von einem vorgegebenen Sinuswert y zurück zum Winkel x? Mit dem Taschenrechner gelingt dies bekanntlich wie folgt:



Eingabe: 2ND SIN 0 . 8)

⚠ Der bei Taschenrechnern vielfach verwendete Funktionsname $\sin^{-1}$ darf keineswegs als Kehrwert eines Sinuswertes gesehen werden; diese Bezeichnung weist auf die Bedeutung dieser Funktion als Umkehrfunktion hin!

Entsprechend auch die Tastenfolgen und Bezeichnungen für die Umkehrfunktionen des Kosinus und Tangens.

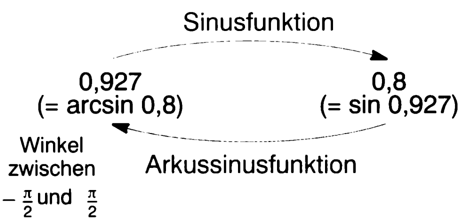


Abb. 5.46 Umkehrung der Sinusfunktion

Beispiel:

sin x = 0,8; x = 0,927 (= 53,1°).

Obwohl es unendlich viele Winkel zu einem Sinuswert gibt, errechnet der Taschenrechner nur einen einzigen; es ist jener Winkel, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ (= −90°) und $\frac{\pi}{2}$ (= 90°) liegt. Die so definierte Funktion, die dem Taschenrechner zugrunde liegt, heißt Arkussinusfunktion.

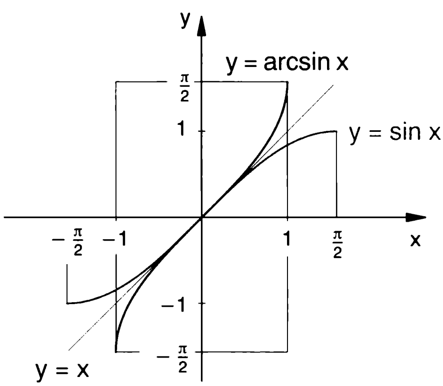


Abb. 5.47 Die Arkussinusfunktion

Die **Arkussinusfunktion** ist die Umkehrfunktion der auf das Winkelintervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ eingeschränkten Sinusfunktion (Abb. 5.47), wo diese streng monoton steigend und daher umkehrbar ist. Der Graph der Arkussinusfunktion ergibt sich durch Spiegelung an der Geraden y = x (1. Mediane).

Man schreibt: **y = arcsin x**;

Definitionsbereich: $[-1, 1]$,

Wertebereich: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Arkussinusfunktion

arcsin x ist der *Winkel* im Bogenmaß zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, dessen Sinus gleich x ist.

$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y \quad$ (für Winkel $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$).

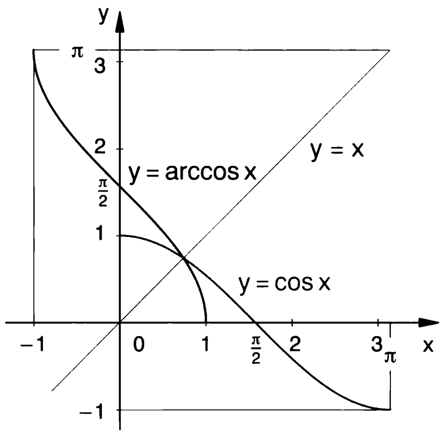


Abb. 5.48 Die Arkuskosinusfunktion

Die **Arkuskosinusfunktion** ist die Umkehrfunktion der auf das Winkelintervall $[0, \pi]$ eingeschränkten Kosinusfunktion (Abb. 5.48), wo diese streng monoton fallend und daher umkehrbar ist. Der Graph der Arkuskosinusfunktion ergibt sich durch Spiegelung an der Geraden y = x (1. Mediane).

Man schreibt: **y = arccos x**;

Definitionsbereich: $[-1, 1]$,

Wertebereich: $[0, \pi]$.

Arkuskosinusfunktion

arccos x ist der *Winkel* im Bogenmaß zwischen 0 und π, dessen Kosinus gleich x ist.
$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$ (für Winkel $y \in [0, \pi]$).

Beispiel 5.19: Zusammenhang zwischen der Arkussinus- und der Arkuskosinusfunktion

Zeige: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Lösung

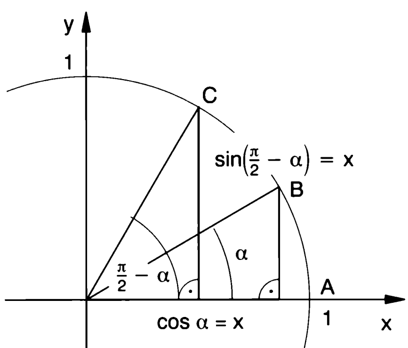


Abb. 5.49

Rechnerisch: Wir gehen von der Beziehung $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ aus (siehe eventuell Beispiel 5.4, Seite 129) und setzen den gemeinsamen Wert gleich x:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin x$$

$$\cos\alpha = x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos x$$

Addition der rechten Seiten ergibt die Behauptung.

Geometrisch nach Abb. 5.49 am Einheitskreis:

$\overset{\frown}{AB} = \arccos x$, $\overset{\frown}{AC} = \arcsin x$;

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} = \frac{\pi}{2}$.

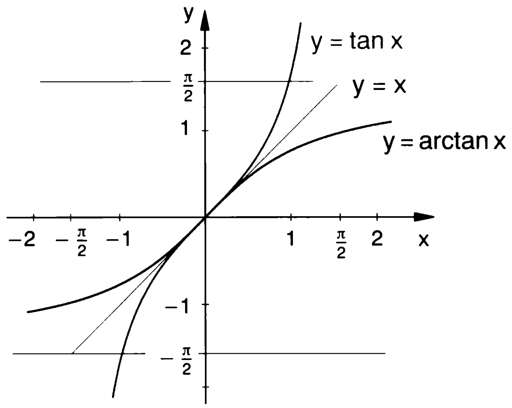


Abb. 5.50 Die Arkustangensfunktion

Die **Arkustangensfunktion** ist die Umkehrfunktion der auf das Winkelintervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ eingeschränkten Tangensfunktion (Abb. 5.50), wo diese streng monoton steigend und daher umkehrbar ist. Der Graph der Arkustangensfunktion ergibt sich durch Spiegelung an der Geraden y = x (1. Mediane).

Man schreibt: **y = arctan x** ;

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$,

Wertebereich: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Arkustangensfunktion

arctan x ist der *Winkel* im Bogenmaß zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, dessen Tangens gleich x ist.

y = arctan x $\Leftrightarrow$ x = tan y (für Winkel $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Taschenrechner erlauben auch die Ausgabe der Arkusfunktionen im Gradmaß. Endet damit die Rechnung, ist dies ohne Bedeutung; bei weiterführenden Operationen ist jedoch im Allgemeinen die Angabe im Bogenmaß erforderlich.

Aufgaben

5.48 Bestimme *ohne* Taschenrechner:

a) arcsin 0 **b)** arcsin 1 **c)** arcsin (– 1) **d)** arccos 0
e) arccos 1 **f)** arccos (– 1) **g)** arctan 0 **h)** arctan (– 1)

5.49 Ergänze:

a) arcsin 0,5 = $\frac{\pi}{6}$, weil sin … **b)** arcsin 0,8 = 0,927, weil …
c) arccos 0,2 = 1,369, weil … **d)** arccos (–0,5) = 2,094, weil …
e) arctan 0,7 = 0,611, weil … **f)** arctan 4 = 1,326, weil …

5.50 Sinnvoll oder nicht sinnvoll (in $\mathbb{R}$)?

a) arcsin (–0,2) **b)** arcsin 1,4 **c)** arccos 2 **d)** arctan 3,4

5.51 Ermittle ohne Taschenrechner! *Hinweis*: Benütze einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion.

a) arcsin 0,5 = $\frac{\pi}{6}$; arccos 0,5 = ? **b)** arcsin 0,707 = $\frac{\pi}{4}$; arccos 0,707 = ?
c) arccos 0,866 = $\frac{\pi}{6}$; arcsin 0,866 = ? **d)** arccos 0,5 = $\frac{\pi}{3}$; arcsin 0,5 = ?

5.7 Die allgemeine Sinusfunktion

Beispiel 5.20: Gleichmäßige Kreisbewegung und Sinusschwingung

Ein kleiner Körper P bewege sich mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r. Diese Kreisbewegung wird durch parallel einfallendes Licht auf einen Schirm projiziert, der normal zur Kreisbahn steht.

Beschreibe die zeitliche Bewegung des Schattens (der Projektion) von P.

Lösung

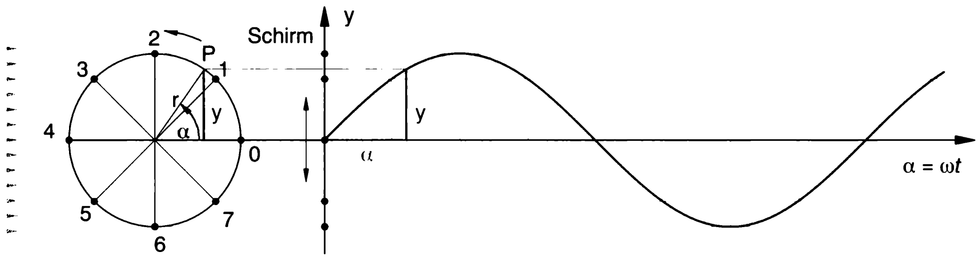


Abb. 5.51

In Abb. 5.51 sind die Lagen 0,1,2, usw. des umlaufenden Körpers auf der Kreisbahn markiert. Dazu ist das jeweilige Schattenbild am Schirm gezeichnet, das eine Hin- und Herbewegung vollführt.

Ist α der in der Zeit t durchlaufene Drehwinkel, so gilt $\omega = \frac{\alpha}{t}$ (Winkelgeschwindigkeit ω = Drehwinkel α durch Zeit t); daraus $\alpha = \omega \cdot t$. Wenn der Körper für einen Umlauf auf der Kreisbahn die Zeit T benötigt, so folgt noch der wichtige Zusammenhang zwischen ω und T: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 5.51 entnimmt man $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, wobei y die Ordinate von P und zugleich die Auslenkung (Elongation) des Schattenbildes von der Mittellage ist. Daraus: $y = r \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin(\omega t)$

Eine Bewegung nach diesem zeitlichen Gesetz heisst **Sinusschwingung** oder **harmonische Schwingung** mit der Amplitude r und der Kreisfrequenz ω. Damit ist der enge Zusammenhang zwischen einer (gleichmäßigen) Kreisbewegung und einer Sinusschwingung aufgezeigt.

Zahlenbeispiel: $T = 0{,}1$ s; $r = 0{,}5$ m, $t = 0{,}02$ s:

$\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{0{,}1\,s} \cdot 0{,}02\,s = 1{,}26\ (= 72°)$;

$y = 0{,}5\,m \cdot \sin(1{,}26) = 0{,}48$ m.

Die Sinusfunktion kann zur Beschreibung periodischer Vorgänge verwendet werden. Sinuslinien treten als graphische Darstellung vieler periodischer Vorgänge in den verschiedensten Anwendungen auf (mechanische Schwingungen, Wechselströme, ...).

Wir betrachten nun etwas verallgemeinert die Sinusfunktion im Beispiel 5.20. Da die in der Praxis auftretenden Funktionen wie im Beispiel 5.20 meist von der Zeit t abhängen, bezeichnen wir die unabhängige Variable mit t (statt wie bisher mit x).

Die Funktion **y = A · sin (ω*t* + φ)** heißt **allgemeine Sinusfunktion** bzw. in den Anwendungen **Sinusschwingung** oder **harmonische Schwingung**.

Um die Bedeutung der Größen A, ω und φ zu erkennen, kann man schrittweise vorgehen.

a) $y = A \cdot \sin t$

Für A = 1 liegt die schon auf Seite 147 besprochene "Grundsinuskurve" mit der Periode 2π vor.

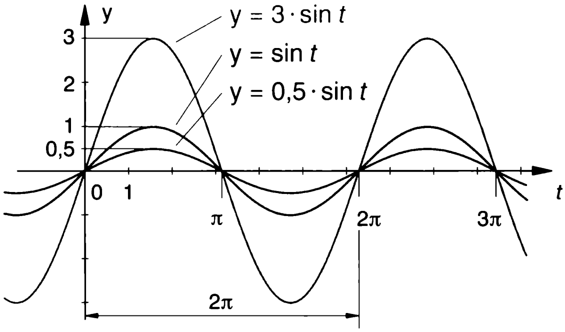


Abb. 5.52 Bedeutung des Faktors A

Ein (positiver) Faktor A bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung der Grundsinuskurve auf das A-fache in y-Richtung (Abb. 5.52).

A heißt, anwendungsorientiert ausgedrückt, **Amplitude** der Sinusfunktion.

Häufig wird die Amplitude auch mit $\hat{y}$ ("y Dach") bezeichnet.

Bezeichnet *t* eine Zeitvariable in Sekunden, so liegt die Situation wie in Beispiel 5.20 vor, wenn man dort die Winkelgeschwindigkeit ω gleich 1 s^{-1} setzt. Die in Abb. 5.52 auf der Abszissenachse eingezeichneten Werte 0, 1, π, 2π usw. sind Werte in Sekunden, die Zeiteinheit wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Letzteres gilt auch für die weiteren diesbezüglichen Abbildungen.

b) $y = \sin(\omega t)$

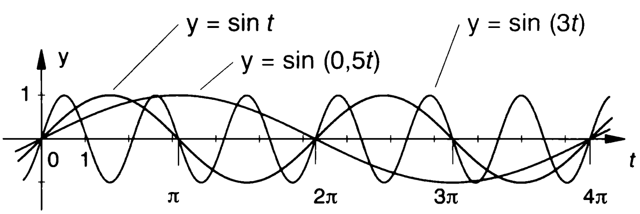


Abb. 5.53 Bedeutung von ω

Wird ω bei gleichbleibender Amplitude verändert, so ändert dies die Periode der Sinusfunktion (Abb. 5.53)!

Man kann dies allgemein überlegen:

Da die Periodenlänge der Sinusfunktion 2π beträgt, gilt:

$$\sin(\omega t) = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right].$$

Da also die Addition von $\frac{2\pi}{\omega}$ zu *t* wieder den gleichen Funktionswert ergibt, hat sich die Periode von bisher 2π auf $\frac{2\pi}{\omega}$ geändert. Wir bezeichnen allgemein die Periode bei einer zeitabhängigen Sinusfunktion mit dem Buchstaben *T* und nennen sie auch **Periodendauer** oder **Schwingungsdauer**.

Periode(ndauer) einer Sinusfunktion

$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

In Abb. 5.53 ist für $\omega = 3\ s^{-1}$ bzw. $\omega = 0{,}5\ s^{-1}$ die Periodendauer T gleich $\frac{2\pi}{3}$ s bzw. $\frac{2\pi}{0{,}5}$ s = 4π s. Der Faktor ω heißt **Kreisfrequenz** und kann gemäß Beispiel 5.20, Seite 153, als Winkelgeschwindigkeit einer Kreisbewegung mit T als Umlaufzeit gedeutet werden. ω hat die Einheit s^{-1}, das Produkt $\omega \cdot t$ besitzt demnach keine Einheit.

c) $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

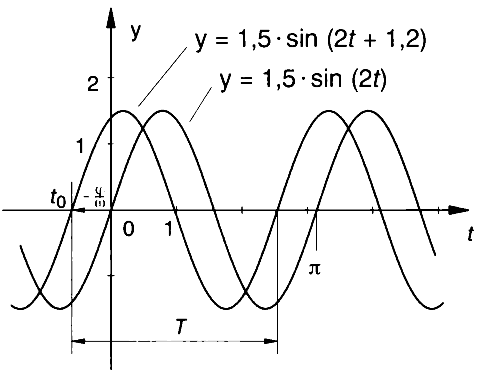


Abb. 5.54 Bedeutung von φ

Die Sinusfunktion $y = A \cdot \sin \omega t$ beschreibt einen Vorgang, der mit dem Funktionswert 0 beginnt. Die Sinusfunktion $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ besitzt zum Zeitpunkt $t = 0$ bereits den Wert $y = A \cdot \sin \varphi$ und ist gegenüber jener mit $\varphi = 0$ nach links oder rechts verschoben, sonst aber deckungsgleich.

Zur Bestimmung der Verschiebung kann man eine nahe dem Ursprung liegende Nullstelle t_0 berechnen:

$y = 0$ für $\omega t + \varphi = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Daraus mit $k = 0$:

Nullstelle zur Bestimmung der Verschiebung

$\boldsymbol{t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}}$

Nach der Nullstelle t_0 *steigt* die Sinusfunktion an (überlege!). $\omega t + \varphi$ wird **Phasenwinkel**, φ **Nullphasenwinkel** genannt. Die Richtung der Verschiebung gegenüber dem Graphen von $y = A \cdot \sin \omega t$ folgt aus dem Vorzeichen von φ (begründe!):

$\varphi > 0$: Linksverschiebung,

$\varphi < 0$: Rechtsverschiebung.

Zusammenfassung der Bedeutung der Größen A, ω und φ:

$$\mathbf{y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$$

Streckung (Stauchung) in y-Richtung	Änderung der Periode von 2π auf $\frac{2\pi}{\omega}$	Verschiebung bis $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

! Häufig wird in den Anwendungen nicht t, sondern ωt auf der Abszissenachse aufgetragen. Dies hat den Vorteil, dass nun
(1) die Periode 2π beträgt (und damit keine Berechnung von T nötig ist) und
(2) die Verschiebung φ ist.

Beispiel 5.21 : Zeichnen des Graphen einer Sinusschwingung

Zeichne den Graphen $y = 1{,}5 \cdot \sin\left(2\,t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Lösung

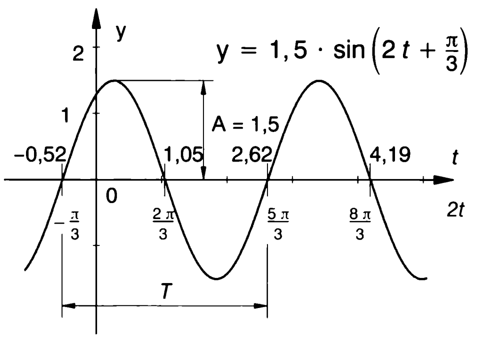


Abb. 5.55

Die Sinuslinie kann skizziert werden, wenn die Periode T und die Verschiebung bekannt sind:

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ s;

Nullstelle beim Ursprung:

$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{\frac{\pi}{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} = -0{,}524$ s.

Zum leichteren Zeichnen können noch weitere im Abstand von $\frac{T}{2}$ liegende Nullstellen berechnet werden:

$t_1 = t_0 + \frac{T}{2} \approx 1{,}05$ s, $t_2 = t_0 + T \approx 2{,}62$ s, $t_3 = t_0 + 3 \cdot \frac{T}{2} \approx 4{,}19$ s.

Zum Vergleich ist in Abb. 5.55 die Abszissenachse auch mit $\omega t = 2t$ beschriftet: Nun ist die Periode einfach 2π und die beim Ursprung liegende Nullstelle $\omega t_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Darstellung einer Sinusschwingung im Zeigerdiagramm

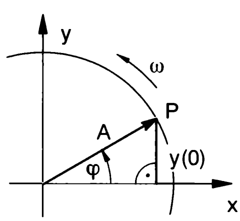


Abb. 5.56 Zeigerdiagramm einer Sinusschwingung

Jede Sinusschwingung lässt sich auf eine Kreisbewegung eines Punktes zurückführen (Beispiel 5.20). Statt diesen Punkt kann man auch dessen Ortsvektor betrachten, der in diesem Zusammenhang auch **Zeiger** genannt wird. Üblicherweise wird in einem sogenannten **Zeigerdiagramm** der Zeiger (Ortsvektor) des kreisenden Punktes P zum Zeitpunkt $t = 0$ s wie in Abb. 5.56 gezeichnet. Die y-Koordinate der Zeigerspitze ist die Auslenkung (Elongation) y zu diesem Zeitpunkt, in Abb. 5.56 mit y(0) bezeichnet (überlege dies an Hand des rechtwinkligen Dreieckes!). Der Zeiger bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn. Ein Zeigerdiagramm ist also ein Momentanbild der Sinusschwingung.

Beispiel 5.22: Darstellung von Sinusschwingungen im Zeigerdiagramm

Stelle folgende Sinusschwingungen im Zeigerdiagramm dar:

a) $y = 1{,}5 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $y = \sin 4t$

c) $y = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$ **d)** $y = 2 \cdot \cos(5t + 0{,}4)$

Lösung

Jede Sinusschwingung wird zum Zeitpunkt $t = 0$ als Zeiger dargestellt. In **b)** ist $\varphi = 0$; in **d)** ist zu beachten, dass $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ und daher $y = 2 \cdot \sin\left(5t + \frac{\pi}{2} + 0{,}4\right)$ ist.

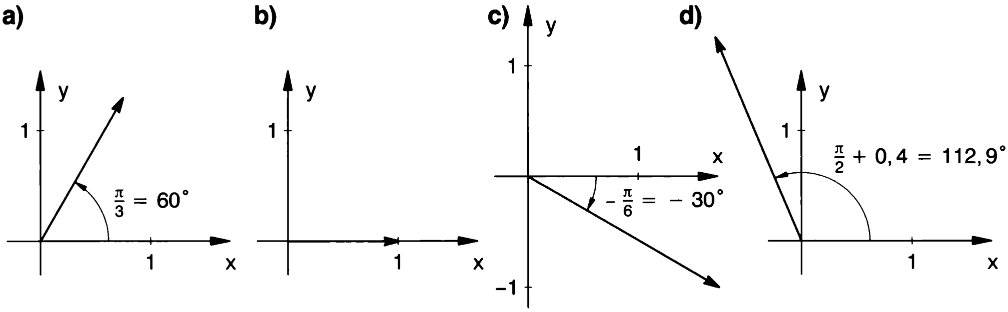


Abb. 5.57

Bei einer Überlagerung von Sinusschwingungen kommt es darauf an, ob die Schwingungsrichtungen gleich sind oder normal aufeinander stehen. Im zweiten Fall ist die Schwingungsüberlagerung bei einem ganzzahligen Frequenzverhältnis eine sogenannte Lissajous-Figur (siehe Seite 178). Im Folgenden besitzen die Teilschwingungen gleiche Schwingungsrichtung.

Beispiel 5.23: Überlagerung gleichfrequenter Sinusschwingungen im Zeigerdiagramm

Gesucht ist die Überlagerung (Summe) der beiden gleichfrequenten Sinusschwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$.

Führe die Rechnung zuerst allgemein und dann mit folgenden Zahlenwerten durch:

$A_1 = 3$, $\varphi_1 = 20°$, $A_2 = 2$, $\varphi_2 = 70°$.

Lösung

In Abb. 5.58 sind die Zeiger der beiden Teilschwingungen dargestellt. Da sie gleichfrequent sind, rotieren sie gleich schnell und ihre gegenseitige Lage bleibt unverändert. Der Zeiger der Summe $y_1 + y_2$ ergibt sich, wie aus Abb. 5.58 ersichtlich, durch Vektoraddition. Die Amplitude A kann mit Hilfe des Kosinussatzes, angewendet auf das farblich hervorgehobene Dreieck, berechnet werden:

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 . A_2\cos\varepsilon$.

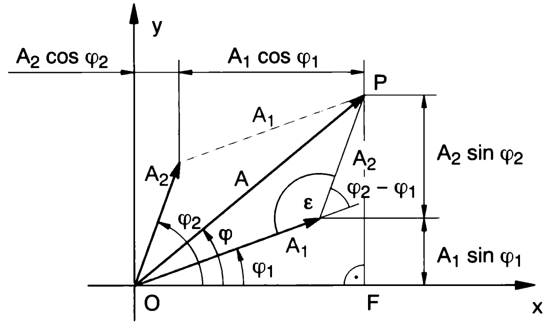


Abb. 5.58 Zeigerdiagramm zur Überlagerung gleichfrequenter Sinusschwingungen

Verwendet man, dass $\cos \varepsilon = \cos [180° - (\varphi_2 - \varphi_1)] = -\cos (\varphi_2 - \varphi_1)$, und bildet $\tan \varphi$ im rechtwinkligen Dreieck OFP (φ ist der Nullphasenwinkel der Summe), so erhält man schließlich:

$$A_1 \cdot \sin (\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin (\omega t + \varphi_2) = A \cdot \sin (\omega t + \varphi)$$

$$\text{mit } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)} \text{ und } \tan \varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

Die Summe gleichfrequenter Sinusschwingungen ist wieder eine Sinusschwingung der gleichen Frequenz.

Zahlenbeispiel:

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos (70° - 20°)} = 4{,}55.$$

$$\tan \varphi = \frac{3 \sin 20° + 2 \sin 70°}{3 \cos 20° + 2 \cos 70°} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 39{,}7°.$$

$$y_1 + y_2 = 4{,}55 \cdot \sin (\omega t + 39{,}7°).$$

Beispiel 5.24: Überlagerung von Sinusschwingungen ungleicher Frequenz

Zeichne durch punktweise Addition die Summe (Überlagerung) der beiden Sinusschwingungen $y_1 = \sin t$ und $y_2 = \sin 2t$ ungleicher Frequenz.

Lösung

Da nun die beiden Zeiger unterschiedlich schnell rotieren, ändert sich damit auch die Länge des Summenzeigers; er stellt daher *keine* Sinusschwingung dar!

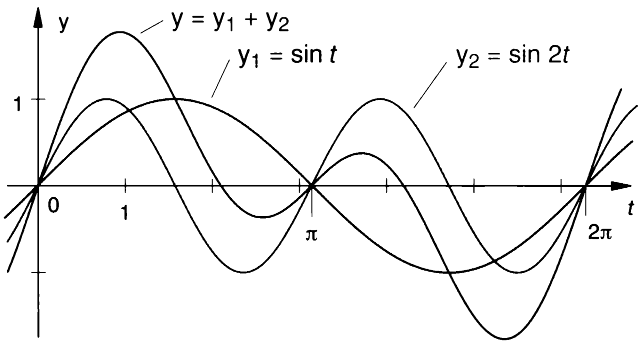
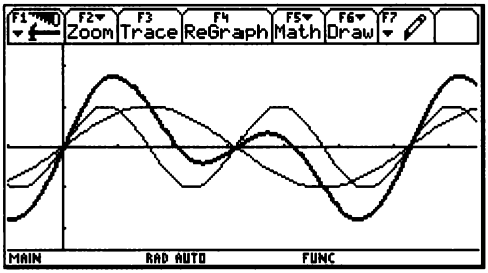


Abb. 5.59 Addition von Sinusschwingungen ungleicher Frequenz

Nach 2π s sind beide Schwingungen wieder im selben Schwingungszustand wie zur Zeit $t = 0$ s. Von da weg wiederholen sich die Summenwerte: Die Überlagerung ist daher eine periodische Schwingung, aber keine Sinusschwingung mehr.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Umkehrung dieser Aufgabenstellung. Denn unter sehr allgemeinen Voraussetzungen lässt sich jeder periodische Vorgang als Summe von Sinusschwingungen darstellen (Fourier-Analyse).

Voyage 200



Aufgaben

Zeichne die Graphen folgender Funktionen:

5.52 **a)** $y = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $y = -\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $y = -\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = 2 \cdot \sin(3t - 1)$ **e)** $y = 3 \cdot \sin\left(\frac{t}{2} + 1\right)$ **f)** $y = |2 \cdot \sin(0{,}8t - 1{,}2)|$

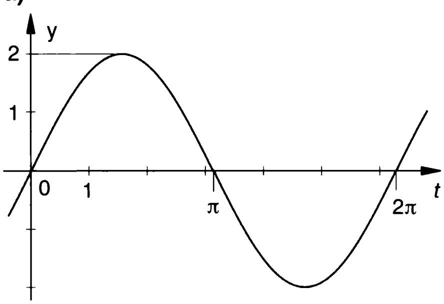
5.53 **a)** $y = \cos(t + 0{,}5)$ **b)** $y = 2 \cdot \cos(2t - 0{,}4)$ **c)** $y = \frac{1}{2} \cdot \cos(3t + 0{,}6)$

Hinweis: Schreibe mit Hilfe von $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ in eine Sinusfunktion um!

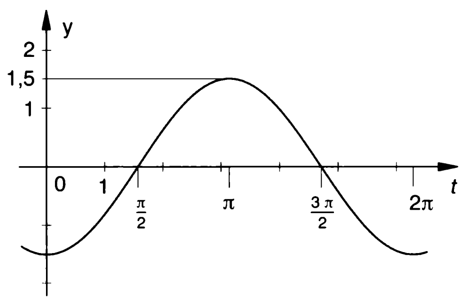
5.54 **a)** $y = 2 + \sin(t + 1)$ **b)** $y = 2 - \sin(2t + 1)$ **c)** $y = 2 + 3 \cdot \sin(2t - 1)$

5.55 Wie lauten die Funktionsgleichungen der folgenden Graphen von allgemeinen Sinusfunktionen?

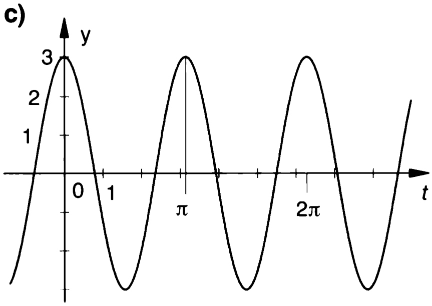
a)



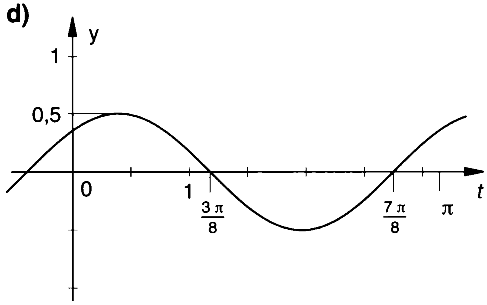
b)



c)

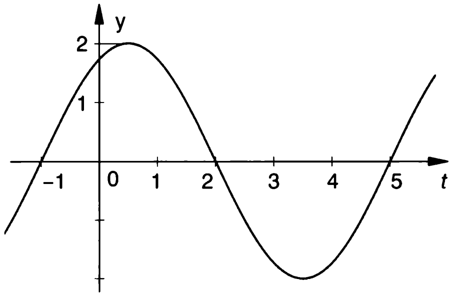


d)

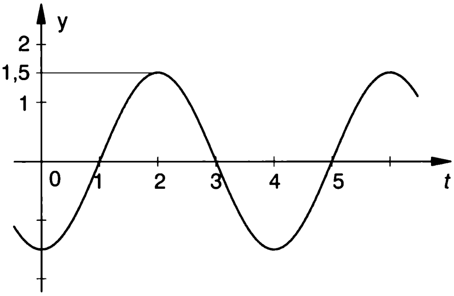


5.56 Wie lauten die Funktionsgleichungen der folgenden Graphen von allgemeinen Sinusfunktionen?

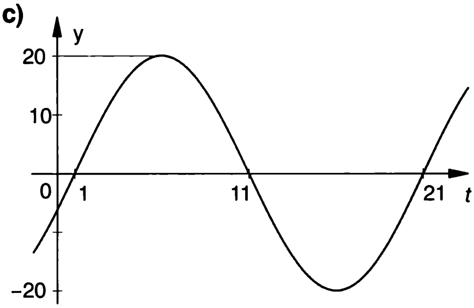
a)



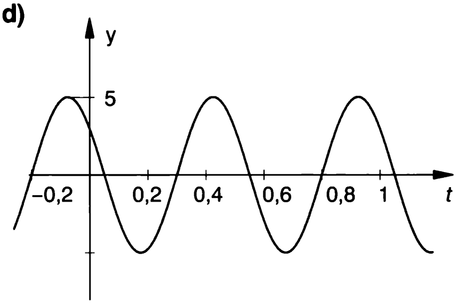
b)



c)



d)



5.57 Zeichne die Graphen der Funktionen **a)** $y = 1 + \sin^2 t$ **b)** $y = 1 - \sin t \cdot \cos t$.

Hinweis: $\sin^2 t = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2t)$ bzw. $\sin 2t = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$.

5.58 Stelle die folgenden Schwingungen im Zeigerdiagramm dar:

a) $y = 4 \cdot \sin (t + 1)$ **b)** $y = 2 \cdot \sin (2t + 1)$ **c)** $y = 2 \cdot \cos (2t - 1)$

5.59 Addiere die beiden gleichfrequenten Sinusschwingungen y_1 und y_2:

a) $y_1 = 3 \cdot \sin t$; $y_2 = 2 \cdot \sin (t + 1)$
b) $y_1 = 3 \cdot \sin 3t$; $y_2 = 2 \cdot \sin (3t + 1)$
c) $y_1 = \sin t$; $y_2 = \cos t$
d) $y_1 = 2 \cdot \sin (2t + 0{,}8)$; $y_2 = 3 \cdot \sin (2t + 0{,}4)$

5.60 Gegeben sind die beiden gleichfrequenten Wechselspannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$. Ermittle die durch Summierung entstehende Wechselspannung:

a) $u_1(t) = 50\ \mathrm{V} \cdot \sin \omega t$; $u_2(t) = 80\ \mathrm{V} \cdot \sin(\omega t + 30°)$

b) $u_1(t) = 230\ \mathrm{V} \cdot \sin (\omega t - 20°)$; $u_2(t) = 180\ \mathrm{V} \cdot \sin (\omega t + 50°)$

5.61 $y_1(t) = 8\ \mathrm{cm} \cdot \sin (3\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t + 0{,}6)$ und $y_2(t) = 10\ \mathrm{cm} \cdot \sin (3\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t + 1)$ sind zwei gleichfrequente mechanische Schwingungen. Berechne die durch Überlagerung resultierende Schwingung.

5.8 Goniometrische Gleichungen

Beispiele für goniometrische (oder trigonometrische) Gleichungen:

(1) $\sin 2x = 0{,}8$

(2) $\sin 2x - \cos x = 0$

(3) $\tan x + \cot x = 3$

(4) $\tan x = x$

(5) $\cos x + 2x = 5$

In einer **goniometrischen Gleichung** (Goniometrie: Winkelmessung) tritt die Gleichungsvariable x als Argument einer Kreisfunktion auf. Während es für spezielle Fälle solcher Gleichungen, beispielsweise für (1) bis (3) Lösungswege gibt, sind Gleichungen der Formen (4) oder (5) nur durch graphische oder numerische Verfahren zu lösen. Als Winkelmaß kann bei Aufgaben der Art (1) bis (3) das Bogenmaß oder das Gradmaß verwendet werden, Aufgaben der Art (4) oder (5) setzen das Bogenmaß voraus.

Wegen der Periodizität der Kreisfunktionen gibt es oft eine Vielzahl von Lösungen; bei technischen Fragestellungen muss daraus die dem Problem angemessene Lösung gefunden werden. Bei Übungsbeispielen ist stets auf die Grundmenge zu achten.

In Beispiel 5.2, Seite 126, waren bereits einfache goniometrische Gleichungen zu lösen.

Beispiel 5.25 : Einfachste goniometrische Gleichungen

Löse folgende Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{G} = [0, 2\pi[$:

a) $\sin 2x = 0{,}8$ **b)** $\cos \frac{x}{2} = -0{,}7$ **c)** $\tan (0{,}7x) = 1{,}2$ **d)** $\sin 4x = 2$

Lösung

Zu **a)** Zur Vereinfachung kann man eine Hilfsvariable $u = 2x$ einführen und vorerst $\sin u = 0{,}8$ nach u lösen;

$u_1 = \arcsin 0{,}8 = 0{,}927$;

Der Abb. 5.60 entnimmt man $u_2 = \pi - u_1 = 2{,}214$;

weitere Lösungen in u ergeben sich durch (eventuell mehrfache) Addition von 2π.

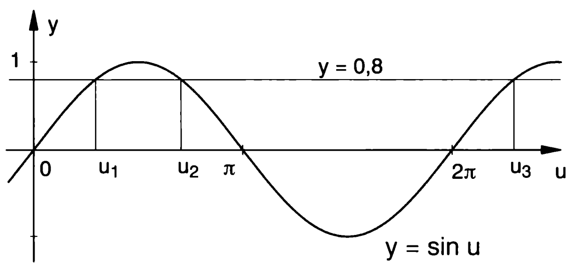
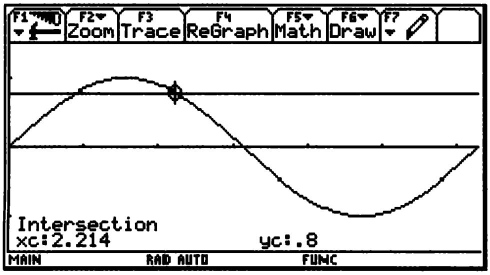


Abb. 5.60

Aus $x = \frac{u}{2}$ folgt: $x_1 = \frac{u_1}{2} = 0{,}464$, $x_2 = \frac{u_2}{2} = 1{,}107$, $x_3 = \frac{u_1 + 2\pi}{2} = 3{,}605$,
$x_4 = \frac{u_2 + 2\pi}{2} = 4{,}249$, $x_5 = \frac{u_1 + 2 \cdot 2\pi}{2} = 6{,}747$.

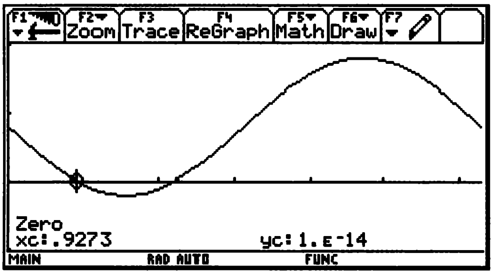
Da $x_5 \geqslant 2\pi$, ist dieser Wert als Lösung nicht mehr zulässig. Es gibt also die vier Lösungen x_1, x_2, x_3 und x_4. *Probe*: $\sin 2x_1 = \sin 2x_2 = \sin 2x_3 = \sin 2x_4 = 0{,}8$.

Voyage 200



Im y-Editor werden die beiden Funktionen y1(x) = sin (x) (für y = sin u) und y2(x) = 0,8 eingegeben und danach für xmin = 0 und xmax = 2π gezeichnet.

Über F5 5 (5:Intersection) ergibt sich als zweite Schnittstelle ihrer Graphen zwischen 0 und 2π der Wert xc = 2,214.



Man kann die Lösungen auch als Nullstellen der Funktion y = 0,8 - sin u sehen. Dazu gibt man im y-Editor y1(x) = 0,8 - sin (x) ein. Nach dem Zeichnen des Funktionsgraphen von y1(x) bestimmt man über F5 2 (2:Zero) die erste Nullstelle zwischen 0 und 2π zu xc = 0,9273.

Zu **b)**

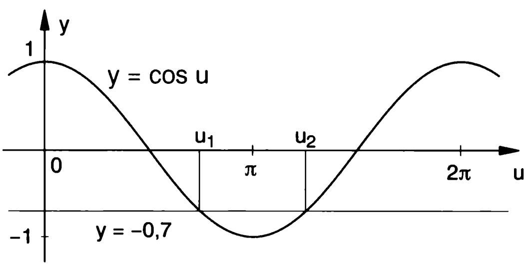


Abb. 5.61

Setzt man $u = \frac{x}{2}$, so ist die einfachere Gleichung cos u = −0,7 zu lösen:

u_1 = arccos (−0,7) = 2,346;

der Abb. 5.61 entnimmt man $u_2 = 2\pi - u_1 = 3{,}937$;

da die Funktion y = cos u periodisch in 2π ist, ergeben sich eventuell weitere Lösungen in der Variablen u durch Addieren von 2π.

Aus x = 2u folgt: $x_1 = 2u_1 = 4{,}692$; $x_2 = 2u_2 = 7{,}874$; da $x_2 \geqslant 2\pi$, ist x_2 nicht mehr zulässig. $x_1 = 4{,}692$ ist somit die einzige Lösung.

Probe: $\cos \frac{4{,}692}{2} = -0{,}7$.

Zu **c)** $u = 0{,}7 \cdot x$; $u_1 = \arctan 1{,}2 = 0{,}876$; $y = \tan u$ (Abb. 5.62) besitzt die Periode π (!); daher ergeben sich eventuell weitere Lösungen in der Variablen u durch Addieren von π.

Aus $x = \frac{u}{0{,}7}$ folgt:

$x_1 = \frac{u_1}{0{,}7} = 1{,}252$, $x_2 = \frac{u_1 + \pi}{0{,}7} = 5{,}740$,

$x_3 = \frac{u_1 + 2 \cdot \pi}{0{,}7} = 10{,}227$; da $x_3 \geqslant 2\pi$, ist dieser Wert als Lösung nicht mehr zulässig; x_1 und x_2 sind daher die Lösungen.

Probe: $\tan(0{,}7 \cdot x_1) = \tan(0{,}7 \cdot x_2) = 1{,}2$.

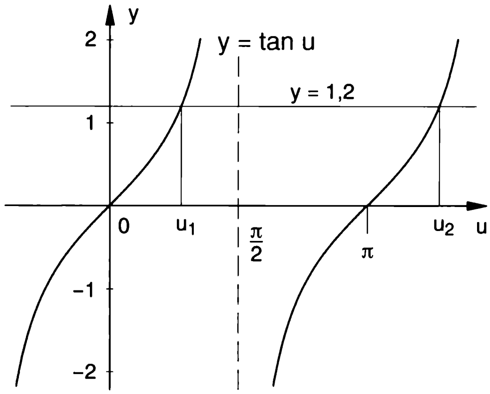
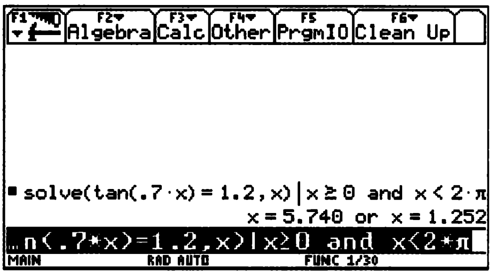


Abb. 5.62



Mit Hilfe des "|"-Operators (Tasten 2ND K) kann als Grundmenge das Intervall $[0; 2\pi[$ angegeben werden. Dies erfolgt durch zeichenweises Eintippen.

Das Zeichen "≥" erhält man durch 2ND + 2 E oder ◆ ·.

Zu **d)** $u = 4x$; $\sin u = 2$; diese Gleichung ist (reell) nicht lösbar, es gibt daher keine Lösung.

Beispiel 5.26: Goniometrische Gleichung mit unterschiedlichen Kreisfunktionen

In einer technischen Zeichnung sind im rechtwinkligen Dreieck der Abb. 5.63 folgende Maße bekannt: a =100 mm, q = 40 mm. Gesucht ist der Winkel β.

Lösung

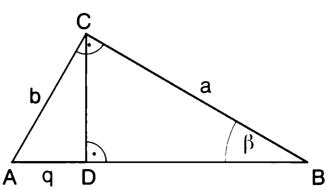


Abb. 5.63

Dreieck ABC: $\tan \beta = \frac{b}{a}$

Dreieck ADC: $\sin \beta = \frac{q}{b}$ (Winkel DCA ist gleich β!)

b kann aus beiden Gleichungen ausgedrückt werden:

$b = a \cdot \tan \beta$ und $b = \frac{q}{\sin \beta}$.

Gleichsetzen ergibt eine goniometrische Gleichung:

$a \cdot \tan \beta = \frac{q}{\sin \beta}$ oder $\sin \beta \cdot \tan \beta = \frac{q}{a} = 0{,}4$

Diese goniometrische Gleichung in β enthält zwei verschiedene Kreisfunktionen; man kann nun versuchen, diese in eine einzige Kreisfunktion umzuformen:

$$\sin\beta\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=0{,}4$$

$$\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}=0{,}4$$

$$\frac{1-\cos^2\beta}{\cos\beta}=0{,}4$$

$$1-\cos^2\beta=0{,}4\cdot\cos\beta$$

$$\cos^2\beta+0.4\cdot\cos\beta-1=0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\cos\beta$. Setzt man vereinfachend $v=\cos\beta$, so erhält man $v^2+0{,}4\cdot v-1=0$.

Lösung: $v_{1,2}=-0{,}2\pm\sqrt{0,04+1}$ oder $v_1=0{,}820$ und $v_2=-1{,}220$. Die zweite Lösung ist nicht möglich, da $|\cos\beta|<1$ ist. Aus $\cos\beta=0{,}820$ folgt $\beta=34{,}9°$; weitere Lösungen scheiden aus, da β ein spitzer Winkel sein muss.

Beispiel 5.27: Goniometrische Gleichung mit verschiedenen Winkeln

Suche alle Lösungen im Intervall $\mathbb{G}=[0,\pi[$: $\sin 2x=1{,}6\cdot\cos x$.

Lösung

Wir setzen $\sin 2x=2\cdot\sin x\cos x$; damit erreicht man, dass die auftretenden Kreisfunktionen ein einheitliches Argument bekommen:

$2\cdot\sin x\cdot\cos x=1{,}6\cdot\cos x$ oder $\sin x\cdot\cos x=0{,}8\cdot\cos x$.

Weiters: $\sin x\cdot\cos x-0{,}8\cdot\cos x=0$.

Hier darf nicht durch $\cos x$ dividiert werden, da dieser Term 0 sein kann! Eine Division durch $\cos x$ würde hier den Verlust einer Lösung bedeuten. Wir heben $\cos x$ heraus und wenden den Produkt-Null-Satz an ("Ingenieur-Mathematik 1", Seite 48):

In diesem Produkt kann jeder der beiden Faktoren 0 sein. Im Folgenden sind nur die zulässigen Lösungen angegeben.

1. Fall:	$\cos x=0$;	$x_1=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$
2. Fall:	$\sin x-0{,}8=0$ oder $\sin x=0{,}8$;	$x_2=\arcsin 0{,}8=0{,}927$; $x_3=\pi-x_2=2{,}214$.

Probe: $\sin 2x_1=1{,}6\cdot\cos x_1$; $\sin 2x_2=1{,}6\cdot\cos x_2$; $\sin 2x_3=1{,}6\cdot\cos x_3$.

Beispiel 5.28: Lösung durch Addition von Sinusfunktionen

$\sin x+2\cdot\cos x=1$ ist in $[0,2\pi[$ zu lösen.

Lösung

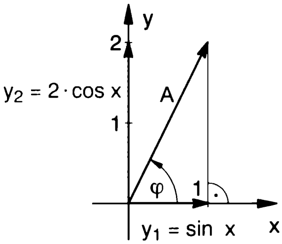


Abb. 5.64

Aus dem Zeigerdiagramm Abb. 5.64 entnimmt man für die Summe $\sin x + 2 \cdot \cos x$ ($\cos x = \sin(x + 90°)$):

$A^2 = 1^2 + 2^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{5}$

$\tan \varphi = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 1{,}107.$

Damit ist $\sin x + 2 \cdot \cos x = \sqrt{5} \cdot \sin(x + 1{,}107)$ und die goniometrische Gleichung lautet nun:

$\sqrt{5} \cdot \sin(x + 1{,}107) = 1 \quad$ oder $\quad \sin(x + 1{,}107) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Setzt man $u = x + 1{,}107$, so ist $u_1 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}464$ und $u_2 = \pi - u_2 = 2{,}678$. Eventuell weitere Lösungen in u enthält man durch Addition von 2π zu u_1 und u_2.

Daraus

$x_1 = u_1 - 1{,}107 = -0{,}644;$

$x_2 = u_2 - 1{,}107 = 1{,}571;$

$x_3 = u_1 + 2\pi - 1{,}107 = 5{,}640.$

Im zulässigen Bereich $[0, 2\pi[$ liegen x_2 und x_3, weshalb dies die gesuchten Lösungen sind.

Probe: $\sin x_2 + 2 \cdot \cos x_2 = 1$ und $\sin x_3 + 2 \cdot \cos x_3 = 1$.

Lösungsvariante:

$\sin x + 2 \cdot \cos x = 1; \; 2 \cdot \cos x = 1 - \sin x \qquad |$ quadrieren

$4 \cdot \cos^2 x = 1 - 2 \cdot \sin x + \sin^2 x; \; 4 \cdot (1 - \sin^2 x) = 1 - 2 \cdot \sin x + \sin^2 x$

$-5 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin x + 3 = 0; \; v = \sin x;$

$5v^2 + 2v + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -0{,}6; \; v_2 = 1;$

$\sin x = -0{,}6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -0{,}644 + 2\pi = 5{,}640;$

$\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{2} = 1{,}571$

Wie könnte man beim Lösen goniometrischer Gleichungen vorgehen?

Einen allgemeinen Lösungsalgorithmus für solche Gleichungen gibt es nicht. Trotzdem kann man zwei Dinge versuchen:

1. Vereinheitlichung der Argumente (Winkel) wie in Beispiel 5.27; danach:
2. Vereinheitlichung der Kreisfunktionen wie in Beispiel 5.26 oder Beispiel 5.28. Wird dabei die Gleichung quadriert, so ist die Probe zu machen. Denn Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung.

Selbst wenn diese beiden Vorhaben glücken, kann es zu Gleichungen höherer Ordnung kommen, für die es keine Lösungsformeln gibt. Man wird dann auch hier numerische oder graphische Verfahren zur Lösung verwenden.

Aufgaben

5.62 Löse in $[0°, 360°[$:

a) $\sin 2x = 0{,}8$ **b)** $\cos \frac{x}{2} = -0{,}4$ **c)** $\tan 0{,}8x = 2$

d) $\sin 1{,}5x = 0{,}5$ **e)** $\cos 1{,}2x = 0{,}5$ **f)** $\tan 1{,}5x = 1$

Löse in $[0, 2\pi[$:

5.63 **a)** $\sin(2x + 3) = 0{,}5$ **b)** $\cos(3x - 1) = 0{,}2$ **c)** $\tan \frac{x+1}{2} = 3$

5.64 **a)** $2 \cdot \sin x = 3 \cdot \cos x$ **b)** $\sin x = 2 \cdot \tan x$ **c)** $\cos x = -\frac{1}{2} \cdot \tan x$

5.65 **a)** $2 \cdot \sin x = \frac{1}{\cos x}$ **b)** $\cos^2 x - \sin^2 x = 0{,}4$ **c)** $\sin^2 x - 2\cos^2 x = 1$

5.66 **a)** $\sin x + \cos x = 1{,}2$ **b)** $2 \cdot \sin x + \cos x = 0{,}8$ **c)** $3 \cdot \sin x - \cos x = 0{,}2$
d) $1 + \sin x = \sin^2 x$ **e)** $1 + \cos x = \sin^2 x$ **f)** $2 - \sin x = \sin^2 x$

5.67 **a)** $\sin 2x = 2 \cdot \sin x$ **b)** $5 \cdot \sin 2x = 4 \cot x$ **c)** $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$
d) $\cos x + \cot x = 1 + \sin x$ **e)** $\cos x - \tan x = \frac{1}{2}\cos x$ **f)** $\sin x = \cos 2x$

Im Überblick: Kreisfunktionen (Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen)

Definition für beliebige Winkel:

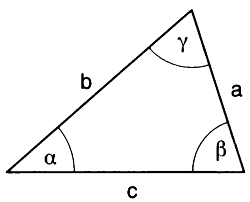
$\sin\alpha$ = y-Koordinate
$\cos\alpha$ = x-Koordinate
des zu α gehörigen Punktes P am Einheitskreis.

Falls der Nenner $\neq 0$: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Wichtig: Bildliche Darstellung der Kreisfunktionen am Einheitskreis!

Grundbeziehungen zwischen den Kreisfunktionen:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$.



Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Kosinussatz:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

Trigonometrische Flächenformel: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

Erster Summensatz:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\qquad$ bzw. $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ $\qquad$ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Zweiter Summensatz:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Sinusfunktion y = sin x: $x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq y \leq 1$; Periode $2\pi = 360°$; Nullstellen: $k\pi$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; ungerade Funktion, d.h. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

Kosinusfunktion y = cos x: Graph gegenüber jenem der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2} = 90°$ nach links verschoben; gerade Funktion, d.h. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

Tangensfunktion y = tan x: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$ (Unendlichkeitsstellen);
Periode $\pi = 180°$; $-\infty < \tan x < \infty$; Nullstellen: $k\pi$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
ungerade Funktion, d.h. $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.

Arkusfunktionen: Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen;
arcsin x ist der *Winkel* im Bogenmaß zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, dessen Sinus gleich x ist;
arccos x ist der *Winkel* im Bogenmaß zwischen 0 und π, dessen Kosinus gleich x ist;
arctan x ist der *Winkel* im Bogenmaß zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, dessen Tangens gleich x ist.

Die Funktion $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ heißt **allgemeine Sinusfunktion, Sinusschwingung** oder **harmonische Schwingung**. Die Projektion einer gleichmäßigen Kreisbewegung normal zur Kreisbahn ist eine Sinusschwingung.
A Amplitude, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Periode, φ Nullphasenwinkel (Verschiebung $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$)

Zeigerdiagramm: Graphische Darstellung einer Sinusschwingung als Zeiger

Die **Summe gleichfrequenter Sinusschwingungen** (gleicher Schwingungsrichtung) ist wieder eine Sinusschwingung der gleichen Frequenz. Bei ungleichen Frequenzen und ganzahligem Frequenzverhältnis ist die Summe ein periodischer Vorgang.

Goniometrischen Gleichungen
Gleichungsvariable x als Argument von Kreisfunktionen

Galileo, das europäische Satelliten-Navigationssystem

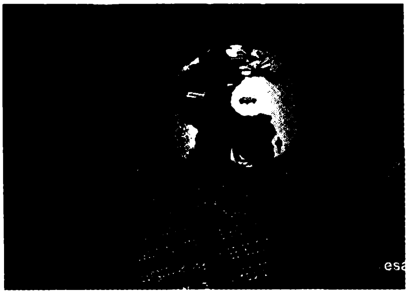


Bild: ESA – J-. Huart

Galileo ist das erste satellitengestützte *zivile* Navigationssystem der Welt. Die 30 Satelliten dieses Gemeinschaftsvorhabens der ESA (European Space Agency) und der Europäischen Union werden viele Anwendungen unterstützen. Bekannt ist das amerikanische globale Navigationssystem GPS (Global Positioning System), das von den USA betrieben wird. GPS stützt sich auf 24 Satelliten.

Das Grundprinzip der Satellitennavigation ist zwar einfach, in der Praxis sind aber viele große Schwierigkeiten zu überwinden. Die Signale werden mit Lichtgeschwindigkeit übertragen. Wird die Laufzeit um eine tausendstel Sekunde falsch bestimmt, so ist der Kugelradius zum Empfänger um 300 km falsch, das System wäre unbrauchbar. Daher besitzen die Satelliten Atomuhren, die von Bodenstationen geregelt werden. Dazu kommt noch, dass die Zeit am Satelliten nach der Relativitätstheorie etwas schneller als auf der Erde verläuft.

6 Parameterdarstellung und Polarkoordinaten

6.1 Parameterdarstellung

Nicht immer ist es möglich, eine Abhängigkeit zwischen zwei Größen x und y durch eine einzige Gleichung auszudrücken. Statt dessen gibt man x und y in Abhängigkeit von einer Hilfsvariablen, dem sogenannten *Parameter*, an. Dies kann auch einfacher sein als eine einzige Gleichung mit den Variablen x und y.

Beispiel 6.1 : Waagrechter Wurf (Grundlage einer Sortieranlage)

Eine Kugel (Abb. 6.1) bewegt sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 2\ \mathrm{ms}^{-1}$ auf einer horizontalen Bahn in der Höhe $h = 1$ m über dem Boden. Im Punkt P beginnt sie frei zu fallen. Wo muss ein Behälter auf dem Boden stehen, wenn er die Kugel aufnehmen soll?

Lösung

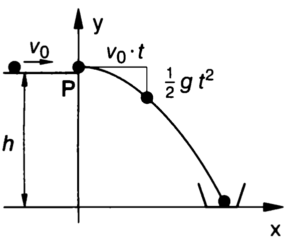


Abb. 6.1 Waagrechter Wurf

Zur Beschreibung der Bahnkurve der Kugel legen wir ein Koordinatensystem gemäß Abb. 6.1 fest. Die Bewegung nach dem Verlassen der horizontalen Bahn (zur Zeit $t = 0$ s) lässt sich in zwei gleichzeitig stattfindende Bewegungen zerlegen und im angenommenen Koordinatensystem wie folgt beschreiben:

(1) Gleichförmige Bewegung $x(t) = v_0 \cdot t$ in horizontaler Richtung.

(2) Freier Fall in vertikaler Richtung ($g \approx 10\ \mathrm{ms}^{-2}$): $y(t) = h - \frac{g}{2} \cdot t^2$

Wir bestimmen für einige Zeitpunkte t die Koordinaten (x, y in m bzw. t in s) von Punkten der Bahnkurve: $x = 2t$, $y = 1 - 5t^2$.

t	$x(t)$	$y(t)$
0	0	1
0,1	0,2	0,95
0,2	0,4	0,8
0,3	0,6	0,55
0,4	0,8	0,2

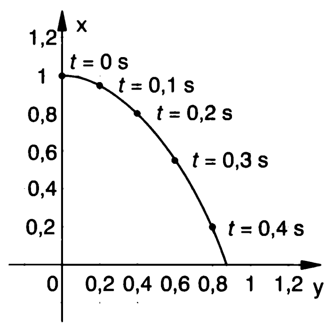


Abb. 6.2 Zeit t als Parameter

Sowohl $x = x(t)$ als auch $y = y(t)$ sind Funktionen der Zeit t. Über die Variable t gibt es daher auch eine Zuordnung zwischen x und y. Man nennt die Variable t, die diese Zuordnung zwischen x und y vermittelt, einen **Parameter** (Betonung auf der zweiten Silbe) und spricht von einer **Parameterdarstellung** dieser Zuordnung.

Die Kugel ist auf Bodenniveau, wenn y = 0 m ist. Mit $h = 1$ m ergibt sich: $0 = 1 - 5 \cdot t^2$; daraus $t = 0{,}45$ s. Zu diesem Zeitpunkt ist die x-Koordinate des Bahnpunktes gleich $x = v_0 \cdot t = 0{,}89$ m. Dies gibt den Ort an, wo der Behälter stehen muss, um die Kugel aufzunehmen.

In diesem Beispiel kann leicht der direkte Zusammenhang zwischen x und y angegeben werden.

Aus $x = v_0 \cdot t$ folgt $t = \frac{x}{v_0}$. Daraus $y = h - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2$.

Als Zahlenwertgleichung können wir auch schreiben: $y = 1 - \frac{5}{4}x^2$. Die Bahnkurve ist also Teil einer sich nach unten öffnenden Parabel ("Wurfparabel"). Man sagt, dass nun die Zuordnung zwischen x und y **parameterfrei** vorliegt.

Beispiel 6.2 : Parameterdarstellung einer Geraden (1)

a) Ermittle die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke P_1P_2 mit $P_1\,(1/4)$ und $P_2\,(5/3)$.

b) Ermittle die Gleichung der Geraden durch die Punkte P_1 und P_2.

Lösung

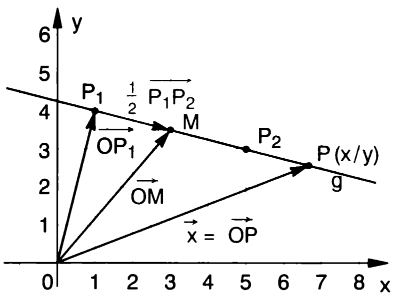


Abb. 6.3 Ortsvektoren von Geradenpunkten

Zu **a)** Man erhält den Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ des Mittelpunktes M der Strecke P_1P_2, wenn man zum Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$ des Punktes P_1 die Hälfte des Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ addiert:

$$\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{OM}$$

$$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5-1\\3-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-0,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3,5\end{pmatrix}.$$

Somit: M (3/3,5).

Zu **b)** Man erhält also die Koordinaten von M, wenn man zu $\overrightarrow{OP_1}$ den Vektor $\frac{1}{2}\cdot\vec{a}$ addiert. Nimmt man an Stelle von $\frac{1}{2}$ ein beliebige reelle Zahl, die wir λ nennen, und addiert zu $\overrightarrow{OP_1}$ den Vektor $\lambda\cdot\vec{a}$, so erhält man den Ortsvektor $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ eines Punktes P (x/y) der Geraden durch P_1 und P_2:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda\cdot\vec{a}.$$

Man spricht von einer *Parameterdarstellung der Geraden in Vektorform*; $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Parameter. $\vec{a}$ ist ein Vektor in Richtung der Geraden und heißt daher auch ein *Richtungsvektor* der Geraden.

Dass hier der Parameter mit einem griechischen Buchstaben bezeichnet wird, ist in der Vektorrechnung üblich. Natürlich könnte auch hier ein Parameter mit einem lateinischen Buchstaben wie t oder s bezeichnet werden.

Die Vektorgleichung kann auch in Form von zwei Koordinatengleichungen geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4\lambda\\4-\lambda\end{pmatrix};$$

daraus erhält man eine *Parameterdarstellung der Geraden in Koordinatenform*:

$x = 1 + 4\lambda$

$y = 4 - \lambda.$

Diese Darstellung kann durch Eliminierung des Parameters λ parameterfrei gemacht werden, wodurch man die Normalform $y = k \cdot x + d$ der Geraden erhält:

$x = 1 + 4 \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4}(x - 1)$. Damit ist $y = 4 - \lambda = 4 - \frac{1}{4}(x - 1) = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$.

Setze $\lambda = \frac{1}{2}$ und 1: Welche Punkte erhält man?

Allgemein:

Parameterdarstellung einer Geraden in

Vektorform

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

Koordinatenform

$x = x_1 + \lambda \cdot a_x$
$y = y_1 + \lambda \cdot a_y$

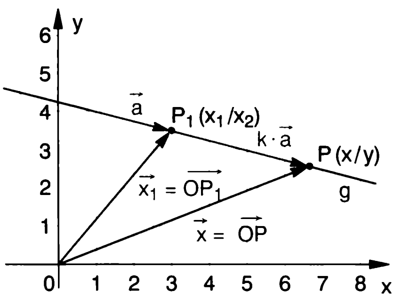


Abb. 6.4 Parameterdarstellung einer Geraden

Dabei bedeuten:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ Ortsvektor eines beliebigen **Geradenpunktes** P_1

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ein **Richtungsvektor** der Geraden

Mit $\vec{a}$ ist auch jedes Vielfache $k \cdot \vec{a}$ ($k \in \mathbb{R}$) ein Richtungsvektor. Zu jedem Parameterwert $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es genau einen Geradenpunkt und umgekehrt gehört auch zu jedem Geradenpunkt genau ein λ.

Beispiel 6.3 : Parameterdarstellung einer Geraden (2)

Zeichne die Gerade, die durch die Parameterdarstellung $x = 3 + 3\lambda$, $y = -1 + 2\lambda$ gegeben ist.

Lösung

1. Lösungsvariante:

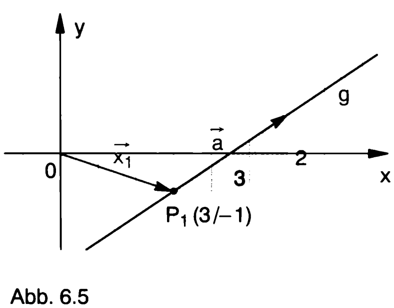


Abb. 6.5

Wir schreiben die beiden Koordinatengleichungen in Vektorform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 3\lambda \\ -1 + 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Daraus entnimmt man den Geradenpunkt $P_1(3/-1)$ und den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Abb. 6.5 zeigt die auf diese Weise gezeichnete Gerade.

2. Lösungsvariante:

Eine Gerade kann gezeichnet werden, wenn zwei Punkte bekannt sind. Ein dritter Punkt dient zur Kontrolle.

λ	x	y
−1	0	−3
0	3	−1
1	6	1

Somit lauten die Koordinaten der drei Geradenpunkte: A(0/−3), B(3/−1) und C(6/1).

3. Lösungsvariante:

Durch Elimination des Parameters λ kann die Gerade parameterfrei dargestellt werden.

$x = 3 + 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3}\cdot(x-3); \quad y = -1 + 2\lambda = -1 + \frac{2}{3}\cdot(x-3) = \frac{2}{3}\cdot x - 3.$

Damit erhalten wir die Gleichung in der Normalform $y = k\cdot x + d$; sie kann nun aus der Kenntnis von k und d gezeichnet werden ("Ingenieur-Mathematik 1", Seite 178).

Beispiel 6.4: Umwandlung einer parameterfreien Form in eine Parameterdarstellung einer Geraden

Von der Geraden $y = 2x + 3$ soll eine Parameterdarstellung ermittelt werden.

Lösung

Wir können beispielsweise die Variable x als Parameter λ wählen: $x = \lambda$. Dann ist $y = 2\lambda + 3$. Eine Parameterdarstellung lautet daher:

$x = \lambda;$
$y = 2\lambda + 3$

oder in Vektorform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \lambda\cdot 1 \\ 3 + \lambda\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Kontrolle:

Wenn wir für λ einen beliebigen Zahlenwert einsetzen, erhalten wir die Koordinaten eines Geradenpunktes. Z.B. $\lambda = 1$: $x = 1$; $y = 2\cdot 1 + 3 = 5$.

Es ist nun zu prüfen, ob diese Koordinaten die Gleichung $y = 2x + 3$ erfüllen: $5 = 2\cdot 1 + 3$.

Da dies eine wahre Aussage ist, kann die Richtigkeit der Rechnung vermutet werden.

Man hätte in Beispiel 6.4 auch eine andere Parameterdarstellung wählen können. Setzt man etwa $x = 1 + 3\mu$, so folgt $y = 2x + 3 = 6\mu + 5$. Damit erhalten wir die Parameterdarstellung:

$x = 1 + 3\mu$; $y = 6\mu + 5$ oder in Vektorform $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Es gibt daher *keine eindeutige* Parameterdarstellung!

Richtungsvektor und Steigung einer Geraden

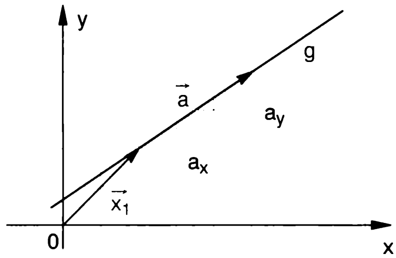


Abb. 6.6 Richtungsvektor und Steigung einer Geraden

Dem Steigungsdreieck in Abb. 6.6 entnimmt man:

> Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor einer Geraden, dann gilt für deren Steigung:
>
> $k = \frac{a_y}{a_x}$.

Beispiel 6.5: Parameterdarstellung einer Geraden, wenn zwei Punkte gegeben sind

Von der Geraden g kennt man 2 Punkte A(4/–7) und B(–2/3). Ermittle eine Parameterdarstellung von g.

Lösung

Als Ortsvektor $\vec{x}_1$ kann man $\overrightarrow{OA}$ oder $\overrightarrow{OB}$ wählen; wir entscheiden uns für $\overrightarrow{OA}$: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Für den Richtungsvektor $\vec{a}$ kann irgendein Vektor gleicher oder entgegengesetzter Richtung zu $\overrightarrow{AB}$ gewählt werden:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 3-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Somit lautet eine Parameterdarstellung von g in Vektorform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und in Koordinatenform: $x = 4 - 3 \cdot \lambda$; $y = -7 + 5 \cdot \lambda$.

Beispiel 6.6 : Kreis in Parameterdarstellung

Gib die Gleichung des Kreises mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung O in einer Parameterdarstellung an.

Lösung

Dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 6.7 entnimmt man sofort, dass $x = r \cdot \cos t$ und $y = r \cdot \sin t$.

Parameterdarstellung eines Kreises (Abb. 6.7)

$x = r \cdot \cos t$
$y = r \cdot \sin t$

Für $t \in [0°, 360°[$ oder im Bogenmaß $t \in [0, 2\pi[$ erhält man alle Kreispunkte. Bei dieser Parameterdarstellung ist der Parameter t ein *Winkel*.

Es gibt noch andere Parameterdarstellungen des Kreises.

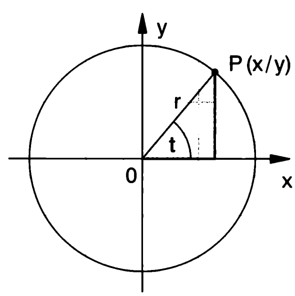


Abb. 6.7 Parameterdarstellung eines Kreises

Voyage 200

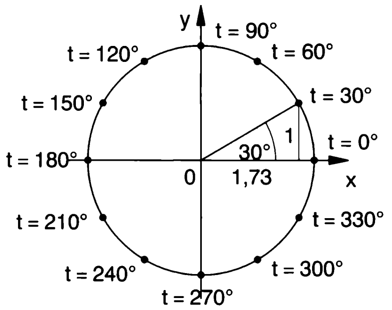
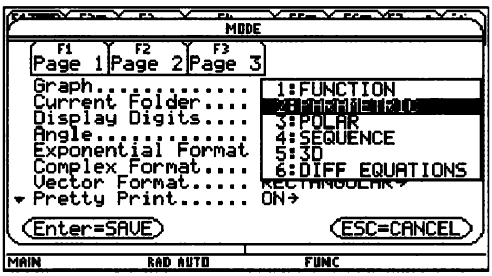


Abb. 6.8 Konstruktion des Kreises

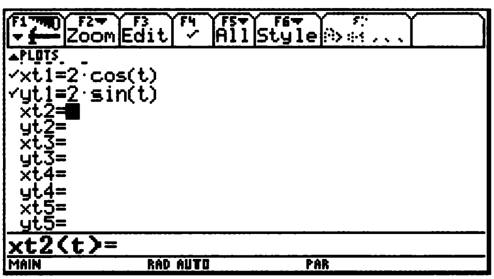
Wir bestimmen die Koordinaten einiger ausgewählten Kreispunkte:

t	x	y
0°	2	0
30°	1,73	1
60°	1	1,73
90°	0	2
...	...	...
300°	1	−1,73
330°	1,73	−1

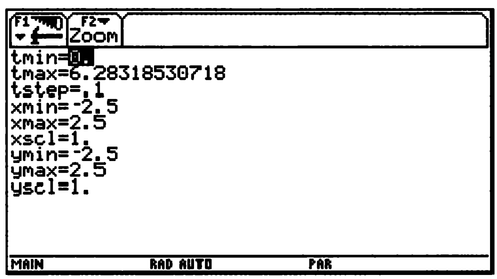


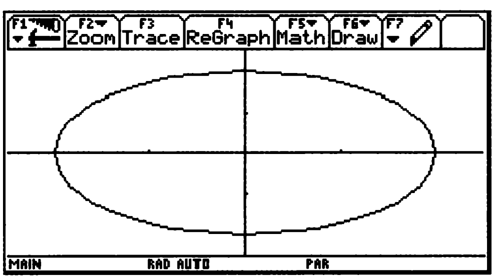
Im MODE-Menü aktiviert man bei Graph 2 (2:PARAMETRIC).
Bei Angle wählen wir diesmal 1 (1:RADIAN). Wählt man dagegen 2 (2:DEGREE), so sind die Window-Einstellungen entsprechend abzuändern.

y-Editor (r = 2 gewählt):



Window-Einstellungen: tmax = 2·π





Der Graph ist nicht kreisförmig. Dies kommt durch die unterschiedlichen Einheiten auf den beiden Koordinatenachsen zustande.

Durch Drücken von F2 5 (5:ZoomSqr) erreicht man gleiche Einheiten auf den Achsen und dadurch einen kreisförmigen Graphen.

In der Getriebetechnik sind die sogenannten Zykloiden von Bedeutung. Die gewöhnliche Zykloide, kurz Zykloide genannt, wird zur Beschreibung von Zahnstangenantrieben verwendet. Hypo- und Epizykloiden finden Anwendung bei Zahn- und Reibradgetrieben.

Beispiel 6.7: Zykloide (Z.B.: Ein Zahnrad bewegt sich auf einer Zahnstange)

Ein Kreis mit dem Radius r rollt ohne zu gleiten auf einer Geraden ab. Ein Punkt P ist fest mit dem Kreis im Abstand a vom Mittelpunkt verbunden. Stelle eine Parameterdarstellung der Bahnkurve des Punktes P auf!

Lösung

Die Bahnkurve, die der Punkt P beschreibt, heißt **Zykloide** oder Radlinie. Wir wählen die Gerade, auf der der Kreis rollt, als x-Achse. Der Kreis soll am Anfang eine Lage einnehmen, wie in Abb. 6.9 gezeichnet. Da der Kreis ohne zu gleiten rollt, gilt:

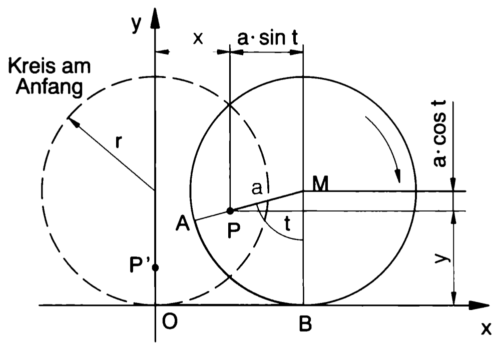


Abb. 6.9 Parameterdarstellung einer Zykloide

$\overline{OB} = \widehat{AB} = r \cdot t$;

dabei ist t der sogenannte *Wälzwinkel* PMB im *Bogenmaß*.

Aus Abb. 6.9 folgt für die Koordinaten x und y des Punktes P:

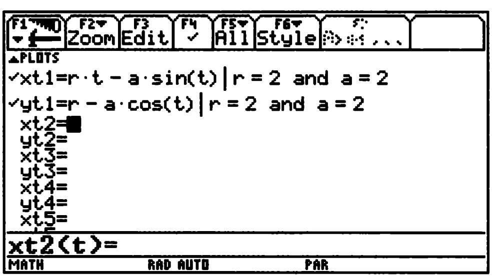
$x = r \cdot t - a \cdot \sin t,$

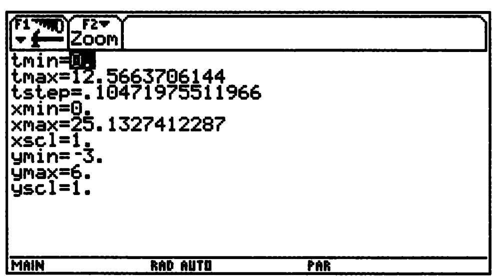
$y = r - a \cdot \cos t.$

Dies ist zugleich eine *Parameterdarstellung der Zykloide*.

Nach einer vollen Umdrehung des Kreises, also nach jeweils $\Delta t = 2\pi$ bzw. $\Delta x = 2\pi r$ wiederholen sich die y-Werte. Diese liegen im Intervall $[r - a, r + a]$.

Es ist nicht möglich, die Parameterdarstellung in Form einer Gleichung $y = f(x)$ zu schreiben, obwohl eine Funktion vorliegt.

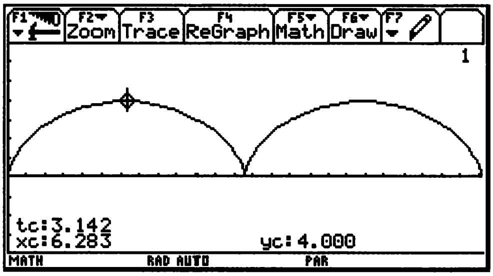




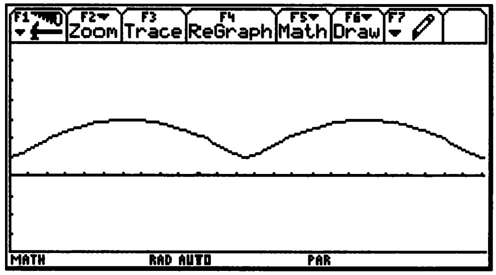
Mit dem y-Editor werden die beiden Funktionsgleichungen eingegeben.

Window-Einstellungen: tmax = 4π (zwei Umdrehungen); xmax = $4r\pi$ (warum?); t-Schrittweite tstep (etwa) = $\frac{\pi}{30}$.

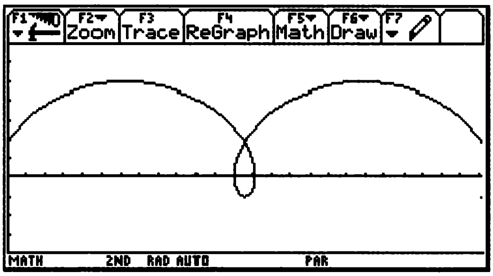
a = r: *Gespitzte Zykloide*



a < r: *Gestreckte Zykloide*



a > r: *Geschlungene Zykloide*



Beispiel 6.8: Epizykloide (z.B. zwei aufeinander abrollende Zahnräder)

Ein Kreis mit dem Radius r rollt ohne zu gleiten auf einem festen Kreis ab. Ein Punkt P ist fest mit dem abrollenden Kreis im Abstand a von dessen Mittelpunkt M verbunden. Stelle eine Parameterdarstellung der Bahnkurve des Punktes P auf!

Lösung

Die Bahnkurve, die der Punkt P beschreibt, heißt **Epizykloide**. Wir nehmen an, dass der Mittelpunkt des abrollenden Kreises sowie der Punkt P am Anfang auf der x-Achse liegen (Abb. 6.10). Der Winkel AMB heißt wieder *Wälzwinkel*, φ heißt *Drehwinkel*. Alle auftretenden Winkel sind im Bogenmaß zu verstehen. Aus der Abbildung entnimmt man, dass für die Koordinaten x und y des Punktes P gilt:

$x = (R + r) \cdot \cos\varphi + a \cdot \cos\varepsilon;$

$y = (R + r) \cdot \sin\varphi - a \cdot \sin\varepsilon.$

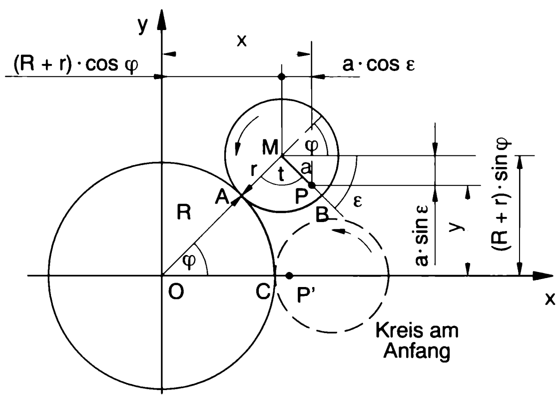


Abb. 6.10 Parameterdarstellung einer Epizykloide

Die Winkel φ und ε können durch den Wälzwinkel t ausgedrückt werden. Denn es muss gelten $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}$ oder $R \cdot \varphi = r \cdot t$. Daraus folgt: $\varphi = \frac{r}{R}t$. Weiters gilt $t + \varepsilon + \varphi = \pi$;

damit: $\varepsilon = \pi - t - \varphi = \pi - t - \frac{r}{R}t = \pi - \frac{R + r}{R} \cdot t$.

Berücksichtigt man noch, dass für jeden Winkel α allgemein gilt: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ sowie $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, so erhält man schließlich durch Einsetzen für die Koordinaten x und y eine *Parameterdarstellung der Epizykloide*:

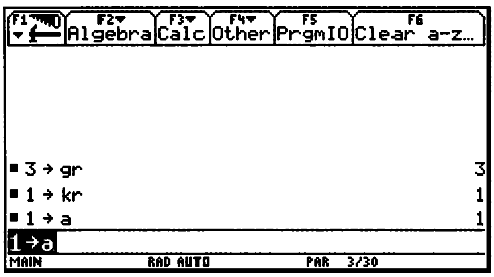
$$x = (R + r) \cdot \cos \frac{r \cdot t}{R} - a \cdot \cos \frac{(R + r) \cdot t}{R}$$

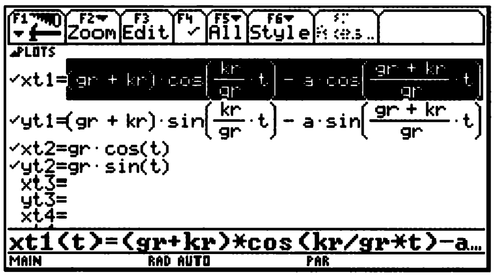
$$y = (R + r) \cdot \sin \frac{r \cdot t}{R} - a \cdot \sin \frac{(R + r) \cdot t}{R}$$

Ist R ein (ganzzahliges positives) Vielfaches von r, so schließt sich die Epizykloide nach einer gewissen Anzahl von Umläufen des abrollenden Kreises. Dies gilt auch noch, wenn das Verhältnis $\frac{r}{R}$ eine rationale Zahl ist.

Voyage 200

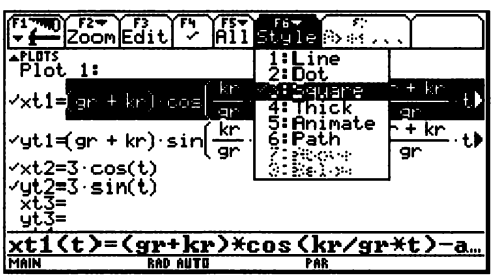
Bei der Eingabe der Gleichungen ist zu berücksichtigen, dass für Variablennamen nur Kleinbuchstaben verwendet werden können. Für R und r kann man gr (Groß R) bzw. kr (Klein r) setzen.



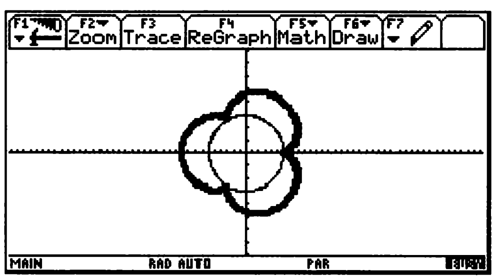


Die Radien R = 3, r = 1 und a = 1 können auch zuerst abgespeichert werden.

Wichtig: Keine Verzerrungen treten auf, wenn man vor dem Zeichnen F2 5 (5:ZoomSqr) aktiviert.

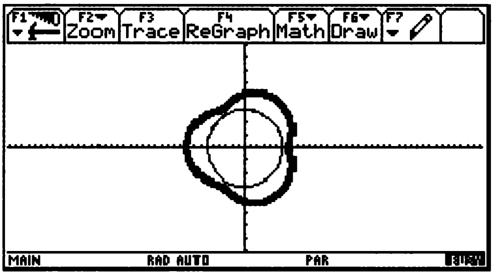


Gespitzte Epizykloide: r = a

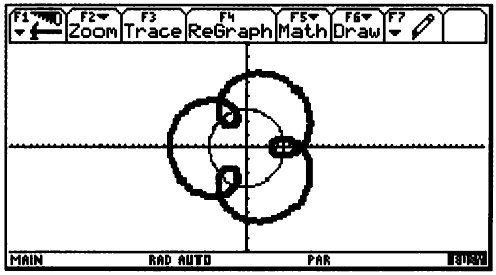


Mit F6 3 (3:Square) wird die Linienstärke geändert. Zum Schluss wird noch der Kreis in Parameterform eingegeben.

Gestreckte Epizykloide: r > a



Geschlungene Epizykloide: r < a



Beispiel 6.9: Hypozykloide (z.B. zwei ineinander abrollende Zahnräder)

Ein Kreis mit dem Radius r rollt ohne zu gleiten *innen* auf einem festen Kreis ab. Ein Punkt P ist fest mit dem abrollenden Kreis im Abstand a von dessen Mittelpunkt M verbunden.

Lösung

Die Bahnkurve, die der Punkt P(x/y) beschreibt, heißt **Hypozykloide**. Mit den gleichen Bezeichnungen wie in Beispiel 6.8 kann man eine *Parameterdarstellung* herleiten ($a = \overline{MP}$):

$$x = (R - r)\cdot\cos\frac{r\cdot t}{R} + a\cdot\cos\frac{(R-r)\cdot t}{R}$$

$$y = (R - r)\cdot\sin\frac{r\cdot t}{R} - a\cdot\sin\frac{(R-r)\cdot t}{R}$$

Auch die Hypozykloide ist geschlossen, wenn $\frac{r}{R}$ rational ist.

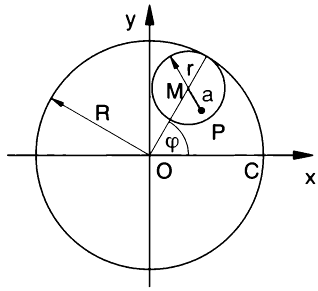
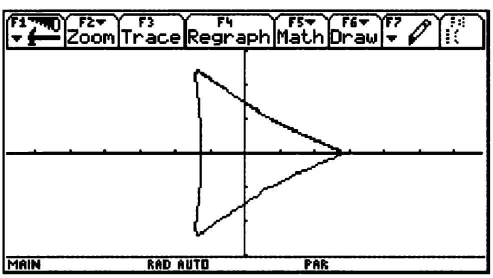


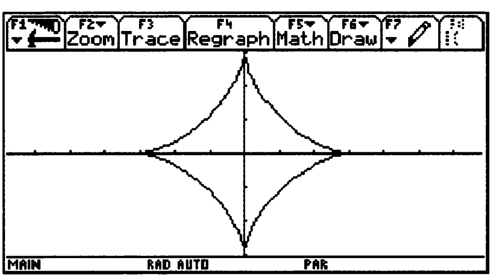
Abb. 6.11 Entstehung einer Hypozykloide

Voyage 200

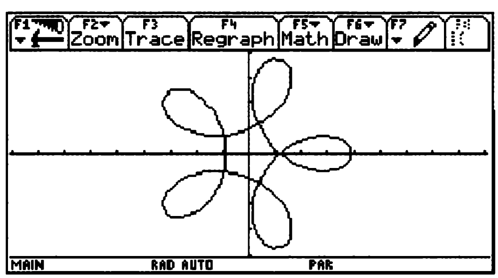
Gestreckte Hypozykloide: r > a, R/r = 3



Gespitzte Hypozykloide: r = a, R/r = 4



Geschlungene Hypozykloide: r < a, R/r = 5



Lissajous-Figuren

Lissajous[7]-Figuren entstehen durch Überlagerung zweier Sinusschwingungen, deren Schwingungsrichtungen aufeinander normal stehen:

$$x(t) = A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x),$$
$$y(t) = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y).$$

Dabei entstehen Schwingungen, die in ihrer Form wesentlich vom Frequenz*verhältnis* und der Phasen*differenz* der beiden Teilschwingungen $x(t)$ und $y(t)$ abhängen.

Beispiel 6.10 : Lissajous-Figur bei gleichen Frequenzen

Zeichne die Lissajous-Figur von $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ und $y = \sin \omega t$ für $0 \leqslant t < 2\pi$.

Lösung

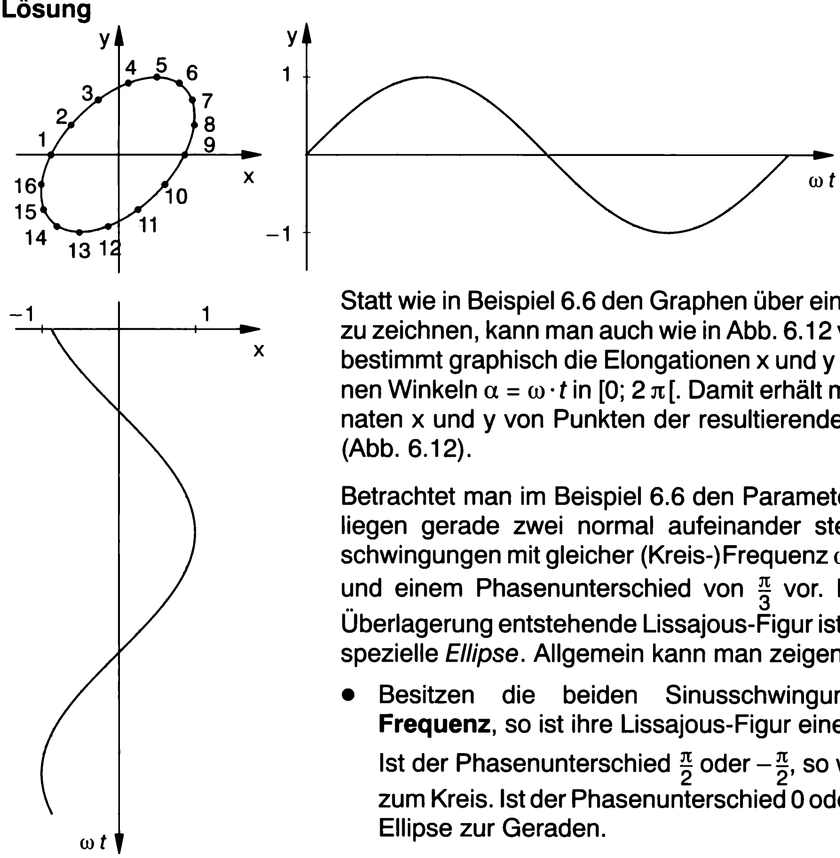


Abb. 6.12 Konstruktion einer Lissajous-Figur

Statt wie in Beispiel 6.6 den Graphen über eine Wertetabelle zu zeichnen, kann man auch wie in Abb. 6.12 vorgehen. Man bestimmt graphisch die Elongationen x und y zu verschiedenen Winkeln $\alpha = \omega \cdot t$ in $[0; 2\pi[$. Damit erhält man die Koordinaten x und y von Punkten der resultierenden Schwingung (Abb. 6.12).

Betrachtet man im Beispiel 6.6 den Parameter t als *Zeit*, so liegen gerade zwei normal aufeinander stehende Sinusschwingungen mit gleicher (Kreis-)Frequenz $\omega = 2\pi f = 1\ \text{s}^{-1}$ und einem Phasenunterschied von $\frac{\pi}{3}$ vor. Die durch ihre Überlagerung entstehende Lissajous-Figur ist ein Kreis, eine spezielle *Ellipse*. Allgemein kann man zeigen:

- Besitzen die beiden Sinusschwingungen **gleiche Frequenz**, so ist ihre Lissajous-Figur eine **Ellipse**.

  Ist der Phasenunterschied $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, so wird die Ellipse zum Kreis. Ist der Phasenunterschied 0 oder π, so wird die Ellipse zur Geraden.
- Bei **ungleichen Frequenzen** kommt es im Allgemeinen zu einer komplizierteren Überlagerungskurve. Sie schließt sich, wenn das Frequenzverhältnis $\frac{f_x}{f_y}$ rational ist.

[7] LISSAJOUS, Jules, französischer Physiker, 1822 – 1880

Lissajous-Figuren bei ungleichen Frequenzen

Frequenzverhältnis $f_x : f_y = 1 : 2$

Während der Dauer *einer* Schwingung in x-Richtung, erfolgen *zwei* Schwingungen in y-Richtung. Je nach Phasendifferenz ergeben sich unterschiedliche Figuren (Abb. 6.13).

$x(t) = \sin t;\quad y(t) = \sin(2t)$ $x(t) = \sin t;\quad y(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{2})$ $x(t) = \sin t;\quad y(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{5})$

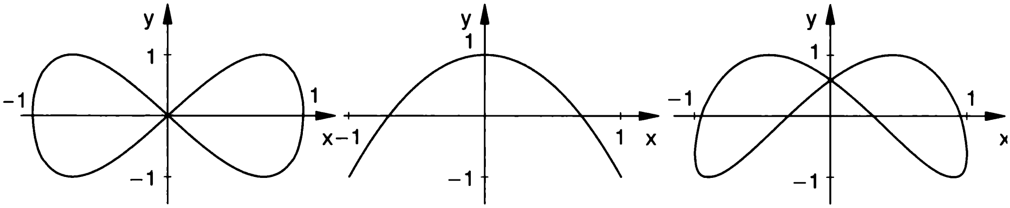


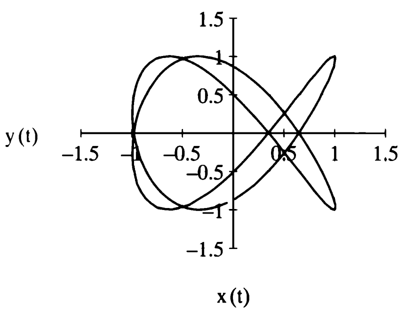
Abb. 6.13 Lissajous-Figuren mit dem Frequenzverhältnis 1 : 2

Frequenzverhältnis $f_x : f_y = 2 : 3$

Während der Dauer von *zwei* Schwingungen in x-Richtung, erfolgen *drei* Schwingungen in y-Richtung.

MC

$t := 0, 0.1 .. 2\pi$ $x(t) := \sin(2\,t)$ $y(t) := \sin(3\,t - \frac{\pi}{3})$



Die folgenden Ausgabetabellen zeigen nur die ersten Zeilen. Weitere Zeilen können nach Anklicken einer Tabelle mit Hilfe einer Bildlaufleiste angezeigt werden. Die Tabellen können auch vergrößert werden.

$t := 0, \frac{\pi}{12} ... 2 \cdot \pi$

t =

	0
0	0
1	2.262
2	0.524
3	0.785
4	1.047

x(t) =

	0
0	0
1	0.5
2	0.866
3	1
4	0.866

y(t) =

	0
0	-0.866
1	-0.259
2	0.5
3	0.966
4	0.866

6.2 Polarkoordinaten

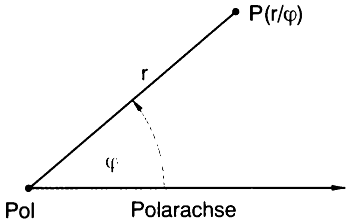


Abb. 6.14 Polarkoordinatensystem

In der Ebene sind ein Punkt, der *Pol*, und eine vom Pol ausgehende Halbgerade, die *Polarachse* gegeben. Dann lässt sich die Lage jedes Punktes P der Ebene (ausgenommen der Pol) durch seine Entfernung r vom Pol sowie den Winkel φ zwischen der Polarachse und der Halbgeraden vom Pol zu P angeben (Abb. 6.14).

r Abstand

φ (Richtungs-)Winkel, der im Gegenuhrzeigersinn positiv, im Uhrzeigersinn negativ gezählt wird.

r und φ heißen **Polarkoordinaten** des Punktes P.

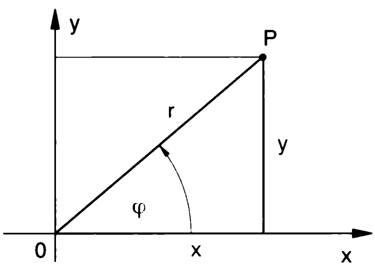


Abb. 6.15 Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten

Wählt man den Koordinatenursprung als Pol und die x-Achse als Polarachse, so gelten folgende **Umrechnungsformeln** (siehe Abb. 6.15):

Umrechnung von Polar- in kartesische Koordinaten:

$$x = r \cdot \cos\varphi; \quad y = r \cdot \sin\varphi.$$

Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Beispiel 6.11 : Umrechnung in Polarkoordinaten

Gegeben ist der Punkt **a)** $P_1(2/1)$ **b)** $P_2(-1/3)$ **c)** $P_3(-2/-1)$ **d)** $P_4(0/-2)$ **e)** $P_5(3/-2)$. Ermittle seine Polarkoordinaten.

Lösung

Bei der Berechnung des Winkels ist zu beachten, dass die Werte (= Winkel) des Arkustangens nur zwischen (im Gradmaß) −90° und +90° liegen. Ist $x < 0$, d.h. liegt der Punkt im 2. oder 3. Quadranten, so ist 180° zu $\arctan \frac{x}{y}$ zu addieren! Es empfiehlt sich, die Rechnung durch eine Skizze zu kontrollieren.

Zu **a)** $r_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5};$

$\varphi_1 = \arctan \frac{1}{2} = 26{,}6°$

Zu **b)** $r_2 = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10};$

$\varphi_2 = \arctan \frac{3}{-1} + 180° = -71{,}6° + 180° = 108{,}4°$

Zu **c)** $r_3 = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5};$

$\varphi_3 = \arctan \frac{-1}{-2} + 180° = 26{,}6° + 180° = 206{,}6°$

Zu **d)** $r_4 = 2;$

$\varphi_4 = -90°$ (arctan $\frac{x}{y}$ nicht definiert, da $x = 0$)

Zu **e)** $r_5 = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13};$

$\varphi_5 = \arctan \frac{-2}{3} = -33{,}7°$

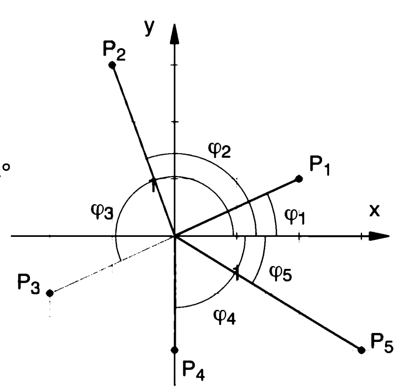


Abb. 6.16 Graph von r = r(φ)

Kurve in Polarkoordinaten

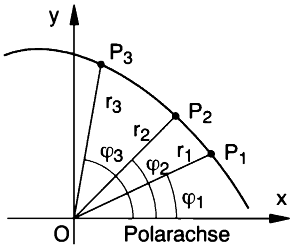


Abb. 6.17 Graph von $r = r(\varphi)$

Für die Darstellung einer Kurve können Polarkoordinaten günstiger sein als kartesische Koordinaten. Eine solche Kurve wird in diesem Fall durch $\mathbf{r = r(\varphi)}$ beschrieben.

Das Zeichnen der Kurve erfolgt über eine Wertetabelle, in der für verschiedene Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die zugehörigen Abstände eingetragen werden. Auf den vom Pol O ausgehenden, unter den Winkeln φ_1, φ_2, $\varphi_3, \ldots$ zur Polarachse gezeichneten Halbgeraden wird der jeweilige Abstand $r_1, r_2, r_3, \ldots$ abgetragen (Abb. 6.17).

Der Definitionsbereich einer Funktion $r = r(\varphi)$ kann sich nur über jene Winkel φ erstrecken, für die $r \geqslant 0$ ist.

Beispiel 6.12 : Einführende Beispiele

Zeichne den Graphen der Funktion

a) $r = 2 \cdot \cos\varphi$ für $\varphi \in\ ]-90°, 90°[$

b) $r = 2 \cdot \varphi$ für $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (Beispiel einer sogenannten Archimedischen Spirale)

Lösung

Zu **a)**

φ	-60°	-30°	0°	30°	60°	90°
r	1	1,73	2	1,73	1	0

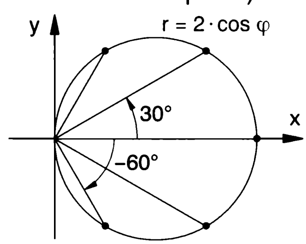


Abb. 6.18

Die gezeichneten Punkte lassen vermuten, dass der Graph ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt M(1/0) ist.

Begründung:

Ein Punkt P des Graphen hat die rechtwinkligen Koordinaten $x = r \cdot \cos\varphi = 2\cos^2\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi = 2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$. Zeige nun über das rechtwinklige Dreieck MAP in Abb. 6.19, dass der Abstand $\overline{MP}$ stets 1 ist. Daher muss der Graph ein Kreis mit dem Radius 1 sein.

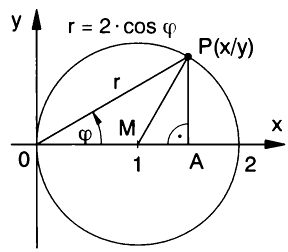
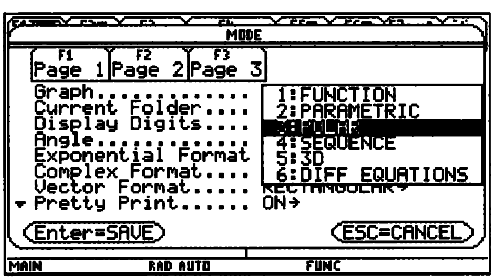


Abb. 6.19

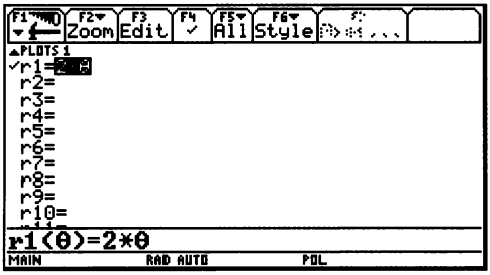
Zu **b)** Damit r eine Koordinate bleibt, ist der Winkel φ im Bogenmaß zu nehmen.

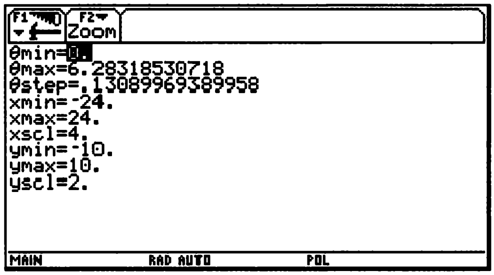
Voyage 200

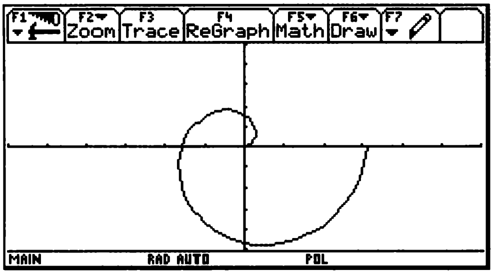


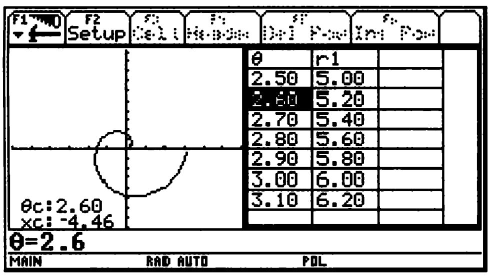

```
Beim Voyage 200 wird der Polar-
winkel φ mit θ bezeichnet.
Im MODE-Menü aktiviert man bei
Graph 3 (3:Polar).
```

Voyage 200









Gleiche Einheiten auf beiden Achsen durch **F2** **5** (5:ZoomSqr).

Teilt man den Bildschirm und stellt im zweiten Fenster eine Wertetabelle der Funktion dar, so kann man den Graphen abtasten und mit den Werten der Tabelle vergleichen.

Bewegt sich ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit vom Pol weg und rotiert dabei mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Pol, so ist seine Bahnkurve – wie sich zeigen lässt – eine Archimedische Spirale.

Parameterdarstellung und Polarkoordinaten

Parameterdarstellung: Die beiden Variablen x und y werden zu einer Hilfsvariablen, dem **Parameter**, in Beziehung gesetzt; etwa $x = x(t)$ und $y = y(t)$.

Parameterdarstellung einer Geraden (in der Ebene)

Vektorform: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$;

Koordinatenform: $x = x_1 + \lambda \cdot a_x$; $y = y_1 + \lambda \cdot a_y$.

Dabei ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ der Ortsvektor eines *beliebigen* Geradenpunktes und $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ein *Richtungsvektor* der Geraden.

Richtungsvektor und Steigung: $k = \frac{a_y}{a_x}$

Parameterdarstellung eines Kreises: $x(t) = r \cdot \cos t$, $y(t) = r \cdot \sin t$; $t \in [0°, 360°[$ oder im Bogenmaß $t \in [0, 2\pi[$; Mittelpunkt im Koordinatenursprung, Radius r
Lissajous-Figuren entstehen durch Überlagerung zweier Sinusschwingungen, deren Schwingungsrichtungen aufeinander normal stehen. Bei gleichen Frequenzen der Sinusschwingungen ist ihre Lissajous-Figur eine *Ellipse*.
Polarkoordinaten r und φ eines Punktes P: r ist die Entfernung zum Pol, φ der Winkel zwischen der Halbgeraden vom Pol durch P und der Polarachse.
Kurve in Polarkoordinaten: $r = r(\varphi)$, Angabe der Entfernung der Kurvenpunkte vom Pol in Abhängigkeit zu φ.

Aufgaben

6.1 $x = v_0\, t$, $y = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2$ ist eine Parameterdarstellung eines waagrechten Wurfs (Abb. 6.20), bei der ein Körper zur Zeit $t = 0$ s mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus einer Höhe $h = 100$ m über dem Erdboden abgeworfen wird ($g \approx 10\ \text{ms}^{-2}$).

a) Wie groß muss v_0 sein, damit der Körper in einem waagrechten Abstand von 45 m von der Abwurfstelle am Boden auftrifft?

b) Wie groß ist der Parameter t beim Auftreffen auf dem Boden ("Wurfzeit")?

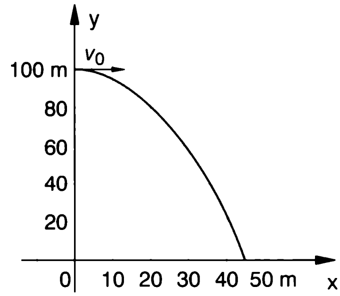


Abb. 6.20

6.2 $x = v_0\, t \cdot \cos \alpha$, $y = v_0\, t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}\, g\, t^2$ ist eine Parameterdarstellung eines schiefen Wurfs, wobei t die Zeit nach dem Abwurf, v_0 die Abwurfgeschwindigkeit, α der Abwurfwinkel und $g \approx 10\ \text{ms}^{-2}$ die Fallbeschleunigung ist. Stelle die Bahnkurve parameterfrei für $v_0 = 30\ \text{ms}^{-1}$ und $\alpha = 45°$ dar (Wurfparabel des Beispiels 3.8, Seite 50).

6.3 Ein Sonderfall einer Epizykloide liegt vor, wenn der abrollende Kreis gleichen Radius R wie der feste Kreis hat und außerdem auch a = R ist. Die entstehende Kurve heißt Kardioide oder Herzkurve. Wie lautet ihre Parameterdarstellung? Zeichne die Kardioide für R = 1 mit Hilfe einer Wertetabelle.

6.4 Umwandlung einer Drehbewegung in eine geradlinige Bewegung (Abb. 6.21): Ein interessanter Sonderfall einer Hypozykloide liegt vor, wenn $a = r = \frac{R}{2}$ ist. Zeige aus der Parameterdarstellung, dass nun der Punkt P eine *geradlinige* Bewegung vollführt!

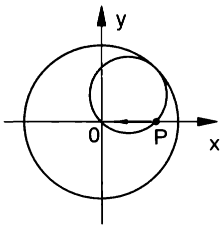


Abb. 6.21

6.5 Gegeben ist die Parameterdarstellung einer Kurve. Sie lässt sich parameterfrei in der Form y = f(x) darstellen. Von welcher Art ist die Funktion?

a) $x = t + 1$, $y = t - 1$	**b)** $x = 2\lambda + 3$, $y = \lambda^2$	**c)** $x = -t + 3$, $y = (t - 1)^2$	**d)** $x = 1 - t$, $y = -t^2 + 2$
e) $x = \sin t$, $y = \cos^2 t$	**f)** $x = 2 + t$, $y = e^t$	**g)** $x = 8t$, $y = 3 \cdot \sqrt{2t}$	**h)** $x = t^{-1}$, $y = 2t$

6.6 Gegeben ist die Parameterdarstellung für ein Geraden*stück*. Zeichne es und gib die Punkte für die angegebenen Parameterwerte an:

a) $x = t^2 + 1,\ y = t^2 - 1 \quad (t \in \mathbb{R}),\ t = -2, -1, 0, 1$ und 2

b) $x = \sqrt{t},\ y = 1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{t} \quad (t \geqslant 0),\ t = 0, 1, 4, 9$

6.7 Eine Kurve ist in Parameterdarstellung $x = a \cdot \ln t,\ y = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\ t > 0$, gegeben. Sie kann parameterfrei in der Form $y = f(x)$ geschrieben werden. Wie lautet diese Darstellung und um welche Funktion handelt es sich?

Hinweis: Berechne t aus $x = a \cdot \ln t$.

6.8 Die folgende in einer Parameterdarstellung gegebene Lissajous-Figur lässt sich auch parameterfrei in der Form $y = f(x)$ darstellen. Begründe daraus die Form der Figur!

a) $x = \cos t, y = \cos 2t$ **b)** $x = \sin t, y = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $x = \sin(t - 30°), y = \cos(t + 60°)$

6.9 Stelle die Gerade in einer Parameterdarstellung sowohl in der Koordinatenform als auch in der Vektorform auf:

a) $y = -2x + 1$ **b)** $2x - y = 4$ **c)** $4x = \frac{1}{2} + y$ **d)** $2x - 3y = 0$

e) $2x + 3y + 6 = 0$ **f)** $y = 2$ **g)** $x + 3y - 3 = 0$ **h)** $y = x + d$

6.10 Gib eine parameterfreie Darstellung der Gerade an!

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6.11 Gib eine parameterfreie Darstellung der Gerade an ($t \in \mathbb{R}$):

a) $x = 2t + 1$, $y = t - 1$ **b)** $x = 2\lambda + 3$, $y = 1 - \lambda$ **c)** $x = -t + 3$, $y = 3t$ **d)** $x = 1 - t$, $y = 2$

6.12 Schreibe in der Vektorform:

a) $x = 2t + 1$, $y = t - 1$ **b)** $x = 2\lambda + 3$, $y = 1 - \lambda$ **c)** $x = -t + 3$, $y = 3t$ **d)** $x = 1 - t$, $y = 2$

6.13 Gib eine Parameterdarstellung der Geraden durch die angeführten Punkte an:

a) W(8/9), V(−3/5) **b)** A(2/4), B(4/−2) **c)** R(3/−2), S(−2/3) **d)** A(0/1), B(−2/−2)

6.14 Erstelle eine Wertetabelle und zeichne die Kurve $x(t) = x_0 + a \cdot \cos t,\ y(t) = y_0 + a \cdot \sin t$ für $0 \leqslant t < 2\pi$.

a) $x_0 = 0, y_0 = 0, a = 5$ **b)** $x_0 = 0, y_0 = 2, a = 5$ **c)** $x_0 = 1, y_0 = -1, a = 3$

6.15 Erstelle eine Wertetabelle und zeichne die Kurve $x(t) = x_0 + a \cdot \cos t,\ y(t) = y_0 + b \cdot \sin t$ für $0 \leqslant t < 2\pi$.

a) $x_0 = 0, y_0 = 0, a = 5, b = 5$ **b)** $x_0 = 0, y_0 = -2, a = 5, b = 3$

c) $x_0 = 1, y_0 = -1, a = 3, b = 1$

6.16 Die Gleichung der sogenannten Neil'schen Parabel in Parameterform lautet: $x(t) = t^2$, $y(t) = a \cdot t^3$ ($t \in \mathbb{R}$). Wähle $-2 \leqslant t \leqslant 2$ und zeichne die Kurve bei **a)** $a = 1$ **b)** $a = 2$.

6.17 Zeichne folgende Lissajous-Figuren für $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (oder $0° \leqslant t < 360°$, wenn im Folgenden 180° statt π gesetzt wird):

a) $x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos t$ **b)** $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $x(t) = 2\sin(t - \pi),\ y(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ **d)** $x(t) = \sin(2t),\ y(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$

e) $x(t) = \cos(2t),\ y(t) = \sin(t)$ **f)** $x(t) = \cos(t),\ y(t) = \sin(3t)$

6.18 Bei welchem Definitionsbereich für den Parameter t führt folgende Lissajous-Figur einen vollen Durchgang aus?

a) $x(t) = 3\cos\left(\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{3}\right),\ y(t) = 2\sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ **b)** $x(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t + \pi\right),\ y(t) = \sin\frac{2t}{3}$

6.19 Aus einer kreisrunden Querschnittsfläche mit dem Durchmesser 40,0 cm soll ein regelmäßiges Achteck gefräst werden. Berechne in Abb. 6.22 aus den Polarkoordinaten die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte.

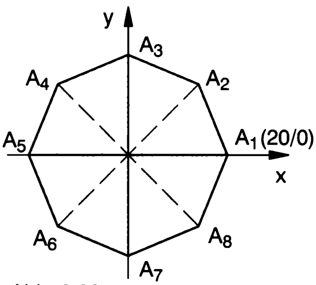


Abb. 6.22

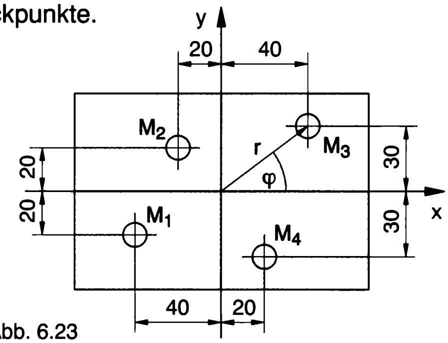


Abb. 6.23

6.20 Gib die Polarkoordinaten der Mittelpunkte der Bohrkreise auf der Platte (Abb. 6.23) an.

6.21 Für die Kardioide (sie ist gegenüber jener in Aufgabe 6.3 um 180° gedreht angegeben) gibt es die Polarkoordinatendarstellung $r = 1 + \cos\varphi,\ 0° \leqslant \varphi < 360°$. Zeichne sie mit Hilfe einer Wertetabelle.

6.22 Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle die folgende in Polarform gegebene Kurve für $0° \leqslant \varphi < 360°$ (mit Ausschluss von Winkeln, für die ein Nenner 0 wird):

a) $r = 2$ **b)** $r = 2\cdot\cos\varphi$ **c)** $r = \frac{1}{1 + \sin\varphi}$ **d)** $r = \frac{1}{1{,}2 + \sin\varphi}$

6.23 Die Kurve $r = \frac{1}{1 + \sin\varphi}$, $0° \leqslant \varphi < 360°$ mit $\varphi \neq 270°$ (warum?), kann auch in rechtwinkligen Koordinaten in der Form $y = f(x)$ geschrieben werden. Setze in der Kurvengleichung $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ und löse nach y. Was kann nun über den Kurvenverlauf gesagt werden?

6.24 Nocken- und Exzenter werden im Maschinenbau als Elemente zur Steuerung eingesetzt. Für die Randlinie einer Nockenwelle gilt: $r = \begin{cases} 1 + 0{,}3\cdot\sin^2 2\varphi & \text{für } 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi \end{cases}$

Zeichne die Randlinie mit Hilfe einer Wertetabelle.

6.25 $r = a\cdot e^{m\cdot\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ im Bogenmaß, ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten. Zeichne die logarithmische Spirale für $m = \frac{1}{4}$ und $a = \frac{1}{2}$ im Bereich $0° \leqslant \varphi \leqslant 3\pi$.

7 Komplexe Zahlen

7.1 Einführung

Mit den komplexen Zahlen lassen sich Probleme lösen, die wir mit reellen Zahlen nicht oder nur aufwendiger lösen können. *Jede* quadratische Gleichung, kubische Gleichung oder algebraische Gleichung noch höheren Grades ist mit komplexen Zahlen lösbar. Breite Anwendung finden die komplexen Zahlen in der Elektrotechnik.

Beispiel 7.1 : Einführendes Beispiel

Löse die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Lösung

Wir lösen in gewohnter Weise: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm \sqrt{-4}$.

Was bedeutet aber $\sqrt{-4}$? Wir kennen nur Wurzeln aus nichtnegativen Zahlen! Man kann jedoch auch "Zahlen" wie $\sqrt{-4}$ oder allgemein $3+\sqrt{-4}$ oder $3-\sqrt{-4}$ einen Sinn geben. Dazu versuchen wir die Lösung unserer Gleichung durch quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 - 9 + 13 &= 0 \\ (x-3)^2 + 4 &= 0 \\ (x-3)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Es gibt keine *reelle* Zahl, die für x eingesetzt, diese Gleichung löst, da die linke Seite als Quadrat nicht negativ sein kann. Um Gleichungen dieser Art zu lösen, gehen wir zunächst von der einfacheren quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ oder $x^2 = -1$ aus; wieder gibt es keine reelle Zahl x, die quadriert -1 ergibt. Wir "erfinden" nun eine neue Zahl j (gesprochen "jot") mit der Eigenschaft, dass

$$\boxed{j^2 = -1}$$

In der Mathematik wird statt j der Buchstabe i gewählt; in den technischen Anwendungen ist, um Verwechslungen mit der Stromstärke *i* zu vermeiden, der Buchstabe j gebräuchlich.

j ist keine reelle Zahl und kann daher nicht auf der reellen Achse liegen. Sonst soll mit ihr genauso wie mit reellen Zahlen gerechnet werden. Dann ist $x_1 = j$ Lösung von $x^2 = -1$; ebenso ist $x_2 = -j$ Lösung, da $(-j)^2 = j^2 = -1$. Die etwas allgemeinere Gleichung $x^2 = -4$ besitzt nun die Lösungen $x_1 = 2j$ und $x_1 = -2j$ (rechne nach!). Schließlich können wir auch unser ursprüngliches Problem lösen:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= -4 \\ x-3 &= \pm 2j \end{aligned}$$

also $x_1 = 3 + 2j$ und $x_2 = 3 - 2j$. Darauf kommt man auch mit der Lösungsformel, wenn man dort das Symbol $\sqrt{-1}$ durch j ersetzt:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm \sqrt{4\cdot(-1)} = 3 \pm \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 3 \pm 2j\,.$$

Wir machen versuchsweise die Probe und rechnen wie mit reellen Zahlen:

$$(3+2j)^2 - 6\,(3+2j) + 13 = 3^2 + 12j + (2j)^2 - 18 - 12j + 13 = 9 + 12j - 4 - 18 - 12j + 13 = 0$$

Dies gelingt ebenso mit $3 - 2j$ (führe dies durch!).

Sind Ausdrücke der Art j, 2j, 3 + 2j usw. wirklich "echte" Zahlen? Kennzeichnend für Zahlen ist, dass man mit ihnen *rechnen* kann. Wir werden bald sehen, dass dies mit diesen Ausdrücken wie mit den reellen Zahlen möglich ist und man bei solchen Rechnungen als Ergebnis *wieder* Ausdrücke dieser Art erhält. Der einzige Unterschied ist, dass man von zwei solchen neuen Zahlen im allgemeinen nicht mehr sagen kann, ob die eine größer oder kleiner als die andere ist.

Wir definieren nun:

$z = a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, und $j^2 = -1$ ist eine **komplexe Zahl**.

a heißt **Realteil**, b **Imaginärteil** von z; man schreibt: $a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{Im}\, z$.

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann **gleich**, wenn sowohl die beiden Realteile als auch die beiden Imaginärteile gleich sind:

$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \wedge \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.

Eine komplexe Zahl, deren Realteil gleich 0 ist, heißt **imaginäre Zahl**;
j wird **imaginäre Einheit** genannt.

Die beiden Zahlen $z = a + bj$ und $z^* = a - bj$ heißen **konjugiert komplex**.

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

"Komplex" heißt "zusammengesetzt", nämlich aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl. Die Bezeichnung "imaginär" (= nur in der Vorstellung existierend) im Vergleich zu "reell" (= wirklich) ist nicht wörtlich zu nehmen. Auch die negativen Zahlen sind wie die imaginären Zahlen nicht selbstverständlich und man könnte auch fragen, wie "reell" negative Zahlen eigentlich sind.

Anmerkungen:

(1) z und z^* unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils.

(2) In der Elektrotechnik wird die imaginäre Einheit j vor den Imaginärteil geschrieben; man schreibt also beispielsweise $3 + j \cdot 2$ statt $3 + 2j$.

(3) Die Schreibweise $j = \sqrt{-1}$ ist problematisch (was heißt eigentlich $\sqrt{-1}$?); jedenfalls darf mit dieser Wurzel nicht mit den für nichtnegative Radikanden gültigen Wurzelgesetzen gerechnet werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$-1 = j \cdot j = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

(4) Zur allgemeinen Bezeichnung einer komplexen Zahl in der Mathematik verwendet man üblicherweise den Buchstaben z (ähnlich, wie man eine natürliche Zahl häufig mit n bezeichnet). In der Elektrotechnik werden komplexe Größen durch Unterstreichen gekennzeichnet; man schreibt also $\underline{Z}$ oder $\underline{U}$.

(5) Wir haben eine komplexe Zahl als Summe von zwei "Komponenten" geschrieben: einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl bj. Daher spricht man von der **Komponentenform** der komplexen Zahl. Es gibt noch andere zweckmäßige Darstellungsformen einer komplexen Zahl, wie wir noch sehen werden.

Der Übergang von den reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen ist genauso eine Zahlenbereichserweiterung wie etwa jene von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Abb.6.1 gibt einen Überblick über die Zahlenbereiche.

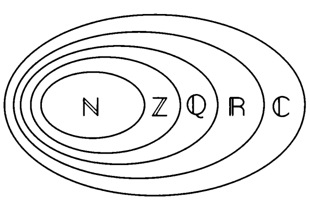


Abb. 7.1 Zahlenbereiche

Beispiel 7.2 : Real- und Imaginärteil, konjugiert komplexe Zahl

Ermittle Real- und Imaginärteile sowie die konjugiert komplexen Zahlen von $z_1 = 3 + 4j$, $z_2 = 2 - 2j$, $z_3 = 5$ sowie von $z_4 = 3j$.

Lösung

z	Re z	Im z	z^*
$z_1 = 3 + 4j$	3	4	$3 - 4j$
$z_2 = 2 - 2j$	2	-2	$2 + 2j$
$z_3 = 5 + 0 \cdot j$	5	0	5
$z_4 = 0 + 3j$	0	3	$-3j$

Der erste Vorteil der komplexen Zahlen gegenüber den reellen Zahlen ist, dass nun quadratische Gleichungen stets lösbar sind. Denn für den Fall, dass die Diskriminante $D < 0$ (siehe Seite 61) ist und daher keine reellen Lösungen existieren, sind diese komplex.

Beispiel 7.3 : Quadratische Gleichung mit komplexen Lösungen

Löse die quadratische Gleichung $\frac{x^2}{2} = x - \frac{5}{2}$.

Lösung

Schreibt man die Gleichung in der Form $\frac{1}{2}x^2 + (-1)\,x + \frac{5}{2} = 0$, so liest man ab:

$a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = \frac{5}{2}.$

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = 1 - 5 = -4 < 0,$

daher existiert keine reelle Lösung!

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{-4} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 1 \pm 2 \cdot \sqrt{-1}.$$

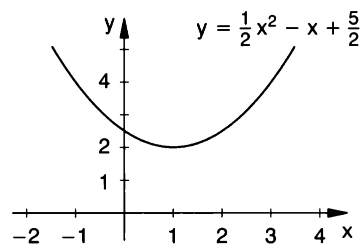


Abb. 7.2

Wie bei der Lösung von Beispiel 7.1, Seite 186, erwähnt, ersetzt man das Symbol $\sqrt{-1}$ durch j; damit erhalten wir schließlich die Lösungen

$x_1 = 1 + 2j$ und $x_2 = 1 - 2j$.

Abb. 7.2 zeigt den Graphen von $y = \frac{1}{2}x^2 + (-1)\,x + \frac{5}{2}$: es gibt keine Schnittstellen mit der x-Achse; dies drückt aus, dass es keine reellen Lösungen gibt.

Eine **quadratische Gleichung** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ $(a \neq 0)$ ist in der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ **stets lösbar**.

Ist x_1 eine komplexe Lösung einer quadratischen Gleichung (mit reellen Koeffizienten a, b und c), so ist die zweite Lösung x_2 **konjugiert komplex** zu x_1.

Letzteres gilt aufgrund des "±" in der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

Geometrische Veranschaulichung komplexer Zahlen

Reelle Zahlen können anschaulich als Punkte auf einer Zahlengerade dargestellt werden. Wir bezeichnen sie in diesem Zusammenhang als *reelle Achse*. Aber auch die imaginären Zahlen bj ($b \in \mathbb{R}$) kann man wie die reellen Zahlen auf einer Zahlengeraden, der sogenannten *imaginären Achse*, anordnen. Bildet man mit diesen beiden Achsen in einer Ebene ein kartesisches Koordinatensystem, so kann jede komplexe Zahl $a + bj$ als Punkt in dieser Ebene veranschaulicht werden (Abb. 7.3).

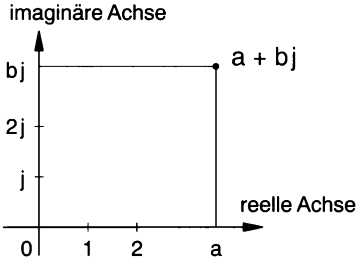


Abb. 7.3 Bildliche Darstellung einer komplexen Zahl als Punkt

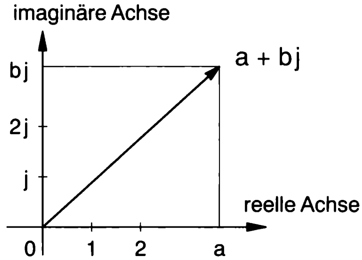


Abb. 7.4 Bildliche Darstellung einer komplexen Zahl als Zeiger

Diese Ebene wurde von Carl Friedrich GAUSS (1777 – 1855) angegeben; daher heißt die **komplexe Ebene** auch **Gauß'sche Zahlenebene**. Für die Anwendungen ist es vorteilhaft, komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene nicht als Punkte, sondern als Pfeile vom Koordinatenursprung aus darzustellen (Abb. 7.4). Derartige Pfeile bezeichnet man als **Zeiger**.

In der Gauß'schen Zahlenebene wird die komplexe Zahl $a + bj$ mit dem Vektor $\binom{a}{b}$ gleichgesetzt. So ist beispielsweise die komplexe Zahl $3 + 2j$ nichts anderes als der Ortsvektor $\binom{3}{2}$.

Betrag einer komplexen Zahl

Unter dem Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + bj$ versteht man die Länge ihres Zeigers (Abb. 7.4). Auf Grund des pythagoräischen Lehrsatzes gilt:

Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl z

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}$$

Beispiel 7.4 : Zeigerdarstellung einer komplexen Zahlen

Stelle die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4j$, $z_2 = 2 - 2j$, $z_3 = 5$ sowie von $z_4 = 3j$ als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene dar und gib ihre Beträge an.

Lösung

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5;$

$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2{,}83;$

$|z_3| = 5;$

$|z_4| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3.$

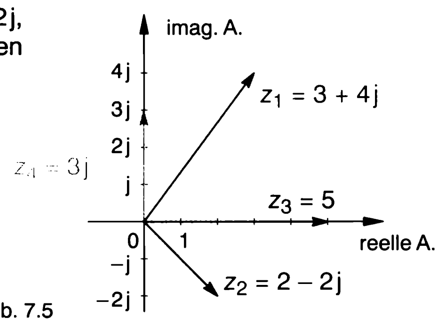


Abb. 7.5

Wie erwähnt, heißt die komplexe Zahl $z^* = a - bj$ die zu $z = a + bj$ konjugiert komplexe Zahl. Den Zeiger von z^* erhält man durch *Spiegelung* des Zeigers von z an der reellen Achse.

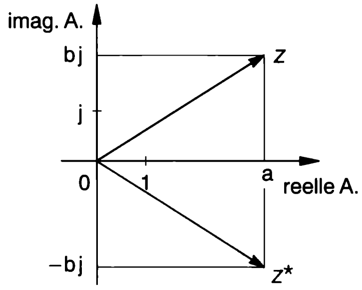


Abb. 7.6 Konjugiert komplexe Zahl z^* zu z

Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Diese sind so *definiert*, dass man mit komplexen Zahlen der Form $a + bj$ wie mit Binomen rechnen kann. Dazu kommt nur noch, dass $j^2 = -1$ ist!

Beispiel 7.5 : Addition und Subtraktion

a) $z_1 = 4 + 2j$, $z_2 = 1 + 3j$. $z_1 + z_2 = ?$ $z_1 - z_2 = ?$

b) $z_1 = 3 + j$, $z_2 = 2 + 3j$, $z_3 = -6 + 2j$; $z_1 + z_2 + z_3 = ?$

Veranschauliche die Operationen in der Gauß'schen Zahlenebene!

Lösung

Zu **a)** Es werden jeweils die Real- und Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert.

$$z_1 + z_2 = (4 + 2j) + (1 + 3j) = 4 + 2j + 1 + 3j = (4 + 1) + (2 + 3)\cdot j = 5 + 5j;$$

$$z_1 - z_2 = (4 + 2j) - (1 + 3j) = 4 + 2j - 1 - 3j = (4 - 1) + (2 - 3)\cdot j = 3 - j.$$

In der Gauß'schen Zahlenebene folgt die Addition (Abb. 7.7) und Subtraktion (Abb. 7.8) den Regeln der Vektorrechnung.

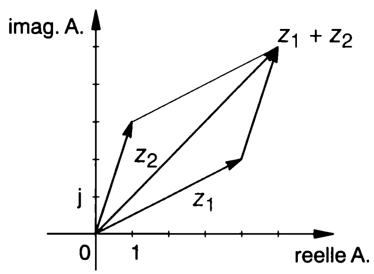


Abb. 7.7 Geometrische Veranschaulichung der Addition komplexer Zahlen

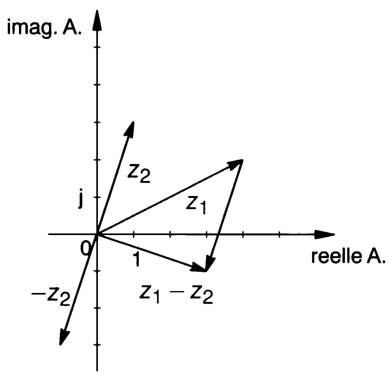


Abb. 7.8 Geometrische Veranschaulichung der Subtraktion komplexer Zahlen

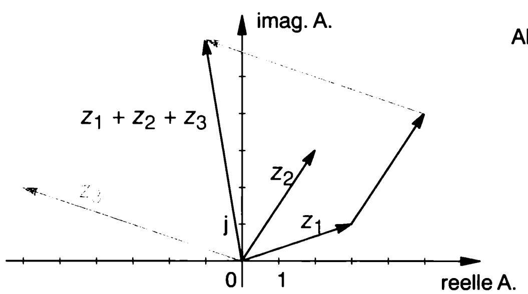


Abb. 7.9 Addition von mehr als zwei Zeigern

Mehr als zwei komplexe Zahlen können in der Gauß'schen Zahlenebene durch wiederholtes Anfügen ihrer Pfeile addiert werden. Der Zeiger vom Ursprung zur Spitze des letzten Pfeiles ist der Zeiger der Summe (Abb. 7.9).

Beispiel 7.6 : Multiplikation

a) $z_1 = 5 + 4j,\ z_2 = 2 - 3j;\ \ z_1 \cdot z_2 = ?$
b) $z = a + bj;\ \ z \cdot z^* = ?$

Lösung

Die Klammern werden in gewohnter Weise ausmultipliziert und j^2 gleich -1 gesetzt.

Zu **a)** $z_1 \cdot z_2 = (5 + 4j) \cdot (2 - 3j) = 5 \cdot 2 + 4j \cdot 2 + 5 \cdot (-3j) - 4j \cdot 3j =$
$= 10 + 8j - 15j - 12j^2 = 10 + (-7j) - 12 \cdot (-1) = 10 - 7j + 12 = 22 - 7j.$

Zu **b)** $z \cdot z^* = (a + bj) \cdot (a - bj) = a^2 - (bj)^2 = a^2 - b^2 \cdot j^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2 = |z|^2.$

Wir halten das Ergebnis von Beispiel 7.6, b) fest.

> Ist $z = a + bj$, so gilt: $z \cdot z^* = a^2 + b^2 = |z|^2$
> Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl ist stets reell, und zwar gleich dem Quadrat des Betrages der komplexen Zahl.

Beispiel 7.7 : Division

a) $\frac{1 + 5j}{3 + 2j} = ?$ **b)** $\frac{1}{2 - j} = ?$ **c)** $\frac{1}{j} = ?$

Lösung

Man **erweitert mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl**, wodurch der Nenner reell wird.

Zu **a)** $\frac{1 + 5j}{3 + 2j} \cdot \frac{3 - 2j}{3 - 2j} = \frac{3 + 15j - 2j - 10j^2}{3^2 + 2^2} = \frac{13 + 13j}{13} = \frac{13}{13} + \frac{13}{13}j = 1 + j;$

Zu **b)** $\frac{1}{2 - j} \cdot \frac{2 + j}{2 + j} = \frac{2 + j}{2^2 + 1^2} = \frac{2 + j}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j;$

Zu **c)** $\frac{1}{j} \cdot \frac{-j}{-j} = \frac{-j}{-j^2} = -\frac{j}{1} = -j.$

Es ist vorteilhaft, sich das Ergebnis von Beispiel 7.7 c) zu merken:

$$\boxed{\frac{1}{j} = -j}$$

Ist man nur am Betrag des Ergebnisses einer Rechnung mit komplexen Zahlen interessiert, sind die folgenden Regeln hilfreich (Beweis als Aufgabe):

> **Rechnen mit Beträgen:**
> (1) $|z| = 0 \ \Leftrightarrow\ z = 0$
> (2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;\ \ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ \ (z_2 \neq 0)$

Beispiel 7.8 : Rechnen mit Beträgen

Berechne den Betrag von:

a) $(1+3j)\cdot(2-j)$ **b)** $\dfrac{1+2j}{(1-j)^2}$

Lösung

Zu **a)** Es ist nicht notwendig, zuerst die Multiplikation $(1+3j)\cdot(2-j)$ durchzuführen.

$$|(1+3j)\cdot(2-j)| = |1+3j|\cdot|2-j| = \sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{10}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{10\cdot 5} = 5\cdot\sqrt{2}.$$

Zu **b)** Auch hier braucht die Division der komplexen Zahlen nicht durchgeführt zu werden.

$$\left|\frac{1+2j}{(1-j)^2}\right| = \frac{|1+2j|}{|(1-j)^2|} = \frac{|1+2j|}{|(1-j)|\cdot|(1-j)|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}.$$

Beispiel 7.9 : Komplexe Gleichungen

Bestimme reelle Zahlen x und y derart, dass $\dfrac{x+j}{3+2j} = 2+yj$.

Lösung

Multiplikation der Gleichung mit $3+2j$ ergibt die Gleichung $x+j = -2y+6+(3y+4)j$.

Gleichheit zweier komplexer Zahlen bedeutet vereinbarungsgemäß, dass ihre Realteile und ihre Imaginärteile gleich sind. Damit ist *eine komplexe* Gleichung gleichwertig zu *zwei reellen* Gleichungen.

$x=-2y+6$ und $1=3y+4$ daraus $x=8$ und $y=-1$.

Beispiel 7.10 : Verschiedene Berechnungen

a) Was ergeben die ersten Potenzen von j?

b) Ermittle Real- und Imaginärteil von $z = 1 + \dfrac{j(-5+3j)^*}{(1+j)(3-2j)}$.

c) $(1-2j)^2 + \dfrac{|1+j\sqrt{3}|}{(2j)^*}$

Lösung

Zu **a)**

$j^1 = j;$ $\quad j^5 = j^4\cdot j = 1\cdot j = j;$

$j^2 = -1;$ $\quad j^6 = j^4\cdot j^2 = 1\cdot(-1) = -1;$

$j^3 = j^2\cdot j = (-1)\cdot j = -j;$ $\quad$ usw.

$j^4 = j^2\cdot j^2 = (-1)\cdot(-1) = 1;$

Die Ergebnisse der ersten vier Potenzen, nämlich $j, -1, -j, 1$, wiederholen sich nach der fünften Potenz immer wieder! j^0 ist vereinbarungsgemäß gleich 1.

Zu **b)** Wir können etwa wie folgt vorgehen:

$$1+\frac{j(-5-3j)}{3+3j-2j-2j^2}=1+\frac{-5j-3j^2}{5+j}=1+\frac{3-5j}{5+j}=\frac{5+j+3-5j}{5+j}=\frac{8-4j}{5+j}$$

Nun wird mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl erweitert.

$$\frac{8-4j}{5+j}\cdot\frac{5-j}{5-j}=\frac{40-20j-8j+4j^2}{5^2+1^2}=\frac{36-28j}{26}=\frac{18}{13}-\frac{14}{13}j$$

Somit: $\operatorname{Re} z=\frac{18}{13}$, $\operatorname{Im} z=-\frac{14}{13}$.

Zu beachten ist, dass das Minuszeichen noch zum Imaginärteil gehört.

Zu **c)** $|1+j\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2;$

$$(1-2j)^2+\frac{|1+j\sqrt{3}|}{(2j)^*}=1^2-2\cdot 2j+(2j)^2+\frac{2}{-2j}=1-4j-4+\frac{1}{-j}=-3-4j+j=-3-3j.$$

Dabei haben wir Gebrauch gemacht (siehe Beispiel 7.7 c)), dass $\frac{1}{-j}=-\frac{1}{j}=-(-j)=j$.

Aufgaben

7.1 Stelle die folgenden komplexen Zahlen als Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene dar:

a) $z_1=3+2j$ **b)** $z_2=-3+j$ **c)** $z_3=-1+2j$ **d)** $z_4=3$

7.2 Stelle die komplexen Zahlen sowie die zu ihnen konjugierten als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene dar:

a) $z_1=4+2j$ **b)** $z_2=-2+3j$ **c)** $z_3=-3-2j$ **d)** $z_4=3-4j$
e) $z_5=3$ **f)** $z_6=2j$ **g)** $z_7=-4$ **h)** $z_8=-3j$

7.3 In Abb. 7.10 sind die Zeiger von 8 komplexen Zahlen dargestellt. Gib diese Zahlen an sowie auch die zu ihnen konjugiert komplexen Zahlen.

7.4 Bestimme den Betrag der komplexen Zahlen aus Aufgabe 7.2.

7.5 Welche Zahlenmenge wird in der Gauß'schen Zahlenebene beschrieben durch

a) $|z|=2$ **b)** $|z|\leqslant 2$ **c)** $|z|>2$

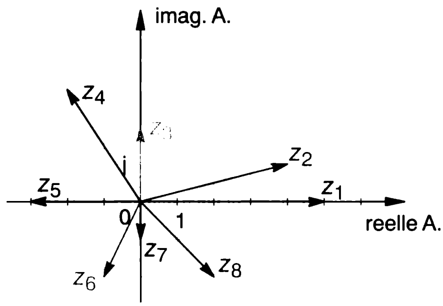


Abb. 7.10

7.6 Was kann über z gesagt werden, wenn **a)** $z=z^*$, **b)** $z=-z^*$.

7.7 Berechne:

a) $(1-2j)+(4-j)$ **b)** $(2+3j)-(1-j)$ **c)** $2j-3\cdot(2-4j)$
d) $2+3j-(2+j)-(1+j)$ **e)** $(2-j)+4-3\cdot(2+j)-j$ **f)** $3j+(1+2j)-(4-5j)\cdot 3+5$

7.8 Bestimme graphisch z_1+z_2 sowie z_1-z_2, wenn

a) $z_1=3+j$, $z_2=2+3j$ **b)** $z_1=-2+j$, $z_2=3j$ **c)** $z_1=3-2j$, $z_2=z_1^*$

7.9 Addiere graphisch die drei komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 auf folgende Weise (1) $(z_1+z_2)+z_3$, (2) $(z_1+z_3)+z_2$.

a) $z_1=4+3j$, $z_2=3+j$, $z_3=-3+j$ **b)** $z_1=-2+4j$, $z_2=-3-2j$, $z_3=4-j$

7.10 Berechne:

a) $(1+2j)\cdot(2-j)$ **b)** $(2+3j)\cdot(2-3j)$ **c)** $2j\cdot(3-j)+(3-4j)\cdot(1-2j)$
d) $(3-4j)^2$ **e)** $(1-3j)\cdot(2+3j)\cdot j$ **f)** $(2-j)^3$
g) $j^3\cdot j$ **h)** $j^7\cdot j^1$ **i)** j^{13}
j) $(\sqrt{2}+j)^2$ **k)** $(\sqrt{2}+j\cdot\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-j\cdot\sqrt{3})$ **l)** $(2\cdot\sqrt{3}-j\cdot\sqrt{3})^2$

7.11 Berechne:

a) $\frac{6+2j}{2}$ **b)** $\frac{4-j}{2}$ **c)** $\frac{-3+2j}{3}$ **d)** $\frac{-9-4{,}5j}{1{,}5}$

7.12 Berechne:

a) $\frac{8+j}{1+2j}$ **b)** $\frac{(13-11j)^*}{1-3j}$ **c)** $\frac{-5+5j}{(-2-j)^*}$ **d)** $\frac{9+12j}{3j}$
e) $\frac{(3+5j)(1+j)}{1-4j}$ **f)** $\frac{-43+32j}{(2-3j)^2}$ **g)** $\frac{(1+2j)(3-j)}{(-2+j)(1+j)}$ **h)** $\frac{(1-3j)^3}{(-1+3j)^2}$

7.13 Berechne den Betrag von:

a) $(1+2j)\cdot(1-3j)$ **b)** $(1-2j)^2$ **c)** $(1-2j)\cdot(1+3j)^2$
d) $\frac{1-2j}{1-3j}$ **e)** $\frac{(1-2j)^2}{1+3j}$ **f)** $\frac{1-2j}{(-1+2j)^2}$
g) $\frac{(3-2j)^3}{3+2j}$ **h)** $\frac{(3-j)^2}{(7+3j)^2}\cdot(1+7j)$ **i)** $\frac{(3-j)^3\cdot(7+3j)}{(5+2j)\cdot(2-j)}$

7.14 Bestimme Real- und Imaginärteil von

a) $j+\left(\frac{1}{2-j}\right)^*$ **b)** $\frac{1}{j}+\frac{1}{j^2}+\frac{1}{j^5}$ **c)** $1+\frac{1+2j}{2j}-\frac{j}{5}$
d) $\left(\frac{1-2j}{5}\right)^{-2}-j^{-2}$ **e)** $\frac{1+j}{1-j}-\frac{1-j}{1+j}$ **f)** $\left(\frac{1+j}{1-j}+\frac{1}{j}\right)\cdot\frac{1-j}{1+j}$

7.15 Bilde die Potenzen j^{-n} mit $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und 9.

7.16 $z_1 = a + bj$, $z_2 = c + dj$; berechne damit $z_1\cdot z_2$ sowie $z_1^*\cdot z_2^*$ und zeige, dass $(z_1\cdot z_2)^* = z_1^*\cdot z_2^*$ ist!

7.17 Für das Rechnen mit Beträgen gilt: $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ sowie $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
Setze $z_1 = 8+6j$ und $z_2 = 3-4j$ und bestätige mit diesen Zahlen die Behauptung.

7.18 Bestimme z (2 Lösungen!), wenn

a) $\operatorname{Re} z = 4$ und $|z| = 5$ **b)** $\operatorname{Re} z = -3$ und $|z| = 5$ **c)** $\operatorname{Re} z = -6$ und $|z| = 10$

7.19 Löse in $\mathbb{C}$:

a) $x^2-4x+5=0$ **b)** $\frac{x^2}{2}-x+2=0$ **c)** $x^2+x+1=0$ **d)** $4x^2-5x+10=0$
e) $16x(1-x)=13$ **f)** $3x^2=2x-\frac{5}{3}$ **g)** $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=1$ **h)** $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=0$

7.20 Bei der Berechnung von elektrischen Netzwerken bei Wechselströmen treten lineare Gleichungssysteme auf. Löse das lineare Gleichungssystem in $\mathbb{C}$:

a)
I: $(1+2j)\cdot z_1+3j\cdot z_2=2$
II: $3\cdot z_1+(6-j)\cdot z_2=4$

b)
I: $(3+2j)\cdot z_1-j\cdot z_2=-2+3j$
II: $(1-3j)\cdot z_1+(2-j)\cdot z_2=5(1-2j)$

c)
I: $4\cdot x+3\cdot y=11+9j$
II: $x+3\cdot z=2-3j$
III: $x+y+z=3+2j$

d)
I: $(1+2j)\cdot x+2\cdot y=5+3j$
II: $3j\cdot x+y+z=2+2j$
III: $x+(2+3j)\cdot y+(1-j)\cdot z=8+7j$

7.2 Polarformen einer komplexen Zahl

In Abb. 7.11 ist der Zeiger einer komplexen Zahl $z = a + bj$ in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt. Den Zeiger und damit die komplexe Zahl kann man statt mit Realteil a und Imaginärteil b auch durch Polarkoordinaten r und φ festlegen (siehe Seite 180). Diese Darstellungsform komplexer Zahlen ist besonders in den Anwendungen vorteilhaft.

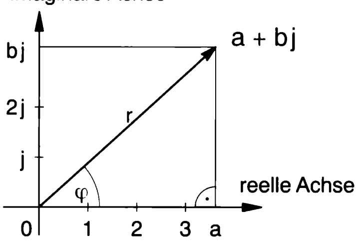


Abb. 7.11 Polarkoordinaten r und φ einer komplexen Zahl

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ... Betrag von z, Zeigerlänge

φ ... **Winkel, Argument** oder **Phase** von z

Dreht man den Zeiger um $k \cdot 360°$ (oder, wenn φ im Bogenmaß vorliegt, um $k \cdot 2\pi$), $k \in \mathbb{Z}$, erhält man den gleichen Zeiger und damit die *gleiche* komplexe Zahl; mit φ ist somit auch $\varphi + k \cdot 360°$ (oder $\varphi + k \cdot 2\pi$) ein Winkel von z!

Aus Abb. 7.11 entnimmt man:
$\cos \varphi = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos \varphi$;
$\sin \varphi = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \sin \varphi$.

Damit ist $z = a + bj = r \cdot \cos \varphi + (r \cdot \sin \varphi) j = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$. Dies ist eine Schreibweise einer komplexen Zahl mit Hilfe der **Polarkoordinaten r** und $\boldsymbol{\varphi}$. Sie wird **trigonometrische Form** genannt.

Trigonometrische Form einer komplexen Zahl
Sind r und φ die Polarkoordinaten der komplexen Zahl z, dann gilt:
$z = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$.

Dieser Darstellungsform kann man noch eine andere Gestalt geben, wenn man von einem bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den Kreisfunktionen Gebrauch macht. Es gilt nämlich die **Euler'sche Formel**[8]:

Euler'sche Formel
$e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$.

Die Euler'sche Formel ist eine grundlegende Formel in der Mathematik, auf deren Herleitung hier nicht eingegangen werden kann.

Damit erhält man aus der trigonometrischen Form die **Exponentialform** einer komplexen Zahl:

Exponentialform einer komplexen Zahl
$z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$

Die Exponentialform kann als Kurzschreibweise der trigonometrischen Form angesehen werden. Sie wird in den Anwendungen der trigonometrischen Form vorgezogen. Da diesen beiden Formen Polarkoordinaten zugrundeliegen, fassen wir sie unter dem Namen **Polarformen** zusammen.

[8] Leonhard EULER, 1707 – 1783, vielseitiger schweizer Mathematiker

In der Elektrotechnik wird noch eine dritte Schreibweise für den "Winkelfaktor" $e^{j\cdot\varphi} = \cos\varphi + j\cdot\sin\varphi$ verwendet:

> **Versorform einer komplexen Zahl**
> Für $e^{j\cdot\varphi}$ wird kurz $\underline{/\varphi}$ geschrieben; lies "Versor φ". Daraus ergibt sich: $z = r\cdot\underline{/\varphi}$

Für einige häufig auftretende Winkel ist der Winkelfaktor im Folgenden angegeben:

$$e^{j\cdot 0} = e^{j\cdot 0^\circ} = \cos 0^\circ + j\cdot\sin 0^\circ = 1$$
$$e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{j\cdot 90^\circ} = \cos 90^\circ + j\cdot\sin 90^\circ = j$$
$$e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{-j\cdot 90^\circ} = \cos(-90^\circ) + j\cdot\sin(-90^\circ) = -j$$
$$e^{j\cdot\pi} = e^{j\cdot 180^\circ} = \cos 180^\circ + j\cdot\sin 180^\circ = -1.$$

Anmerkung: Die in der Euler'schen Formel auftretende komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der Periode $2\pi j$:

$$e^{j\cdot\varphi + 2\pi\cdot j} = e^{j\cdot(\varphi + 2\pi)} = \cos(\varphi + 2\pi) + j\cdot\sin(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi + j\cdot\sin\varphi = e^{j\cdot\varphi}$$

Diese überraschende Eigenschaft der Exponentialfunktion ist bei einer Beschränkung auf die reellen Zahlen nicht erkennbar!

Beispiel 7.11 : Zeiger von komplexen Zahlen in Polarform

Stelle die komplexen Zahlen $z_1 = 3(\cos 30^\circ + j\cdot\sin 30^\circ)$, $z_2 = 2\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$ und $z_3 = 4\cdot e^{-j\cdot 120^\circ}$ als Zeiger dar.

Lösung

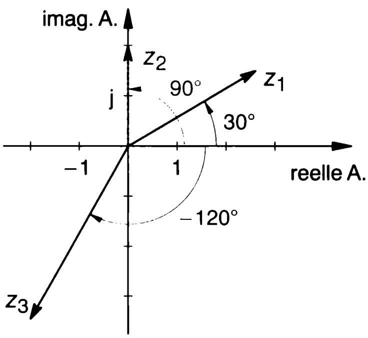
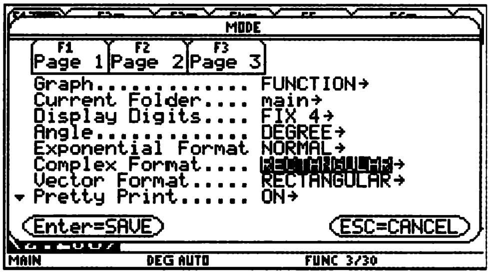


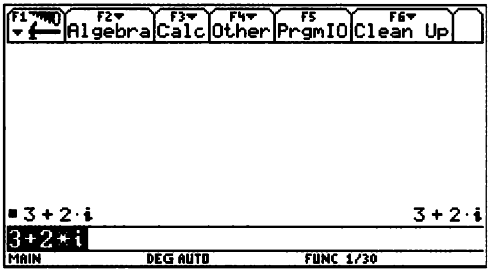
Abb. 7.12

Aus Abb. 7.11 erhält man $\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}$. Damit können die Formeln für die **Umrechnung zwischen der Komponentenform und einer Polarform** angeben werden:

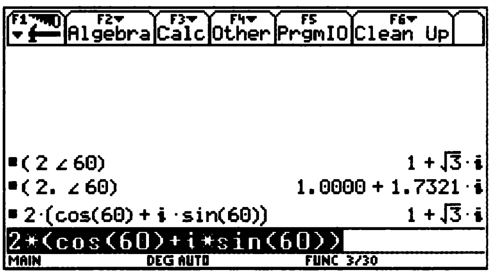
$z = \underbrace{a + bj}_{\text{Komponentenform}} = \underbrace{r\cdot(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi)}_{\text{trigonometrische Form}} = \underbrace{r\cdot e^{j\cdot\varphi}}_{\text{Exponentialform}}$ — Polarformen	
Komponentenform → Polarform:	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}$
Polarform → Komponentenform:	$a = r\cdot\cos\varphi$, $b = r\cdot\sin\varphi$



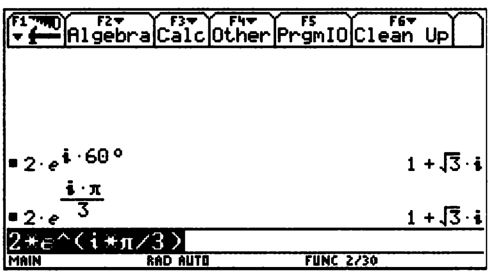
Es empfiehlt sich, alle Berechnungen mit komplexen Zahlen mit der Einstellung *Complex Format* – RECTANGULAR durchzuführen. Dies ist auch standardmäßig eingestellt.
Ebenso wird im Folgenden, wenn nicht anders gesagt, die Winkeleinstellung DEGREE vorausgesetzt.



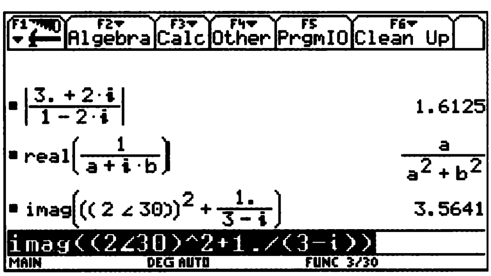
Eingabe einer komplexen Zahl in der **Komponentenform:**
Der Voyage 200 (TI-89) verwendet für die imaginäre Einheit das Zeichen i, geschrieben durch [2ND] [I] (nicht das "gewöhnliche" i auf der Tastatur!).
Umwandlung von der Komponentenform in eine Polarform siehe Seite 200.



Eingabe einer komplexen Zahl in **polarer Form:**
Dazu schreibt man die komplexe Zahl in der Versorform (zwischen runden Klammern, kein Malzeichen vor dem Winkel) oder in der trigonometrischen Form. Das Winkelzeichen ∠ erhält man mit [2ND] [F].
Eine Eingabe in der Exponentialform ist bei der Winkeleinstellung DEGREE nicht möglich.



Bei der Eingabe einer komplexen Zahl in der **Exponentialform** ist auf das Winkelmaß RADIAN umzustellen. Das Gradzeichen ° erhält man durch [2ND] [D] (D wie Degree).



Den **Betrag** einer komplexen Zahl erhält man durch Eintippen von abs gefolgt von der komplexen Zahl in runden Klammern. Entsprechend kann durch Eintippen von real() oder imag() der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl bestimmt werden. Statt durch Eintippen können diese Anweisungen auch über das Math-Menü aufgerufen werden: [2ND] [5], danach wieder [5] (5:Complex).

MC

Komplexe Zahlen mit Mathcad (siehe auch Kap. 12, Seite 320)

Wir setzen voraus, dass j als Zeichen für die imaginäre Einheit eingestellt ist. Bei der Eingabe und numerischen Auswertung wird dann die imaginäre Einheit durch j dargestellt, bei einer symbolischen Auswertung durch i.

Schreibweise von komplexen Zahlen

$\frac{1}{j} = -j$ j wird in der Form 1j ohne ein Malzeichen zwischen 1 und j geschrieben.

$z_1 := 4 + 2j$ $\quad z_2 := 1 + j \cdot 3$ $\quad a + b \cdot j$ Schreibweise: 2j ohne Malzeichen, aber 1j*3 und auch b*1j

$e^{j \cdot \frac{\pi}{3}} = 0.5 + 0.866j$ $\quad 3 \cdot e^{j \cdot 60\mathrm{Grad}} = 1.5 + 2.598j$ $\quad 3 \cdot (\cos(60\mathrm{Grad}) + j \cdot \sin(60\mathrm{Grad})) = 1.5 + 2.598j$

Verschiedene einfache Berechnungen

$z_1 + z_2 = 5 + 5j$ $\quad z_1 - z_2 = 3 - j$ $\quad z_1 \cdot z_2 = -2 + 14j$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = 1 - j$

Realteil: $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = -2$ **Imaginärteil:** $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -1$

Betrag (Anklicken des Betragsoperators aus der Taschenrechnerpalette):

$|z_1| = 4.472$ $\quad \left|\frac{1 + 2j}{(1 - j)^2}\right| = 1.118$ $\quad \left|\frac{1 + 2j}{(1 - j)^2}\right| \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$

Winkel: $\arg(3 + 4j) = 0.927$ Das Ergebnis wird im Bogenmaß angegeben. Möchte man das Gradmaß, so klickt man auf den Einheitenplatzhalter nach der Zahl 0.927 und ersetzt ihn durch das Wort "Grad".
$\arg(3 + 4j) = 53.13\mathrm{Grad}$

Darstellung eines Terms in der **Komponentenform** (Schlüsselwort *komplex* aus der Symbolikpalette):

$$\frac{a}{b + j \cdot c} \text{ komplex } \rightarrow a \cdot \frac{b}{(b^2 + c^2)} - i \cdot a \cdot \frac{c}{(b^2 + c^2)}$$

Lösung einer quadratischen Gleichung

$$x := 4x^2 - 5x + 10 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot i \cdot 15^{\frac{1}{2}} \\ \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \cdot i \cdot 15^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.625 + 1.452j \\ 0.625 - 1.452j \end{pmatrix}$$

Lösung eines linearen Gleichungssystems

$a := 1 + 2j$ $\quad b := 6 - j$

Vorgabe

$a \cdot x + 3j \cdot y = 2$

$3x + b \cdot y = 4$

$\mathrm{Suchen}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot i \\ i \end{pmatrix}$

Beispiel 7.12 : Umwandlung von der Komponentenform in eine Polarform

Wandle in die beiden Polarformen um:

a) $z_1 = 3 + 2j$ **b)** $z_2 = 4j$ **c)** $z_3 = -3 + 2j$ **d)** $z_4 = -3 - 2j$ **e)** $z_5 = 2 - 4j$

Lösung

Bei der Berechnung des Winkels φ durch $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ erhält man einen Winkel zwischen $-90°$ und $90°$; dies ist schon der gesuchte Winkel, wenn der Zeiger im ersten oder vierten Quadranten liegt. Für einen Zeiger *im zweiten oder dritten Quadranten ist jedoch noch 180° zu addieren*!

Damit erhält man einen Winkel φ der komplexen Zahl z zwischen $-90°$ und $270°$. Zu diesem Winkel kann $360°$ addiert oder subtrahiert werden, die komplexe Zahl z bleibt dabei gleich. Zur Sicherheit sollte die Rechnung von einer Handskizze begleitet werden. In Taschenrechnern eingebaute Funktionen geben einen Winkel zwischen $-180°$ und $180°$ an.

Zu **a)** z_1 liegt im ersten Quadranten (Abb. 7.13).

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3{,}61$;

$\tan \varphi = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan \frac{2}{3} = 33{,}7°$.

$z_1 = \sqrt{13} \cdot (\cos 33{,}7° + j \cdot \sin 33{,}7°) = \sqrt{13} \cdot e^{j \cdot 33{,}7°}$.

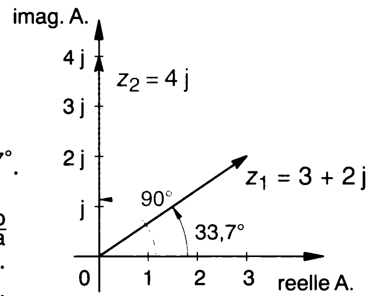


Abb. 7.13

Zu **b)** $z_2 = 0 + 4j$, φ kann nicht aus der Formel $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ berechnet werden, da der Realteil a gleich 0 ist. Man erkennt jedoch unmittelbar aus Abb. 7.13, dass $\varphi = 90°$ und ebenso dass $r = 4$ ist; damit:

$z_2 = 4 \cdot (\cos 90° + j \cdot \sin 90°) = 4 \cdot e^{j \cdot 90°}$.

Zu **c)** z_3 liegt im zweiten Quadranten (Abb. 7.14).

$r = \sqrt{13}$;

$\varphi = \arctan \frac{2}{-3} = -33{,}7° + 180° = 146{,}3°$.

$z_3 = \sqrt{13} \cdot (\cos 146{,}3° + j \cdot \sin 146{,}3°) =$
$= \sqrt{13} \cdot e^{j \cdot 146{,}3°}$.

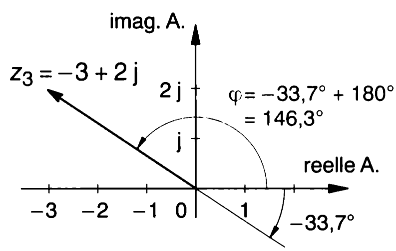


Abb. 7.14

Zu **d)** z_4 liegt im dritten Quadranten (Abb. 7.15).

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$;

$\varphi = \arctan \frac{-2}{-3} = 33{,}7° + 180° = 213{,}7°$.

$z_4 = \sqrt{13} \cdot (\cos 213{,}7° + j \cdot \sin 213{,}7°) =$
$= \sqrt{13} \cdot e^{j \cdot 213{,}7°}$.

Da mit φ auch $\varphi - 360°$ ein möglicher Winkel einer komplexen Zahl ist, kann auch geschrieben werden:

$z_4 = \sqrt{13} \cdot e^{-j \cdot 146{,}3°}$.

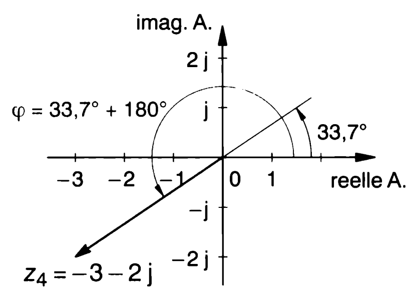


Abb. 7.15

Zu **e)** z_5 liegt im vierten Quadranten (Abb. 7.16).

$r = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 4{,}47;$

$\varphi = \arctan \frac{-4}{2} = -63{,}4°.$

$z_5 = \sqrt{20} \cdot [\cos(-63{,}4°) + j \cdot \sin(-63{,}4°)] = \sqrt{20} \cdot e^{-j \cdot 63{,}4°}.$

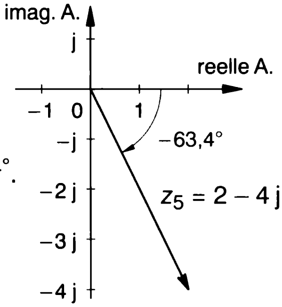
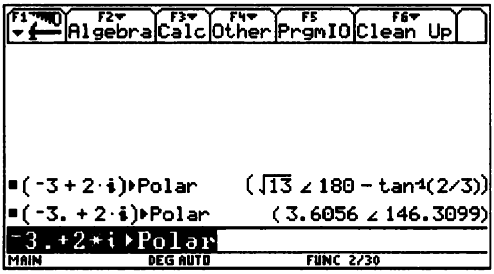


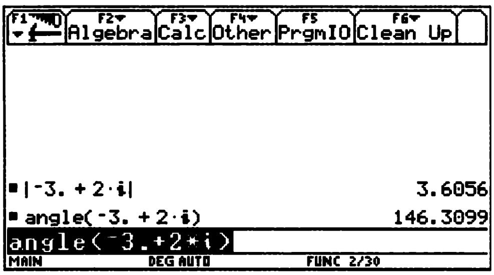
Abb. 7.16

Lösung von Beispiel 7.12 c) mit dem Taschenrechner



Umwandlung von der Komponentenform in eine Polarform:
Aufruf von ▶Polar über den Katalog durch 2ND 2 oder zeichenweise eintippen (▶ durch 2ND Y).

Ein Weiterrechnen in der Polarform ist nach Übertragung der Zahl aus dem Protokollbereich (History-Bereich) in die Eingabezeile möglich.



Den Betrag oder den Winkel erhält man auch durch die Anweisungen abs() bzw. angle().

Beispiel 7.13 : Umwandlung von einer Polarform in die Komponentenform

Rechne in die Komponentenform um:

a) $3(\cos 30° + j \cdot \sin 30°)$ **b)** $4 \cdot e^{-j \cdot 120°}$ **c)** $2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$

Lösung

(siehe auch Abb. 7.12)

Zu **a)** Die Umrechnung erfolgt durch einfaches Ausmultiplizieren:

$3(\cos 30° + j \cdot \sin 30°) = 3 \cdot \cos 30° + j \cdot 3 \cdot \sin 30° = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}j.$

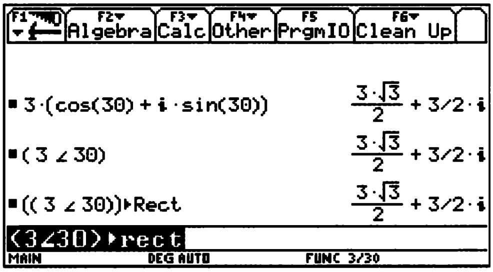
Zu **b)** Zuerst wird in die trigonometrische Form umgeschrieben und danach wieder wie in a) ausmultipliziert:

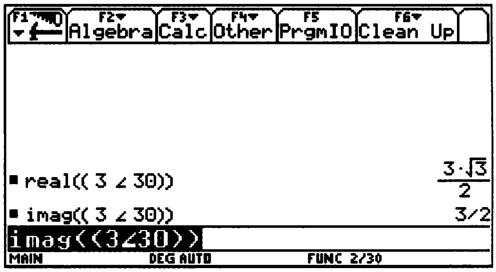
$4 \cdot e^{-j \cdot 120°} = 4 \cdot [\cos(-120°) + j \cdot \sin(-120°)] = -2 - j \cdot 2\sqrt{3}.$

Zu **c)** Man kann wie in b) vorgehen oder aus der Exponentialform ablesen, dass $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder 90° ist und es sich daher um die imaginäre Zahl $2j$ handeln muss.

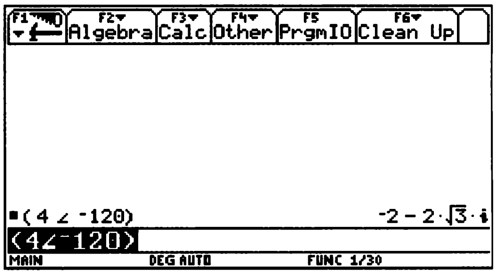
Lösung mit dem Taschenrechner

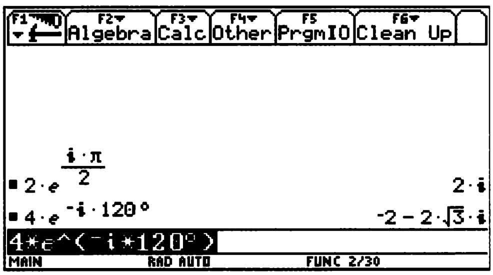
Zu **a)** Bei der bevorzugten Einstellung *Complex Format* gleich RECTANGULAR (MODE-Menü MODE) wird eine in einer Polarform eingegebene komplexe Zahl nach ENTER in der Komponentenform angezeigt. Eine besondere Umrechnung ist nicht mehr nötig. Bei der Einstellung *Complex Format* – POLAR erfolgt eine Umrechnung durch ▶Rect (Katalog durch 2ND 2 oder zeichenweise eintippen, ▶ durch 2ND Y). Nur den Realteil oder nur Imaginärteil erhält man durch die Anweisungen real() bzw. imag().





Zu **b)** Wir schreiben statt der Exponentialform die Versorform.
Eine Umwandlung der Exponentialform in die Komponentenform würde voraussetzen, dass RADIAN als Winkelmaß eingestellt ist.





Zu **c)**
Nur bei einer Eingabe im Exponentialformat ist auf das Winkelmaß RADIAN einzustellen.

Beispiel 7.14 : Multiplikation in der Polarform

$z_1 = 2 \cdot (\cos 20° + j \cdot \sin 20°) = 2 \cdot e^{j \cdot 20°}$,
$z_2 = 3 \cdot (\cos 50° + j \cdot \sin 50°) = 3 \cdot e^{j \cdot 50°}$.
Berechne $z_1 \cdot z_2$ in der Polarform!

Lösung

$$z_1 \cdot z_2 = 2\,(\cos 20° + j \cdot \sin 20°) \cdot 3\,(\cos 50° + j \cdot \sin 50°) =$$
$$= 2 \cdot 3\,(\cos 20° \cos 50° + j \cdot \cos 50° \sin 20° + j \cdot \sin 50° \cos 20° + j^2 \cdot \sin 50° \sin 20°) =$$
$$= 2 \cdot 3\,[(\cos 50° \cos 20° - \sin 50° \sin 20°) + j \cdot (\cos 50° \sin 20° + \sin 50° \cos 20°)]$$

Wendet man nun den ersten Summensatz an, so erhält man

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\,[\cos(20° + 50°) + j \sin(20° + 50°)] = 6 \cdot (\cos 70° + j \cdot \sin 70°) = 6 \cdot e^{j \cdot 70°}.$$

Wir erkennen: die Beträge $|z_1| = 2$ und $|z_2| = 3$ werden multipliziert und die Winkel 20° und 50° addiert. Führt man die Rechnung allgemein, so erkennt man, dass diese Regel allgemein gilt!

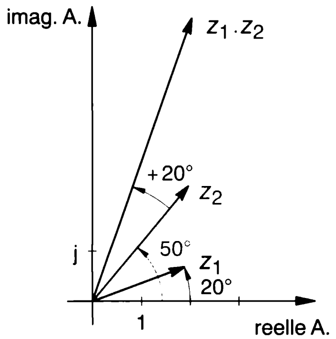


Abb. 7.17

Zum Zeiger von $z_1 \cdot z_2$ kommt man also (Abb. 7.17), indem man den Zeiger von z_1 um den Winkel von z_2, nämlich 20°, im Gegenuhrzeigersinn weiterdreht und seine Länge auf $|z_1| \cdot |z_2|$ streckt. Auch dies gilt allgemein: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet im allgemeinen eine Drehung *und* eine Streckung, weshalb man auch von einer **Drehstreckung** spricht.

Dividiert man zwei komplexe Zahlen, so kann man zeigen, dass sich nun die Winkel subtrahieren und die Beträge dividieren.

Wir fassen zusammen (siehe auch Seite 191, "Rechnen mit Beträgen"):

Multiplikation und Division komplexer Zahlen in Polarform:

$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1) = r_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}$,

$z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2) = r_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}$,

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1\, r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1\, r_2 \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$
   Zwei komplexe Zahlen werden **multipliziert**, indem man ihre **Beträge multipliziert** und ihre **Winkel addiert**.
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$
   Zwei komplexe Zahlen werden **dividiert**, indem man ihre **Beträge dividiert** und ihre **Winkel subtrahiert**.

Liegen somit zwei komplexe Zahlen in Polarform vor, so kann ihre Multiplikation und Division leicht erfolgen.

Zudem erkennt man: Das Multiplizieren und Dividieren von komplexen Zahlen in der Exponentialform erfolgt mit den für reelle Zahlen gewohnten Potenzgesetzen!

Beispiel 7.15 : Division von komplexen Zahlen

Berechne $\frac{1 + 5\,j}{3 + 2\,j}$ (Beispiel 7.7, Seite 191) durch vorherige Umwandlung in die Exponentialform und veranschauliche die Rechnung in der Gauß'schen Zahlenebene!

Lösung

$1 + 5\,j = 5{,}10 \cdot e^{j \cdot 78{,}7°}$; $3 + 2\,j = 3{,}61 \cdot e^{j \cdot 33{,}7°}$;

$\frac{5{,}10 \cdot e^{j \cdot 78{,}7°}}{3{,}61 \cdot e^{j \cdot 33{,}7°}} = \frac{5{,}10}{3{,}61} \cdot e^{j \cdot (78{,}7° - 33{,}7°)} = 1{,}41 \cdot e^{j \cdot 45{,}0°}$.

Um die Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Beispiel 7.7 zu zeigen, formen wir den Quotienten in die Komponentenform um:

$1{,}41 \cdot e^{j \cdot 45{,}0°} = 1{,}41\,(\cos 45° + j \cdot \sin 45°) = 1 + j$.

(Zwischen-) Ergebnisse wurden gerundet angeschrieben; gerechnet wurde mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit.

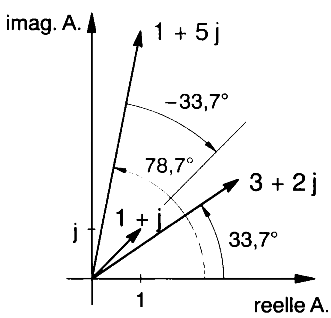


Abb. 7.18

Beispiel 7.16 : Rechnen bei unterschiedlichen Darstellungsformen

$z_1 = 3 + 4j$, $z_2 = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}}$. Berechne $z_1 \cdot z_2$.

Lösung

Wir können entweder
(1) z_2 auf Komponentenform oder
(2) z_1 auf Exponentialform bringen.

Zu (1) $z_2 = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}} = 2 \cdot (\cos \frac{\pi}{6} + j \cdot \sin \frac{\pi}{6}) = 2 \cos \frac{\pi}{6} + j \cdot 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1{,}73 + j$

$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4j) \cdot (1{,}73 + j) = 5{,}20 + 6{,}93j + 3j + 4j^2 = 1{,}20 + 9{,}93j.$

Zu (2) $3 + 4j = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot e^{j \cdot \arctan \frac{4}{3}} = 5 \cdot e^{j \cdot 0{,}927}$

$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot e^{j \cdot 0{,}927} \cdot 2\, e^{j \cdot \frac{\pi}{6}} = 5 \cdot 2\, e^{j \cdot (0{,}927 + \frac{\pi}{6})} = 10\, e^{j \cdot 1{,}451}.$

Stelle die Übereinstimmung der in (1) und (2) erhaltenen Ergebnisse fest!

Wir behandeln nun drei besonders für die elektrotechnische Anwendungen grundlegende Aufgabenstellungen: das Bilden des Kehrwertes einer komplexen Zahl sowie die Multiplikation einer komplexen Zahl mit j sowie deren Division durch j.

Beispiel 7.17 : Kehrwertbildung (Inversion) einer komplexen Zahl

Bilde den Kehrwert von $z = 0{,}8 + 1{,}4j$

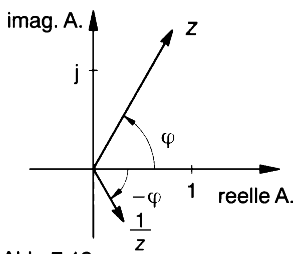


Abb. 7.19

Lösung

Zur Kehrwertbildung benützen wir die Exponentialform.

$z = 0{,}8 + 1{,}4j = 1{,}61 \cdot e^{j \cdot 60{,}3°}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{1{,}61 \cdot e^{j \cdot 60{,}3°}} = \frac{1}{1{,}61} \cdot \frac{1}{e^{j \cdot 60{,}3°}} = 0{,}620 \cdot e^{-j \cdot 60{,}3°}.$

Allgemein: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-j \cdot \varphi} = \frac{1}{r} \underline{/-\varphi}$

Der Betrag von $\frac{1}{z}$ ist gleich dem Kehrwert des Betrages von z, der Winkel gleich dem des an der reellen Achse gespiegelten Zeigers.

Die Kehrwertbildung einer komplexen Zahl z wird auch als ihre **Inversion**, $\frac{1}{z}$ als der zu z **inverse Zeiger** bezeichnet.

Beispiel 7.18 : Multiplikation einer komplexen Zahl mit j

Multipliziere $z = 1 + 2j$ mit j.

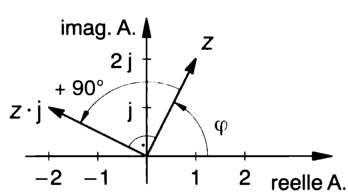


Abb. 7.20

Lösung

$j = 1 \cdot e^{j \cdot 90°}$;

somit wird der Betrag von z mit 1 multipliziert (die Multiplikation mit j ändert den Betrag nicht) und zum Winkel von z wird 90° addiert.

$z \cdot j = (1 + 2j) \cdot j = 2{,}24\, e^{j \cdot 63{,}43°} \cdot 1 \cdot e^{j \cdot 90°} = 2{,}24 \cdot 1 \cdot e^{j \cdot (63{,}43° + 90°)} = 2{,}24 \cdot e^{j \cdot 153{,}43°} = -2 + j.$

Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit j bedeutet geometrisch die *Drehung des Zeigers z um + 90°* (entgegen dem Uhrzeigersinn).

Beispiel 7.19 : Division einer komplexen Zahl durch *j*

Dividiere $z = -4 + 3j$ durch j.

Lösung

$$\frac{z}{j} = \frac{-4+3j}{j} = \frac{5 \cdot e^{j \cdot 143{,}1^\circ}}{1 \cdot e^{j \cdot 90^\circ}} = \frac{5}{1} \cdot e^{j \cdot (143{,}1^\circ - 90^\circ)} =$$
$$= 5 \cdot e^{j \cdot 53{,}1^\circ} = 3 + 4j.$$

Bei der Division einer komplexen Zahl *z* durch j ist ihr *Zeiger um – 90° zu drehen* (Drehen im Uhrzeigersinn).

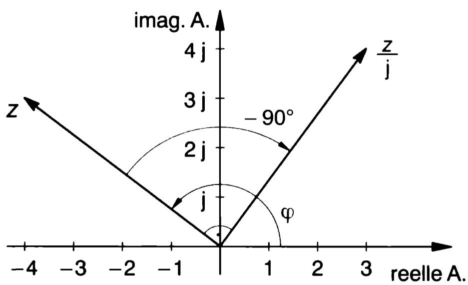


Abb. 7.21

Beispiel 7.20 : Verschiedene Berechnungen

a) Schreibe in der Exponentialform: $2\,(\cos 40^\circ - j \cdot \sin 40^\circ)$

b) $z_1 = 200 \cdot e^{j \cdot 25^\circ}$, $z_2 = 180 \cdot e^{-j \cdot 70^\circ}$; berechne Betrag und Winkel von $z = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$.

c) Berechne und gib das Ergebnis in der Komponentenform und Exponentialform an:
$$\frac{\cos 120^\circ + j \cdot \sin 120^\circ}{(1+j)^2\,(2j)^*} + \frac{3j}{e^{-j \cdot \pi}}$$

Lösung

Zu **a)** Hier liegt nicht die trigonometrische Form einer komplexen Zahl vor! In diesem Fall müßte ein Plus-Zeichen zwischen dem Kosinus- und Sinusterm stehen. Wir können – etwas umständlich – die komplexe Zahl zuerst in die Komponentenform umformen:

$2\,(\cos 40^\circ - j \cdot \sin 40^\circ) = 2 \cos 40^\circ - j \cdot 2 \sin 40^\circ = 1{,}532 - 1{,}286j$.

Die Umwandlung in Polarkoordinaten ergibt: $r = 2$ und $\varphi = -40^\circ$; somit erhalten wir als Ergebnis: $2\,(\cos 40^\circ - j \cdot \sin 40^\circ) = 2\,e^{-j \cdot 40^\circ}$.

Schneller benützt man, dass $\cos(-40^\circ) = \cos 40^\circ$ und $\sin(-40^\circ) = -\sin 40^\circ$;
somit: $2\,(\cos 40^\circ - j \cdot \sin 40^\circ) = 2\,[\cos(-40^\circ) + j \cdot \sin(-40^\circ)] = 2\,e^{-j \cdot 40^\circ}$.

Zu **b)** $z_1 . z_2 = 200 \cdot 180\, e^{j \cdot (25^\circ - 70^\circ)} = 36000\, e^{-j \cdot 45^\circ}$

$z_1 = 200 \cdot (\cos 25^\circ + j \cdot \sin 25^\circ) = 181{,}3 + 84{,}5j$; $\quad z_2 = 61{,}6 - 169{,}1j$;

$z_1 + z_2 = 242{,}8 - 84{,}6j = 257{,}1 \cdot e^{-j \cdot 19{,}2^\circ}$

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} = \frac{36000 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ}}{257{,}1 \cdot e^{-j \cdot 19{,}2^\circ}} = \frac{36000}{257{,}1} \cdot e^{-j \cdot (45^\circ - 19{,}2^\circ)} = 140{,}0 \cdot e^{-j \cdot 25{,}8^\circ}.$$

Somit: $r = 140{,}0$ und $\varphi = -25{,}8^\circ$

Führe die Rechnung in der Komponentenform!

Zu **c)**
$$\frac{-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{(1 + 2j - 1)(-2j)} + \frac{3j}{-1} = \frac{-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{4} - 3j = -\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\sqrt{3} - 3\right)j =$$
$$= -0{,}125 - 2{,}783j = 2{,}786\, e^{-j \cdot 92{,}6^\circ}.$$

Führe die Rechnung in der Komponentenform!

Aufgaben

7.21 Stelle folgenden komplexen Zahlen als Zeiger dar:

a) $4(\cos 30° + j \cdot \sin 30°)$ **b)** $5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

c) $3[\cos(-150°) + j \cdot \sin(-150°)]$ **d)** $4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

e) $3(\cos 1{,}2 + j \cdot \sin 1{,}2)$ **f)** $5[\cos(-2) + j \cdot \sin(-2)]$

7.22 Ebenso:

a) $3\,e^{j \cdot 45°}$ **b)** $4\,e^{j \cdot 135°}$ **c)** $e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$ **d)** $3\,e^{j \cdot \pi}$

e) $2\,e^{-j \cdot \frac{3\pi}{2}}$ **f)** $3\,e^{j \cdot 0{,}5}$ **g)** $2\,e^{j \cdot 2}$ **h)** $3\,e^{-j}$

7.23 Ermittle *im Kopf* die Winkel folgender komplexer Zahlen:

a) $1 + j$ **b)** $-1 + j$ **c)** $-2 - 2j$ **d)** $3 - 3j$

e) j **f)** -1 **g)** $-j$ **h)** 1

7.24 Wandle folgende komplexe Zahlen *im Kopf* in die Exponentialform um:

a) j **b)** -1 **c)** 1 **d)** $-j$

7.25 Die folgenden komplexen Zahlen sollen *im Kopf* in die Komponentenform umgewandelt werden:

a) $3(\cos 90° + j \cdot \sin 90°)$ **b)** $2\,e^{j \cdot \pi}$ **c)** $2[\cos(-90°) + j \cdot \sin(-90°)]$

d) $e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$ **e)** $2\,e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$ **f)** $4(\cos 180° + j \cdot \sin 180°)$

7.26 Gegeben ist eine komplexe Zahl z in Polarform. Wie lauten in der gleichen Form $-z$ und $\frac{1}{z}$? Überlege *im Kopf*!

a) $z = 2(\cos 30° + j \cdot \sin 30°)$ **b)** $z = 5\,e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$ **c)** $z = \frac{1}{2}(\cos 90° + j \cdot \sin 90°)$

d) $z = 4(\cos 180° + j \cdot \sin 180°)$ **e)** $z = \frac{1}{3}e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}}$ **f)** $z = \frac{1}{8}e^{-j \cdot 135°}$

7.27 Wandle in die Exponentialform um:

a) $4 + 2j$ **b)** $-3 + 4j$ **c)** $-3 - 2j$ **d)** $3 - 4j$

e) $-2 + 3j$ **f)** $-1 - j$ **g)** $3j$ **h)** $-5j$

7.28 Die folgenden komplexen Zahlen sollen *im Kopf* – eventuell unter Zuhilfenahme einer Skizze – in die Polarform umgewandelt werden:

a) j **b)** $2j$ **c)** 3 **d)** -4 **e)** $-j$ **f)** $-3j$

7.29 Berechne:

a) $(1 + 2j) \cdot 3(\cos 45° + j \cdot \sin 45°)$ **b)** $(2 - j) \cdot e^{j \cdot 150°}$ **c)** $2(\cos 60° + j \cdot \sin 60°) \cdot 3\,e^{j \cdot \pi}$

7.30 Berechne:

a) $\frac{2+4j}{5\,e^{j\cdot 30^\circ}}$ **b)** $\frac{-6+8j}{5\,(\cos 90^\circ + j\cdot\sin 90^\circ)}$ **c)** $\frac{4\,e^{j\frac{3\pi}{4}}}{5\,e^{j\cdot 60^\circ}}$

d) $\frac{3-2j}{2\underline{/30^\circ}}$ **e)** $\frac{3\,(\cos 60^\circ + j\cdot\sin 60^\circ)\cdot 4\cdot e^{j\cdot 30^\circ}}{2\,(\cos 45^\circ + j\cdot\sin 45^\circ)}$ **f)** $\frac{(3-2j)\cdot 2\underline{/75^\circ}}{4\underline{/30^\circ}}$

7.31 Berechne mit $z_1 = 3\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 2\,e^{j\cdot 60^\circ}$ und $z_3 = \frac{1}{2}(\cos 30^\circ + j\cdot\sin 30^\circ)$ die folgenden Terme und stelle das Ergebnis sowohl in der Komponenten- als auch Exponentialform dar:

a) $3\,z_1\,z_2^*$ **b)** $\frac{z_1^*\,z_3}{z_2}$ **c)** $\frac{|z_1+z_2|}{3\,z_3}$

d) $\frac{z_1\,z_2}{z_1+z_2}$ **e)** $\frac{z_1}{z_2\cdot z_3} - \frac{1}{z_1}$ **f)** $1 + j\frac{z_1^2}{z_2 - z_3}$

7.32 Löse graphisch: $2\underline{/30^\circ} + 2\underline{/150^\circ} + 2\underline{/270^\circ}$

7.33 Mit $z = 2 + j$ werden die folgenden Operationen ausgeführt. Stelle sie in der Gauß'schen Zahlenebene dar und deute sie geometrisch.

a) $z\cdot j$ **b)** $\frac{z}{j}$ **c)** z^* **d)** $-z$

e) $2\cdot z$ **f)** $z\cdot e^{j\cdot 45^\circ}$ **g)** z^2 **h)** $\frac{1}{z}$

7.34 Ermittle *im Kopf* z aus folgender Gleichung. Überlege, was eine Multiplikation mit j bzw. Division durch j geometrisch bedeutet!

a) $z\cdot j = 2\cdot(\cos 120^\circ + j\cdot\sin 120^\circ)$ **b)** $z\cdot j = e^{j\cdot\pi}$

c) $\frac{z}{j} = 3\,(\cos 20^\circ + j\cdot\sin 20^\circ)$ **d)** $\frac{z}{j} = 3\,e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$

7.35 Berechne den Betrag und Winkel von:

a) $\frac{(1+2j)\cdot(3-4j)}{j}$ **b)** $\frac{(1-j)\cdot(3+4j)}{1+j}$ **c)** $\frac{-5+2j}{(3-2j)\cdot(4+3j)}$

d) $\frac{(1+2j)^2\cdot j}{2+j}$ **e)** $\frac{(-4+2j)\cdot(-4-3j)}{(1+2j)\cdot j}$ **f)** $\frac{(5+9j)\cdot(-12+8j)}{(-1+2j)\cdot(5-3j)}$

7.36 Ermittle *im Kopf* den Kehrwert in der Polarform:

a) $2\,(\cos 30^\circ + j\cdot\sin 30^\circ)$ **b)** $5\,(\cos 90^\circ + j\cdot\sin 90^\circ)$ **c)** $\frac{1}{5}e^{-j\cdot 40^\circ}$

7.37 Ermittle den Kehrwert und gib ihn in der Polar- sowie in der Komponentenform an:

a) $4\,(\cos 50^\circ + j\cdot\sin 50^\circ)$ **b)** $4\,(\cos 50^\circ - j\cdot\sin 50^\circ)$ **c)** $2\,e^{j\cdot 120^\circ}$

d) $\frac{1}{2}e^{-j\cdot 30^\circ}$ **e)** $5\,e^{j\cdot\pi}$ **f)** $5\,e^{-j\cdot 1{,}2}$

7.38 Mit Hilfe der Euler'schen Formel kann ein Zusammenhang zwischen den Kreis- und den Hyperbelfunktionen hergestellt werden. Zeige:

a) $\sinh jx = j\cdot\sin x$ **b)** $\cosh jx = \cos x$ **c)** $\tanh jx = j\cdot\tan x$

7.3 Potenzieren und Wurzelziehen

Beispiel 7.21 : n-te Potenz einer komplexen Zahl

$z = 1 + 2j$; berechne z^3!

Lösung

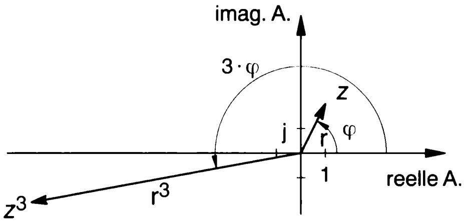


Abb. 7.22

Wegen des höheren Aufwandes ist es nicht günstig, die Rechnung in der Komponentenform durchzuführen. Wir bringen daher z **vor dem Potenzieren in die Polarform**:

$(1+2j)^3 = \left(\sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 63{,}4^\circ}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3 \cdot \left(e^{j \cdot 63{,}4^\circ}\right)^3 =$
$= 11{,}2 \cdot e^{j \cdot 190{,}3^\circ}$.

In die Komponentenform umgeschrieben lautet das Ergebnis: $z^3 = -11 - 2j$.

Das Bilden der n-ten Potenz bedeutet wiederholte Multiplikationen. Geometrisch veranschaulicht sind dies wiederholte Drehstreckungen.

Regel für das Potenzieren:
Eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$ wird in die n-te Potenz ($n \in \mathbb{N}^*$) erhoben, indem man ihren Betrag r in die n-te Potenz erhebt und ihren Winkel φ mit n multipliziert.

Anmerkung: Die Gleichung $(e^{j \cdot \varphi})^n = e^{j \cdot n\varphi}$, $n \in \mathbb{N}^*$ in trigonometrischer Form geschrieben, wird als **Formel von Moivre**[9] bezeichnet: $(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi)$.

Eine komplexe Zahl w heißt n-te Wurzel einer komplexen Zahl z, wenn $w^n = z$.
($n \in \mathbb{N}^*$)

Dies heißt, dass w Lösung der Gleichung $x^n - z = 0$ ist. Man schreibt: $w = \sqrt[n]{z}$.

Wurzeln sind innerhalb der reellen und der komplexen Zahlen unterschiedlich definiert! Dies soll am Beispiel der Quadratwurzel verdeutlicht werden.

a ist eine *nichtnegative* reelle Zahl:

$w = \sqrt{a}$ ist eine nichtnegative Zahl, die quadriert a ergibt. Es gibt nur **eine** solche Zahl.

z ist eine *beliebige* komplexe Zahl:

$w = \sqrt{z}$ ist eine Zahl, die quadriert z ergibt. Es gibt **zwei** solche Zahlen (außer wenn $z = 0$).

---

9 Abraham de Moivre (1667 – 1754), französicher Mathematiker

Beispiel 7.22 : Wurzel aus einer komplexen Zahl

Berechne $\sqrt[3]{8 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}$.

Lösung

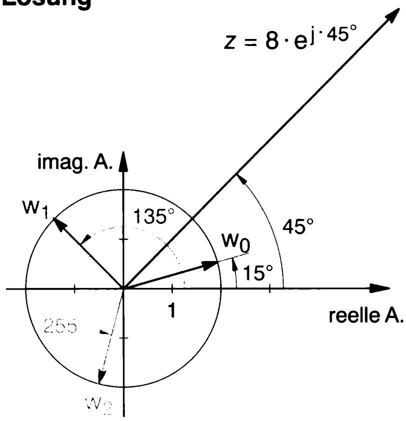


Abb. 7.23

Man erkennt, dass $w_0 = 2 \cdot e^{j \cdot 15^\circ}$ eine dritte Wurzel ist, da ja $w_0^3 = \left(2 \cdot e^{j \cdot 15^\circ}\right)^3 = 2^3 \cdot \left(e^{j \cdot 15^\circ}\right)^3 = 8 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}$.

Es gibt aber noch weitere dritte Wurzeln. Dazu ist zu bedenken, dass

$$z = 8 \cdot e^{j \cdot 45^\circ} = 8 \cdot e^{j \cdot (45^\circ + 360^\circ)} = 8 \cdot e^{j \cdot (45^\circ + 2 \cdot 360^\circ)} = \ldots,$$

d.h. mit $\varphi = 45^\circ$ auch jeder Winkel $\varphi + k \cdot 360^\circ$ (bzw. mit $\varphi = \frac{\pi}{4}$ auch $\varphi + k \cdot 2\pi$), $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, ein möglicher Winkel von z ist. Somit:

$$k = 1: w_1 = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{45^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3}} = 2 \cdot e^{j \cdot 135^\circ};$$

$$k = 2: w_2 = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{45^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3}} = 2 \cdot e^{j \cdot 255^\circ};$$

$k = 3$ ergibt wieder w_0, $k = 4$ ergibt $w_1, \ldots$. Die bisherigen Wurzeln wiederholen sich nur mehr (rechne nach!). Es genügen also $k = 0$, 1 und 2.

Abb. 7.23 zeigt die Zeiger z sowie die drei Wurzeln w_0, w_1 und w_2. Die Zeigerspitzen der drei Wurzeln liegen auf einem Kreis mit dem Radius 2 und bilden dabei ein gleichseitiges Dreieck.

Durch Verallgemeinerung der Überlegungen aus Beispiel 7.22 ergibt sich:

Regel für das Wurzelziehen:

Alle n-ten Wurzeln aus $z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$ erhält man aus: $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j \cdot \varphi_k}$ mit $\varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}$, wobei k die natürlichen Zahlen von 0 bis n – 1 durchläuft.

Ist der Winkel φ im Bogenmaß gegeben, ist 360° durch 2π zu ersetzen.

Beispiel 7.23 : Wurzel aus einer komplexen Zahl

Berechne $\sqrt[5]{4 + 3j}$.

Lösung

Der Radikand muss zuerst in die Polarform umgeschrieben werden: $4 + 3j = 5 \cdot e^{j \cdot 36{,}9^\circ}$.

Für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ist $w_k = \sqrt[5]{5} \cdot (\cos \varphi_k + j \cdot \sin \varphi_k)$ mit $\varphi_k = \frac{36{,}9^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} = 7{,}4^\circ + k \cdot 72^\circ$.

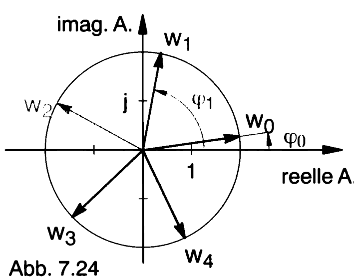
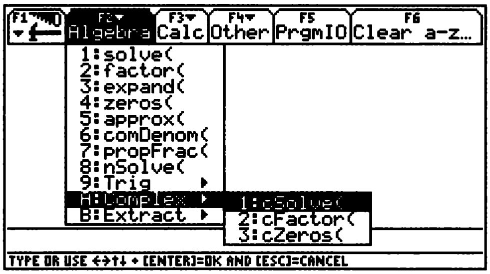


Abb. 7.24

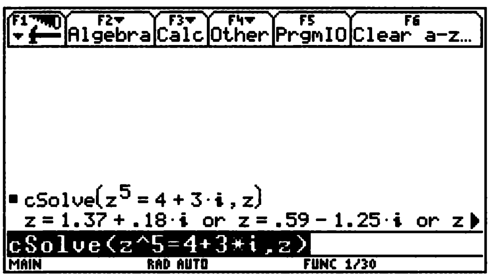
k	φ_k	w_k
0	7,4°	$\sqrt[5]{5}\cdot(\cos 7{,}4° + j\cdot\sin 7{,}4°) = 1{,}37 + 0{,}18j$
1	79,4°	$\sqrt[5]{5}\cdot(\cos 79{,}4° + j\cdot\sin 79{,}4°) = 0{,}25 + 1{,}36j$
2	151,4°	$\sqrt[5]{5}\cdot(\cos 151{,}4° + j\cdot\sin 151{,}4°) = -1{,}21 + 0{,}66j$
3	223,4°	$\sqrt[5]{5}\cdot(\cos 223{,}4° + j\cdot\sin 223{,}4°) = -1{,}00 - 0{,}95j$
4	295,4°	$\sqrt[5]{5}\cdot(\cos 295{,}4° + j\cdot\sin 295{,}4°) = 0{,}59 - 1{,}25j$

Voyage 200

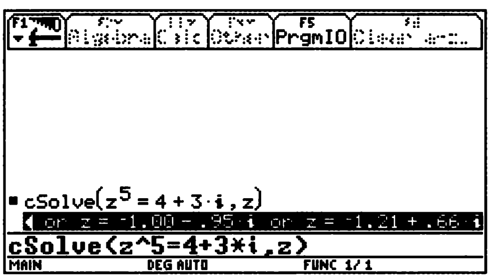


$z = \sqrt[5]{4 + 3j}$ wird zuerst auf die Form $z^5 = 4 + 3j$ gebracht.

Weil die Ausgabe in der Komponentenform gewünscht wird, ist das Complex Format RECTANGULAR zu aktivieren.



Durch cSolve (Eintippen über die Tastatur oder durch F2 A 1) erfolgt die Lösung in der Menge der komplexen Zahlen.
Abschluss der Eingabe ♦ ENTER .



Man erhält die 5 Lösungen:

$z = 1{,}37 + 0{,}18j$
$z = 0{,}59 - 1{,}25j$
$z = 0{,}25 + 1{,}36j$
$z = -1{,}00 - 0{,}95j$
$z = -1{,}21 + 0{,}66j$.

Komponentenform oder Polarform? Die Auswahl erfolgt nach Zweckmäßigkeit.

Addition und Subtraktion	Komponentenform
Multiplikation/Division	Komponentenform oder Polarform
Potenzieren, Wurzelziehen	Polarform

Aufgaben

7.39 Potenziere in Komponentenform und nach vorheriger Umwandlung in der Polarform und vergleiche:

a) $(1 + 3j)^2$ **b)** $(2 - j)^2$ **c)** $(-2 + 3j)^2$ **d)** $(-4 - j)^2$

e) $(2 - 3j)^3$ **f)** $(-1 + 2j)^3$ **g)** $(-2 - j)^3$ **h)** $(-3 + j)^3$

7.40 Berechne und gib das Ergebnis in der Komponentenform an:

a) $(1 + 2j)^3$ **b)** $(-3 + 4j)^4$

c) $\left(\frac{-6 + 17j}{3 - 2j}\right)^3$ **d)** $(\cos 10° + j \cdot \sin 10°)^3$

e) $(e^{j \cdot \pi})^5$ **f)** $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{6} + j \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$

g) $(2e^{-j \cdot 30°})^{12}$ **h)** $\frac{e^{j \cdot 60°}}{(\cos 30° + j \cdot \sin 30°)^2}$

7.41 Wie lauten (überlege im Kopf) in $\mathbb{C}$ die beiden Quadratwurzeln von

a) 1 **b)** -1 **c)** 4 **d)** -4?

7.42 Berechne und stelle das Ergebnis in der Gauß'schen Zahlenebene dar:

a) $\sqrt{4 \cdot (\cos 60° + j \cdot \sin 60°)}$

b) $\sqrt[3]{8 \cdot (\cos 120° + j \cdot \sin 120°)}$

c) $\sqrt[5]{\cos 80° + j \cdot \sin 80°}$

7.43 Ebenso:

a) $\sqrt{j}$ **b)** $\sqrt[3]{-1 + j}$ **c)** $\sqrt[4]{2 - 3j}$ **d)** $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt[6]{2 + 4j}$ **f)** $\sqrt[3]{27 \cdot e^{-j \cdot 60°}}$ **g)** $\sqrt[4]{16 \cdot e^{j \cdot 1{,}6}}$ **h)** $\sqrt[4]{16 \cdot e^{-j \cdot 1{,}2}}$

7.44 Von welcher komplexen Zahl z ist

a) $w = \frac{1}{2}(1 + j)$ eine vierte Wurzel,

b) $w = 2 \cdot e^{j \cdot 20°}$ eine dritte Wurzel?

Wie lauten die weiteren Wurzeln?

7.45 Leite aus $(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + j \cdot \sin 2\varphi$ her, dass $\sin 2\varphi = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$ und $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$.

7.4 Algebraische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $\mathbf{p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$ ($a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$) heißt eine **algebraischen Gleichung n-ten Grades**.
p(x) ist also ein Polynom in der Gleichungsvariablen x vom Grad n.

Beispiele für algebraische Gleichungen:

$3x - 4 = 0$	lineare Gleichung
$x^2 - 6x + 13 = 0$	quadratische Gleichung
$2x^3 - x + 4 = 0$	kubische Gleichung oder Gleichung dritten Grades
$x^4 - 2x^3 + 5x - 1 = 0$	Gleichung vierten Grades.

In $\mathbb{C}$ besitzt eine lineare Gleichung genau eine Lösung, eine quadratische Gleichung genau zwei Lösungen. Kann man weiter sagen, dass eine kubische Gleichung in $\mathbb{C}$ genau drei Lösungen, eine Gleichung vierten Grades genau vier Lösungen besitzt?

Die sehr einfache algebraische Gleichung $x^n - z = 0$ besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen; sie können sogar leicht angegeben werden: es sind die n-ten Wurzeln von z. Dies gilt auch für eine beliebige algebraische Gleichung!

Fundamentalsatz der Algebra:
Jede algebraische Gleichung n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen (wobei "zusammenfallende" Lösungen entsprechend mehrfach zu zählen sind).

In $\mathbb{C}$ sind daher nicht nur quadratische Gleichungen lösbar! Dieser grundlegende Lehrsatz wurde erstmals von C. F. Gauß im Jahre 1799 bewiesen. Eine algebraische Gleichung kann nur reelle, nur komplexe aber auch Lösungen von beiden Arten haben. Wie es eine Lösungsformel für eine quadratische Gleichung gibt, so gibt es auch eine Lösungsformeln für eine Gleichung dritten bzw. vierten Grades, die aber praktisch keine Bedeutung haben. Darüber hinaus gibt es im Allgemeinen keine Lösungsformeln.

Beispiel 7.24 : Lösung einer Gleichung dritten Grades

Bestimme die Lösungen der Gleichung $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$.

Lösung

Kennt man eine Lösung x_1, kann man den Grad um 1 verringern, sodass man eine quadratische Gleichung erhält. Es gelingt manchmal, eine solche Lösung durch Probieren zu finden. In diesem Fall ist $x_1 = 2$ eine Lösung, wie man durch Einsetzen bestätigt. Wir dividieren nun das Polynom $x^3 - 2x^2 + x - 2$ durch $x - 2$.

$$\begin{array}{l} (x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x - 2) = x^2 + 1 \\ x^3 - 2x^2 \\ \underline{- \quad +} \\ \qquad\quad x - 2 \\ \qquad\quad x - 2 \\ \qquad\quad \underline{- \quad +} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

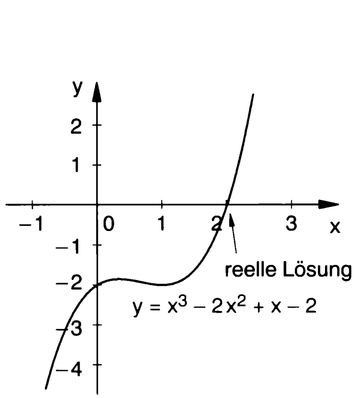


Abb. 7.25

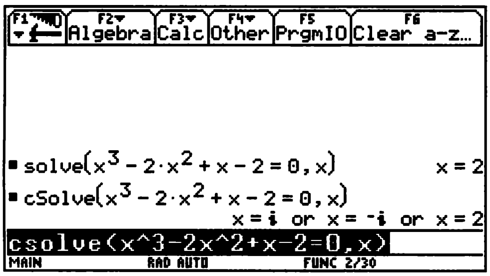
Man kann nun auch schreiben: $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$
Man sagt, dass man $x_1 = 2$ von $p(x)$ **abgespaltet** hat.

Die Division bleibt ohne Rest, wenn ein Polynom $p(x)$ durch $x - x_1$ dividiert wird und x_1 eine Lösung der Gleichung $p(x) = 0$ ist (d.h. eine Nullstelle der Polynomfunktion $y = p(x)$ ist).

$p(x)$ ist nach dem Produkt-Null-Satz ("Ingenieur-Mathematik 1", Seite 48) auch 0 für $x^2 + 1 = 0$. Die Lösungen von $x^2 + 1 = 0$ sind $x_2 = j$ und $x_3 = -j$. Somit gibt es die drei Lösungen: $x_1 = 2$, $x_2 = j$ und $x_3 = -j$. Die Gleichung $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ hat somit in $\mathbb{C}$ genau drei Lösungen, in $\mathbb{R}$ eine Lösung. Abb. 7.25 zeigt den Graphen der Polynomfunktion $y = p(x)$.

Die reelle Lösung $x_1 = 2$ ist als Schnittstelle des Graphen der Polynomfunktion $y = p(x)$ mit der x-Achse erkennbar. Würde man den Graphen soweit "anheben", dass es drei Schnittstellen mit der x-Achse gibt, so gibt es drei reelle Nullstellen.

Voyage 200



Mit dem Befehl solve werden nur die reellen Nullstellen, mit cSolve auch die echt–komplexen Nullstellen des Polynoms bestimmt.

MC

$$x^3 - 2 \cdot x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$$

Man kann die Lösung auch einem bestimmten Vektor zuweisen:

$$x := x^3 - 2 \cdot x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = i \qquad x_3 = -i$

Als Startindex wurde 1 festgelegt (Rechnen-Menü, Optionen).
Der Index wird nach [geschrieben, danach kommt sofort =.

Aufgaben

7.46 Löse folgende quadratische Gleichungen mit *komplexen* Koeffizienten (die Lösungen sind nicht mehr konjugiert komplex!):

a) $x^2 - 3j \cdot x - 2 = 0$ **b)** $x^2 - (1 + j)x + j = 0$ **c)** $x^2 - (1 + 2j)x - 1 + j = 0$

7.47 Ermittle in $\mathbb{C}$ alle Lösungen der folgenden algebraischen Gleichungen:

a) $x^3 - 8 = 0$ **b)** $x^4 - 1 = 0$ **c)** $x^3 + 1 = 0$ **d)** $2x^5 - 8 = 0$

7.48 Löse die folgenden kubischen Gleichungen, bei denen eine Lösung leicht erraten werden kann. Spalte diese Lösung ab und ermittle die restlichen Lösungen.

a) $x^3 - 4x = 0$ **b)** $x^3 + x - 2 = 0$ **c)** $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ **d)** $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

7.5 Komplexe Rechnung in der Elektrotechnik

Wir gehen von der Darstellung einer Sinusschwingung $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ durch einen gleichförmig rotierenden Zeiger aus (siehe Seite 156). Wir sehen nun die Ebene, in der dieser Zeiger rotiert, als Gauß'sche Zahlenebene an.

Diese Betrachtungsweise erweist sich als hilfreich, da für die Behandlung von Sinusschwingungen nun die Rechenoperationen mit komplexen Zahlen genützt werden können. Diese sind einfacher als das Rechnen mit Kreisfunktionen.

Beispiel 7.25 : Komplexe Darstellung einer Sinusschwingung

Gegeben ist eine sinusförmige Schwingung $y = 5 \cdot \sin(2t + 0{,}4)$. Stelle sie als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

Lösung

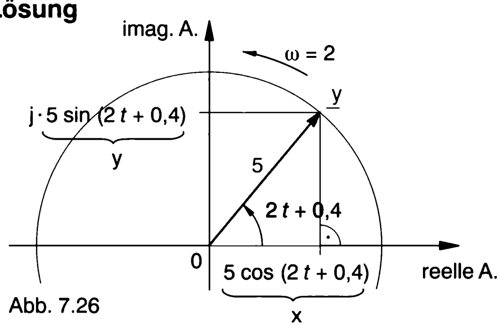


Abb. 7.26

Abb. 7.26 zeigt ein Momentanbild des die Sinusschwingung beschreibenden Zeigers. Den Zeiger (bzw. die zugehörige komplexe Zahl) bezeichnen wir nun mit $\underline{y}$, um Verwechslungen mit dem reellen Zeitwert y zu vermeiden (siehe Anmerkung (4), Seite 187).

Aus Abb. 7.26 liest man die Komponentenform ab:

$\underline{y} = 5 \cdot \cos(2t + 0{,}4) + j \cdot 5 \sin(2t + 0{,}4)$.

Daraus erhält man die Exponentialform: $\underline{y} = 5 \cdot e^{j \cdot (2t + 0{,}4)}$.

Eine weitere Aufspaltung der Exponentialfunktion ergibt schließlich die folgende komplexe Darstellung der Sinusschwingung:

$$\underline{y} = \underbrace{5 \cdot e^{j \cdot 0{,}4}}_{\text{komplexe Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j \cdot 2t}}_{\text{Zeitfaktor}}$$

Eine Multiplikation von komplexen Zahlen bedeutet geometrisch eine Drehstreckung. Die Multiplikation von $A \cdot e^{j \cdot 0{,}4}$ (der "komplexen Amplitude") mit dem Zeitfaktor $e^{j \cdot 2t}$ bedeutet eine reine Drehung um den Winkel $2t$, da der Zeitfaktor den Betrag 1 besitzt. $e^{j \cdot 2t}$ wird daher auch Drehzeiger genannt.

Wir fassen verallgemeinernd zusammen:

reell		**komplex**
$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$\Leftrightarrow$	$\underline{y}(t) = A \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega t}$

Der Zeitwert $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ **ist gleich dem Imaginärteil der komplexen Darstellung** $\underline{y}(t)$: $y = \operatorname{Im} \underline{y}$.

Eine Kosinusfunktion wird über die Beziehung $\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$ in eine Sinusfunktion übergeführt.

Die komplexe Darstellung von Wechselstromgrößen wird in der Elektrotechnik "symbolische Methode" genannt. Sie macht es möglich, dass man statt mit zeitabhängigen sinusförmigen Größen mit *zeitunabhängigen* Größen wie in einem Gleichstromkreis rechnen kann. Voraussetzung dafür sind rein sinusförmige Wechselspannungen und Wechselströme gleicher Frequenz.

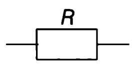
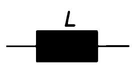
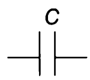
Die sinusförmige Wechselspannung $u = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \beta)$ und der gleichfrequente sinusförmige Wechselstrom $i = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ lauten in komplexer Darstellung:

$\underline{u} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot \beta} \cdot e^{j \cdot \omega t}$ bzw. $\underline{i} = \hat{I} \cdot e^{j \cdot \alpha} \cdot e^{j \cdot \omega t}$. Dabei bedeuten $\hat{U}$, $\hat{I}$ die Scheitelwerte (Amplituden) und β, α die Nullphasenwinkel von Spannung bzw. Strom. Das Verhältnis $\underline{u}$ zu $\underline{i}$ heißt komplexer Widerstand oder Widerstandsoperator $\underline{Z}$:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j \cdot \beta} \cdot e^{j \cdot \omega t}}{\hat{I} \cdot e^{j \cdot \alpha} \cdot e^{j \cdot \omega t}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j \cdot (\beta - \alpha)} = Z \cdot e^{j \cdot \varphi}.$$

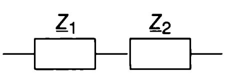
Der Zeitfaktor $e^{j \cdot \varpi t}$ hat sich herausgekürzt: $\underline{Z}$ ist *zeitunabhängig*. $\varphi = \beta - \alpha$ ist die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Der Betrag Z von $\underline{Z}$ heißt Scheinwiderstand oder Impedanz. In Komponentenform lautet der komplexe Widerstand $\underline{Z} = R + jX$; R heißt Wirkwiderstand, X Blindwiderstand. Der Kehrwert des Widerstandsoperators $\underline{Z}$ wird Leitwertoperator $\underline{Y} = G + j \cdot B$ genannt. G heißt Wirkleitwert, B Blindleitwert.

Widerstandsoperatoren und Leitwertoperatoren der Grundschaltelemente im Wechselstromkreis:

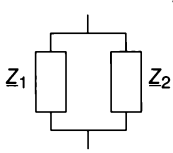
Schaltelement	Schaltsymbol	Widerstandsoperator	Leitwertoperator
Ohm'scher Widerstand R		R	$\frac{1}{R}$
Induktiver Widerstand (Spule) L		$j\omega L = j \cdot X_L$	$-j\frac{1}{\omega L} = j \cdot B_L$
Kapazitiver Widerstand (Kondensator) C		$-j\frac{1}{\omega C} = j \cdot X_C$	$j\omega C = j \cdot B_C$

Dies ergibt sich aus dem physikalischen Verhalten dieser drei Schaltelemente. Damit können die Gleichstromgesetze (Ohm'sches Gesetz, Kirchhoff'sche Regeln, ...) auf Wechselstromkreise übertragen werden. Im Besonderen gilt für den Ersatzwiderstandsoperator $\underline{Z}_s$ bei Serienschaltung bzw. $\underline{Z}_p$ bei Parallelschaltung:

Serienschaltung



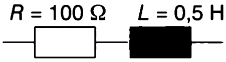
Parallelschaltung



$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \quad \text{oder} \quad \underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Beispiel 7.26 : Berechnung eines Wechselstromwiderstandes



a) Berechne den komplexen Widerstand bei $f = 50$ Hz!

b) Wie groß ist der komplexe Widerstand bei der doppelten Frequenz?

Lösung

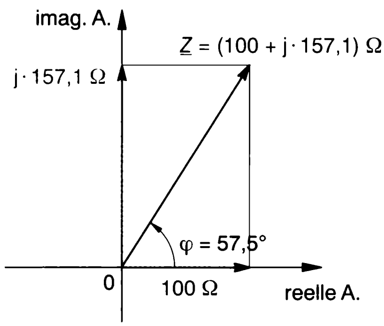


Abb. 7.27

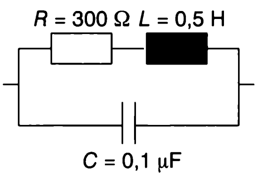
Zu **a)** Bei einer Reihenschaltung addieren sich die Widerstandsoperatoren:

$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = 100\,\Omega + \mathrm{j}\cdot 2\pi\cdot 50\cdot 0{,}5\,\Omega =$
$(100 + \mathrm{j}\cdot 157{,}1)\,\Omega = 186{,}2\,\Omega\cdot e^{\mathrm{j}\cdot 57{,}5°}$.

Damit ist $Z = 186{,}2\,\Omega$. $\varphi = 57{,}5°$ ist die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom (die Spannung eilt gegenüber dem Strom um diesen Winkel voraus).

Zu **b)** $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = 100\,\Omega + \mathrm{j}\cdot 2\pi\cdot 100\cdot 0{,}5\,\Omega =$
$= (100 + \mathrm{j}\cdot 314{,}2)\,\Omega = 329{,}7\,\Omega\cdot e^{\mathrm{j}\cdot 72{,}3°}$.

Beispiel 7.27 : Gemischte Schaltung



a) Berechne den komplexen Widerstand bei $f = 600$ Hz!

b) Für welche Frequenz ist die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom gleich 0?

Die Schaltung stellt einen *Parallelschwingkreis* einer verlustbehafteten Spule mit einem Kondensator dar.

Lösung

Zu **a)** Spule und Ohm'scher Widerstand sind in Serie geschaltet und liegen parallel zu einem Kondensator.

$\underline{Z}_1 = R + \mathrm{j}\cdot\omega L = 300\,\Omega + \mathrm{j}\cdot 2\pi\cdot 600\cdot 0{,}5\,\Omega = (300 + \mathrm{j}\cdot 1885{,}0)\,\Omega = 1908{,}7\,\Omega\cdot e^{\mathrm{j}\cdot 81{,}0°}$;

$\underline{Z}_2 = -\mathrm{j}\cdot\frac{1}{\omega C} = -\mathrm{j}\cdot 2652{,}6\,\Omega = 2652{,}6\cdot e^{-\mathrm{j}\cdot 90°}\,\Omega$;

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1908{,}7\ e^{\mathrm{j}\cdot 81{,}0°}\cdot 2652{,}8\ e^{-\mathrm{j}\cdot 90°}}{824{,}2\ e^{-\mathrm{j}\cdot 68{,}7°}} = 6143{,}1\cdot e^{\mathrm{j}\cdot 59{,}6°}.$$

Der Scheinwiderstand Z beträgt $6143{,}1\ \Omega$, die Phasenverschiebung $\varphi = 59{,}6°$.

Zu **b)** $\varphi = 0$, wenn der Imaginärteil von $\underline{Z}$ gleich 0 ist; dies bedeutet aber auch, dass der Imaginärteil des Leitwertoperators $\underline{Y}$, des Kehrwertes von $\underline{Z}$, gleich 0 ist (überlege dies!). Die allgemeine Berechnung von $\underline{Y}$ ist hier einfacher als jene von $\underline{Z}$:

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\,\omega L} = \mathrm{j}\omega C + \frac{R - \mathrm{j}\,\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\operatorname{Im}\underline{Y} = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0;$$

daraus: $\omega = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C} - \frac{R^2}{L^2}} = 4432\ \mathrm{s}^{-1}$ oder $f = 705$ Hz.

In diesem Fall spricht man von "Parallelresonanz", der Scheinleitwert Y ist (wie gezeigt werden kann) ein Minimum und der Scheinwiderstand Z ein Maximum.

Beispiel 7.28 : Ortskurve des komplexen Widerstands

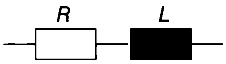


Abb. 7.28

Stelle den komplexen Widerstand $\underline{Z} = R + j\omega L$ in Abb. 7.28 für verschiedene Werte von

a) ω bei $R = 10\ \Omega$, **b)** R (bis 150 Ω) bei $\omega = 100\ s^{-1}$

als Zeiger dar, wenn $L = 0{,}2$ H ist.

Lösung

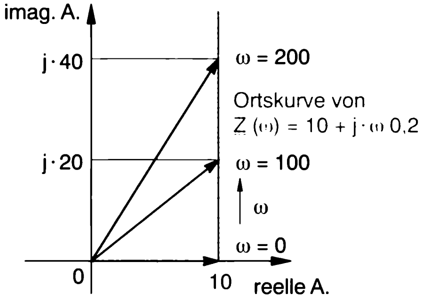


Abb. 7.29

Zu **a)**

Bei veränderlichem ω (und konstantem R) ändert sich nur der Imaginärteil von $\underline{Z}$. Die Spitzen der Zeiger $\underline{Z}$ liegen daher auf einer Halbgeraden für $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$ parallel zur imaginären Achse. Diese Halbgerade wird als **Ortskurve** des Widerstandes $\underline{Z}(\omega)$ bezeichnet.

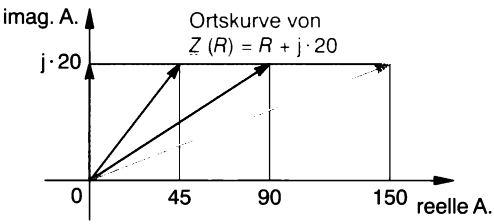


Abb. 7.30

Zu **b)**

Wir nehmen nun an, dass der Ohm'sche Widerstand variabel ist (von 0 bis zu einem Höchstwert 150). Bei konstantem ω ändert sich jetzt nur der Realteil von $\underline{Z}$. Die Spitzen der Zeiger $\underline{Z}$ liegen daher auf einem Geradenstück parallel zur reellen Achse. Es wird als **Ortskurve** des Widerstandes $\underline{Z}(R)$ bezeichnet.

Kennzeichnend für die beiden Ortskurven des Beispiels 7.28 ist, dass eine komplexe Größe $z = x(p) + j \cdot y(p)$ vorliegt, die von einem *reellen* Parameter p (hier ω bzw. R) abhängt. Solche komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen lassen sich in anschaulicher Weise durch **Ortskurven** in der komplexen Ebene darstellen. Liegt die Ortskurve einer komplexen Größe z vor, so kann man Betrag $|z|$ und Winkel φ von z ablesen. In der Wechselstromtechnik werden auf diese Weise besonders Abhängigkeiten von der Betriebsfrequenz ω betrachtet.

Um eine Verwechslung mit der Zeit zu vermeiden, wurde der Parameter hier mit p bezeichnet (statt wie sonst häufig üblich mit t).

Beispiel 7.29 : Gleichung einer einfachen Ortskurve

Ermittle die Gleichung der Ortskurve in Abb. 7.31.

Lösung

Jeder Zeiger der Ortskurve besitzt den Realteil 2. Der Imaginärteil liegt zwischen 0 und 3. Somit:

$$z(p) = 2 + j \cdot p \quad \text{mit} \quad 0 \leq p \leq 3.$$

Dabei sind auch die Randpunkte der Ortskurve noch einbezogen.

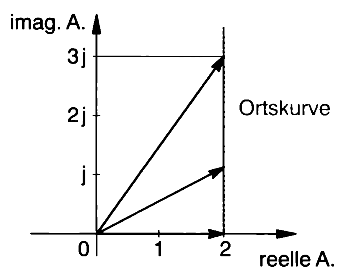


Abb. 7.31

Aufgaben

7.49 Stelle folgende Sinusfunktionen komplex dar und zeichne den zugehörigen Zeiger zur Zeit $t = 0$:

a) $y = \sin t$ **b)** $y = \sin(2t)$ **c)** $y = 2 \cdot \sin t$

d) $y = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ **e)** $y = 3 \cdot \sin(2t + 30°)$ **f)** $y = 5 \cdot \sin(t - 30°)$

g) $y = \cos t$ **h)** $y = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ **i)** $y = 4 \cdot \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$

7.50 Gegeben ist eine Sinusfunktion in komplexer Darstellung. Wie lautet die reelle Darstellung?

a) $\underline{y} = 4 \cdot e^{j \cdot 30°} \cdot e^{j \cdot 2t}$ **b)** $\underline{y} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{j \cdot 2t}$ **c)** $\underline{y} = 3 \cdot e^{j \cdot 2t}$

7.51 In Abb. 7.32 sind Zeigerbilder von Sinusfunktionen zum Zeitpunkt $t = 0$ gezeichnet. Wie lauten die Sinusfunktionen (in reeller Form), wenn $\omega = 4$ ist?

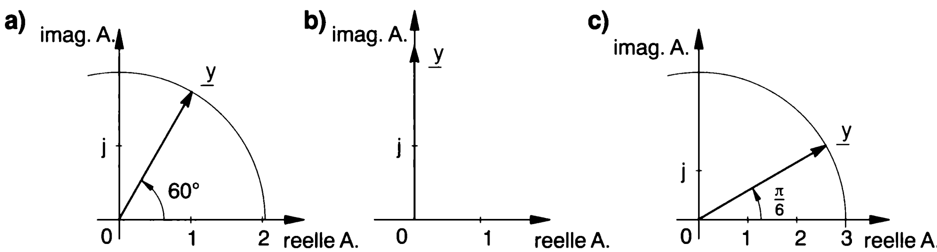
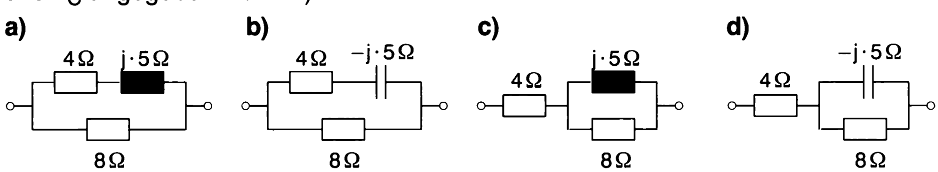
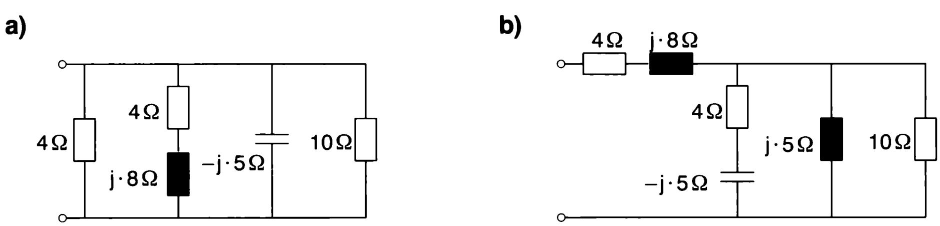


Abb. 7.32

7.52 Bestimme Betrag Z und Winkel φ des komplexen Ersatzwiderstandes $\underline{Z}$ der Schaltungen (die Faktoren j und –j werden in Schaltskizzen auch weggelassen, sodass nur X_L und X_C angegeben werden):



7.53 Ebenso:



7.54 Eine Serienschaltung mit $R = 100\ \Omega$ und $L = 0{,}1$ H hat den Scheinwiderstand $Z = 160{,}6\ \Omega$. Berechne die Phasenverschiebung und die Frequenz.

7.55 Ein 25-μF-Kondensator liegt in Serie mit einem Ohm'schen Widerstand R. Die Phasenverschiebung beträgt $\varphi = -30°$ (d.h. der "Strom eilt der Spannung voraus"). Berechne R bei $f = 50$ Hz.

7.56 Wie groß muss in Abb. 7.33 die Induktivität L sein, damit sich bei $R = 200\ \Omega$, $C = 50\ \mu$F und $f = 50$ Hz für den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ ein Winkel φ von $+45°$ ergibt?

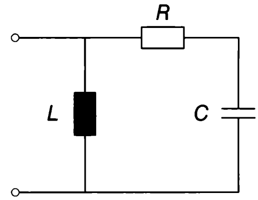


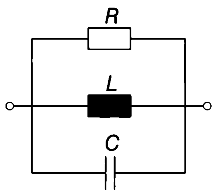
Abb. 7.33

7.57 Bei $f = 600$ Hz hat der komplexe Widerstand $\underline{Z}$ in einer RC-Serienschaltung den Phasenwinkel $\varphi = -50°$. Bestimme diejenige Frequenz f, bei der $\underline{Z}$ den doppelten Betrag hat. Bei welcher Frequenz ist der Betrag von $\underline{Z}$ am kleinsten?

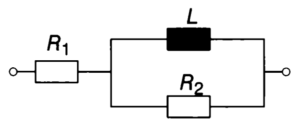
7.58 Bestimme für eine RLC-Serienschaltung mit $R = 150\ \Omega$, $L = 0{,}4$ H und $C = 50\ \mu$F jene Frequenz ("Resonanzfrequenz"), bei der Scheinwiderstand $\underline{Z}$ minimal ist.

7.59 Ermittle allgemein den komplexen Widerstand von

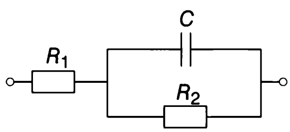
a)



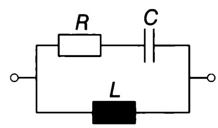
b)



c)

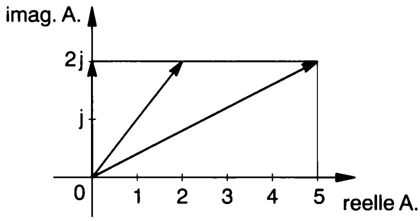


d)

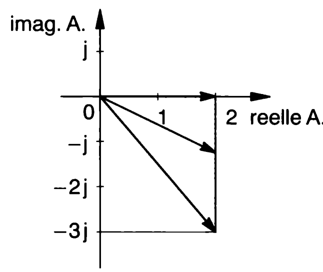


7.60 Wie lauten die Gleichungen der Ortskurven?

a)



b)



7.61 Ermittle über eine Wertetabelle die Ortskurve des komplexen Leitwerts $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ von

a) Beispiel 7.28 a) **b)** Beispiel 7.28 b) auf Seite 216.

Im Überblick: Komplexe Zahlen

$z = a + bj$ (mit Realteil a und Imaginärteil b) heißt eine **komplexe Zahl**; j heißt **imaginäre Einheit**: $j^2 = -1$.

Gleichheit komplexer Zahlen: $a + bj = c + dj$ genau dann, wenn $a = c \wedge b = d$.

Die beiden Zahlen $z = a + bj$ und $z^* = a - bj$ heißen **konjugiert komplex**.

In der **Gauß'schen Zahlenebene** (auch **komplexe Ebene** genannt) kann jede komplexe Zahl als **Zeiger** geometrisch dargestellt werden.

Betrag und **Winkel** einer komplexen Zahl $z = a + bj$:

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}$.

Schreibweisen komplexer Zahlen:

$$\underbrace{a + bj}_{\text{Komponentenform}} = \underbrace{\underset{\text{trigonometrische Form}}{r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)} = \underset{\text{Exponentialform}}{r \cdot e^{j \cdot \varphi}} = \underset{\text{Versorform}}{r \cdot \underline{/\varphi}}}_{\text{Polarformen}}$$

Addition (Subtraktion): Die Realteile bzw. Imaginärteile werden addiert (subtrahiert). Geometrisch: Vektoraddition (Vektorsubtraktion).

Multiplikation: In der Komponentenform wie die Multiplikation von Binomen unter Berücksichtigung von $j^2 = -1$.
In der Polarform Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel.
Geometrisch: Drehstreckung; Multiplikation mit j bedeutet eine Drehung um +90°.
$z \cdot z^* = a^2 + b^2 = |z|^2$, wenn $z = a + bj$.

Division: In der Komponentenform wird mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert.
In der Polarform Division der Beträge und Subtraktion der Winkel.
Geometrisch bedeutet eine Division durch j eine Drehung um −90°. $\frac{1}{j} = -j$.

Rechnen mit Beträgen: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$

Potenzieren: Eine komplexe Zahl wird in die n-te Potenz ($n \in \mathbb{N}^*$) erhoben, indem man ihren Betrag r in die n-te Potenz erhebt und ihren Winkel φ mit n multipliziert.

w heißt **n–te Wurzel** einer komplexen Zahl z, wenn $w^n = z$.

n-te Wurzeln aus $r \cdot e^{j \cdot \varphi}$: $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j \cdot \varphi_k}$ mit $\varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Fundamentalsatz der Algebra: Jede algebraische Gleichung n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen (wobei "zusammenfallende" Lösungen mehrfach zu zählen sind).

Komplexe Darstellung einer Sinusschwingung:

$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ $\Rightarrow$ $\underline{y} = A \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega t}$; geometrisch: Zeiger von $A \cdot e^{j \cdot \varphi}$.

8 Vektorrechnung

In diesem Kapitel wird die Vektorrechnung weiter ausgebaut. Dazu gehört besonders die Einführung eines Produktes zwischen Vektoren. Es folgt die Behandlung der Vektoren im dreidimensionalen Raum.

8.1 Skalarprodukt zweier Vektoren

Im ersten Beispiel werden einige wichtige Themen der Vektorrechnung aus "Ingenieur-Mathematik 1" wiederholt.

Beispiel 8.1 : Wiederholungsaufgaben

a) Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD durch A (5/2), B (9/4), C (7/6). Wie lauten die Koordinaten von D?

b) Gegeben ist die Strecke AB durch A (2/7) und B (7/5). Ermittle ihre Länge.

c) Verdoppelt man die Strecke AB von b) über B hinaus, so erhält man den Punkt C. Wie lauten seine Koordinaten?

d) Verlängert man die Strecke AB von Aufgabe b) über B hinaus um 6 Längeneinheiten, so erhält man den Punkt D. Wie lauten seine Koordinaten?

e) Von einem Vektor $\vec{a}$ kennt man den Betrag $a = |\vec{a}| = 5$ und die Koordinate $a_x = 3$. Berechne die zweite Koordinate a_y.

f) Ein Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ soll in Richtung der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ zerlegt werden. Wie lautet die Zerlegung?

Lösung

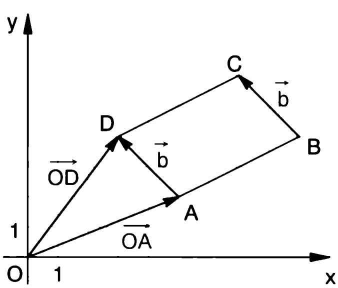


Abb. 8.1

Zu **a)**

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ... Ortsvektor von A, $\overrightarrow{OD}$ ... Ortsvektor von D;

$\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-9 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ... "Spitze minus Schaft"-Regel;

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Somit: D (3/4).

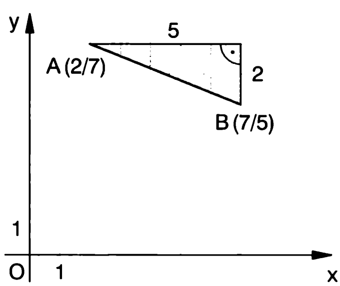


Abb. 8.2

Zu **b)**

Dem markierten rechtwinkligen Dreieck ist zu entnehmen:

$\overline{AB}^2 = 5^2 + 2^2 = 29$; $\overline{AB} = \sqrt{29} = 5{,}39$.

Oder als Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

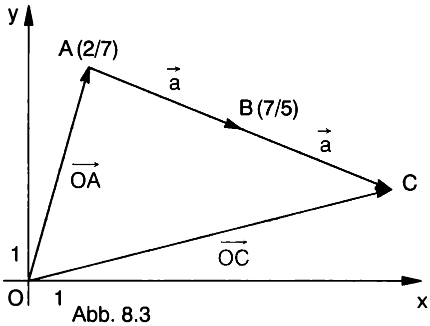


Abb. 8.3

Zu **c)**

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit: C (12/3).

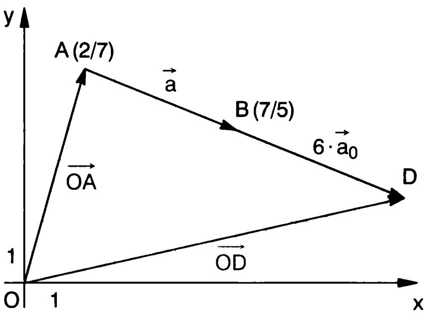


Abb. 8.4

Zu **d)**

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + 6 \cdot \vec{a}_0$, wobei $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist.

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}, \quad \vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,57 \\ 2,77 \end{pmatrix}.$$

Somit: D (12,57/2,77).

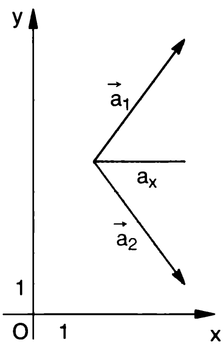


Abb. 8.5

Zu **e)**

Es gibt zwei Lösungen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$, die sich durch entgegengesetzt gleiche zweite Koordinaten unterscheiden.

$$\begin{aligned} a = |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + a_y^2} &= 5 \quad | \text{ quadrieren} \\ 9 + a_y^2 &= 25 \\ a_y^2 &= 16 \\ a_y &= \pm 4 \end{aligned}$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

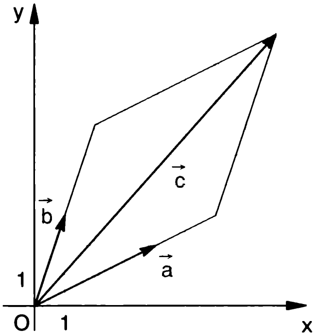


Abb. 8.6

Zu **f)**

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}; \quad k_1 = ? \quad k_2 = ?$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = k_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k_1 + k_2 \\ 2k_1 + 3k_2 \end{pmatrix}.$$

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie koordinatenweise übereinstimmen:

I: $8 = 4k_1 + k_2$
II: $9 = 2k_1 + 3k_2$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für k_1 und k_2.
Man erhält $k_1 = \frac{3}{2}$ und $k_2 = 2$. Somit: $\vec{c} = \frac{3}{2} \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$.

Komponentendarstellung eines Vektors

Die Vektoren $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sind Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen. Damit kann ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ sofort in Richtung der beiden Koordinatenachsen zerlegt werden:

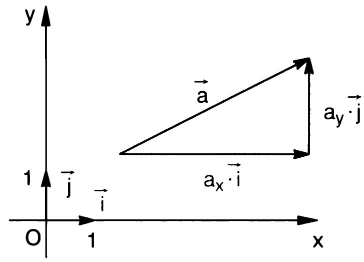


Abb. 8.7 Komponentendarstellung eines Vektors

Komponentendarstellung eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix} = a_x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Die Vektoren $a_x \cdot \vec{i}$ und $a_y \cdot \vec{j}$ werden als *Vektorkomponenten,* die Größen a_x und a_y – wie schon erwähnt – als *Vektorkoordinaten* oder *skalare Komponenten* von $\vec{a}$ bezeichnet.

Skalarprodukt zweier Vektoren

Vektoren können wir mit einer Zahl multiplizieren (z.B. $3 \cdot \vec{a}$) und wir können zwei Vektoren addieren (oder subtrahieren). Als neue Operation führen wir nun eine Multiplikation zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist allerdings kein Vektor, sondern ein Skalar (eine reelle Zahl); aus diesem Grund wird es Skalarprodukt genannt.

Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$,

wobei φ der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$ ist.

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird auch *inneres Produkt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt.
Beachte, dass φ stets der kleinere der beiden Winkel ist, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bei gleichem Fußpunkt miteinander bilden.

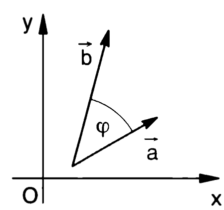


Abb. 8.8 Winkel φ beim Skalarprodukt

(Physikalische) Arbeit als Skalarprodukt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

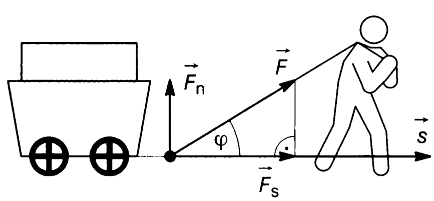


Abb. 8.9 Arbeit W als Skalarprodukt von Kraft und Weg

Die physikalische Arbeit W ist bekanntlich gleich dem Produkt aus der Kraft F_s *in Wegrichtung* mal dem Verschiebungsweg s: $W = F_s \cdot s$.
Die normal zu $\vec{s}$ wirkende Kraft $\vec{F}_n$ verrichtet keine Arbeit!
Aus dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 8.9 entnimmt man: $F_s = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi$; damit kann man schreiben:

$$W = F_s \cdot s = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Rechengesetze für Skalarprodukte

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	Kommutativgesetz
(2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	Distributivgesetz
(3) $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$	Gültig für eine beliebige Zahl λ

(1) und (3) folgen aus der Definition des Skalarproduktes. Auf die Begründung von (2) wird nicht eingegangen.

Besondere Skalarprodukte

a) Normal aufeinander stehende Vektoren.

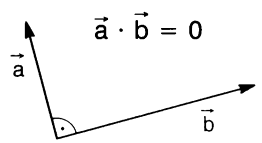


Abb. 8.10 Skalarprodukt normal aufeinander stehender Vektoren

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Nullvektoren, so ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 0$ *nur* dann, wenn $\cos \varphi = 0$ oder $\varphi = 90°$, die Vektoren also normal (orthogonal) aufeinander stehen:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\vec{a}, \vec{b} \neq 0)}$$

Speziell gilt: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$.

b) Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit sich selbst.

Für $\vec{a} \cdot \vec{a}$ schreibt man kurz $\vec{a}^2$.

$$\boxed{\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2}$$

Speziell gilt: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$.

Koordinatenform des Skalarprodukts

Wie bestimmt man das Skalarprodukt zweier Vektoren, die in Koordinatenform gegeben sind? Wir gehen von der Komponentendarstellung der Vektoren aus und benützen, dass $\vec{i}$ und $\vec{j}$ normal aufeinander stehende Einheitsvektoren sind:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}) =$$
$$= a_x b_x \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_{=1} + a_x b_y \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{=0} + a_y b_x \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}_{=0} + a_y b_y \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_{=1} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y}$$

Damit gibt es zwei verschiedene Darstellungen des Skalarprodukts.

Beispiel 8.2 : Skalarprodukt

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

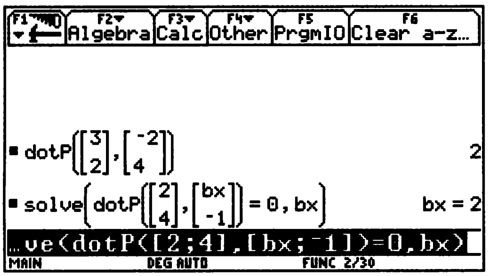
b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ -1 \end{pmatrix}$; berechne b_x so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lösung

Zu **a)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 2.$

Zu **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot b_x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_x = 2.$

Voyage 200



Mit dem Befehl dotP (im Menü MATH/Matrix/Vector ops oder schneller durch Eintippen) kann das Skalarprodukt zweier Vektoren gebildet werden.

Normalvektor

Oft braucht man einen zu einem Vektor $\vec{a}$ normalen Vektor. In Abb. 8.11 sind die *beiden* zu $\vec{a}$ normalen Vektoren $\vec{n}$ und $-\vec{n}$ mit gleicher Länge wie $\vec{a}$ gezeichnet. Es gilt:

> $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ist jener **Normalvektor** zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, der die gleiche Länge wie $\vec{a}$ hat und aus diesem durch Linksdrehung (Drehung im positiven Sinn) hervorgeht.
>
> Mit $\vec{n}$ ist auch $-\vec{n}$ Normalvektor zu $\vec{a}$; er geht durch Rechtsdrehung aus $\vec{a}$ hervor.

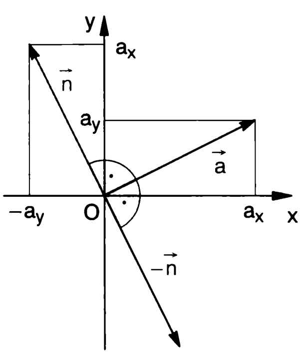


Abb. 8.11 Normalvektor(en)

$\vec{n}$ bzw. $-\vec{n}$ erhält man also durch Vertauschen der Koordinaten von $\vec{a}$ und Wechsel des Vorzeichens bei einer der beiden Koordinaten.

Warum haben $\vec{a}$ und $\vec{n}$ gleiche Länge? Bilde zur Beantwortung $|\vec{a}|$ und $|\vec{n}|$.

Zum Nachweis, dass $\vec{a} \perp \vec{n}$ brauchen wir nur zu zeigen, dass ihr Skalarprodukt gleich 0 ist:

$\vec{a} \cdot \vec{n} = a_x \cdot (-a_y) + a_y \cdot a_x = 0.$

Beispiel 8.3 : Zeichnen eines Quadrats

Gegeben ist die Strecke AB mit A(2/1) und B(5/2). Errichte über der Strecke AB ein Quadrat ABCD. Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte C und D?

Lösung

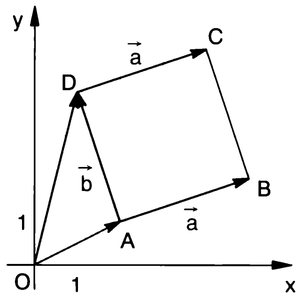


Abb. 8.12

$\vec{b}$ ist jener Normalvektor zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, der aus $\vec{a}$ durch Linksdrehung hervorgeht; daher $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, daher D(1/4).

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, daher C(4/5).

Winkel zwischen zwei Vektoren

Eine häufige Aufgabe der Vektorrechnung ist die Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren. Aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi =$ folgt:

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Dabei rechnet man $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ sowie $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$; also

$$\cos\varphi = \frac{a_x\,b_x + a_y\,b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Beispiel 8.4 : Winkel zwischen zwei Vektoren

a) Welche Winkel schließt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den beiden Koordinatenachsen ein?

b) Berechne die Winkel im Dreieck ABC, wenn A(1/1), B(6/2), C(−1/4).

Lösung

Zu **a)**

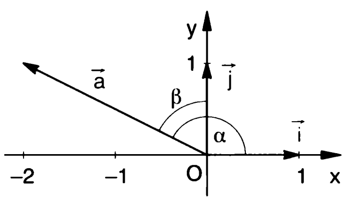


Abb. 8.13

Die gesuchten Winkel α und β (Abb 7.16, $\vec{a}$ ist als Ortsvektor gezeichnet) sind gerade die Winkel, die der Vektor $\vec{a}$ mit $\vec{i}$ bzw. $\vec{j}$ einschließt.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot 1} = \frac{-2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot 1} = \frac{-2 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Daraus: $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 153{,}4°$, $\quad \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63{,}4°$.

Zu **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

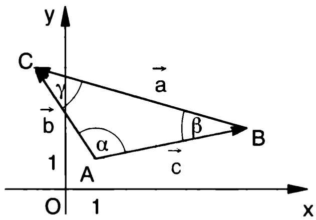


Abb. 8.14

Wir berechnen zunächst die Beträge dieser Vektoren:

$|\vec{a}| = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{53}$; $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} =$
$= \sqrt{13}$; $|\vec{c}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-2 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -0{,}38 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 112{,}4°;$$

Zu beachten ist nun, dass β der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $-\vec{c}$ ist!

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot (-\vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-7 \cdot (-5) + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{26}} = 0{,}889 \quad \Rightarrow \quad \beta = 27{,}3°;$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-7 \cdot (-2) + 2 \cdot 3}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{13}} = 0{,}762 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 40{,}4°.$$

Kontrolle: $\alpha + \beta + \gamma = 112{,}4° + 27{,}3° + 40{,}4° = 180{,}1°$ (die Abweichung von 180° beruht auf Ungenauigkeiten, die bei der Rundung der Winkel entstanden sind).

Im Überblick: Skalarprodukt zweier Vektoren (in der Ebene) ●

Komponentendarstellung eines Vektors:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$, wobei $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen sind;

$a_x \cdot \vec{i}$, $a_y \cdot \vec{j}$ ... *Vektorenkomponenten* von $\vec{a}$ in Richtung der Koordinatenachsen,
a_x, a_y ... *Vektorkoordinaten* oder *skalare Komponenten*.

Definition des **Skalarprodukts** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, wobei φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ ist.

Koordinatenform des Skalarproduktes: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

Bedingung für **normal aufeinander stehende Vektoren:**

$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\vec{a}, \vec{b} \neq 0)$

Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit sich selbst: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ist jener **Normalvektor** zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, der gleichen Betrag wie $\vec{a}$ hat und aus diesem durch Linksdrehung (Drehung im positiven Sinn) hervorgeht.

Aufgaben

8.1 Ermittle den Einheitsvektor in Richtung

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8.2 Zerlege den Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Richtung der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8.3 Gegeben ist ein Dreieck ABC, wobei $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren der Punkte A, B bzw. C sind. Zeige, dass der Ortsvektor des Schwerpunktes S gegeben ist durch:

$\vec{x}_S = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Hinweis: Der Schwerpunkt teilt eine Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1.

8.4 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne das Skalarprodukt folgender Vektoren:

a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **b)** $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ **c)** $\vec{a} + 2\vec{b}$ und $\vec{a} - 3\vec{b}$

8.5 Ermittle den Vektor, der aus dem folgenden Vektor durch Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn hervorgeht:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.6 Von einem Rhombus (einer Raute) ABCD sind bekannt: A(0/0), B(5/1), C(6/y_3), D(x_4/y_4). Bestimme die fehlenden Koordinaten (2 Lösungen!) sowie den Winkel α!

8.7 Gegeben ist das Parallelogramm ABCD durch A(1/2), B(6/1) und C(5/4). Ermittle den (spitzen) Winkel zwischen seinen Diagonalen.

8.8 Auf der Geraden durch A(1/5) und B(3/4) ist über B hinaus eine Strecke der Länge 3 abzutragen. Wie lauten die Koordinaten des Endpunktes C?

8.9 Über der Strecke AB mit A(0/1) und B(5/2) wird in B normal zu AB eine Strecke der Länge 2 aufgetragen. Berechne die Koordinaten des so erhaltenen Punktes C (2 Lösungen).

8.10 Ermittle jenen Vektor, der normal auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ steht, den Betrag 4 und eine positive x-Koordinate hat.

8.11 Beweise den Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos\varphi$ mit Hilfe der Vektorrechnung. Dazu drückt man den Seitenvektor $\vec{c}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus (Abb. 8.15) und bildet $\vec{c} \cdot \vec{c}$.

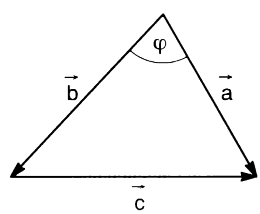


Abb. 8.15

8.2 Geraden in der Ebene

Für die Beschreibung von Geraden in der Ebene und besonders im Raum ist eine Parameterdarstellung in Vektorform (oder auch in Koordinatenform) praktisch. Es wird nun an die Ausführungen über die Parameterdarstellung von Geraden auf Seite 169 ff. angeschlossen.

Beispiel 8.5 : Punkte auf einer Geraden

Liegen die Punkte P (2/3) oder Q (3/5) auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$?

Lösung

Ein Punkt liegt genau dann auf einer Geraden, wenn sein Ortsvektor bzw. seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen. Es ist also zu prüfen, ob für P ein Parameterwert λ gefunden werden kann, mit dem die Geradengleichung erfüllt ist.

$$P: \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2 = 1 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1; \\ 3 = 2 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1. \end{array}$$

D.h. für $\lambda = 1$ erfüllen die Koordinaten von P die Parameterdarstellung, P liegt auf g.

$$Q: \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 3 = 1 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2; \\ 5 = 2 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3. \end{array}$$

D.h. es gibt keinen Wert für λ, für den die Koordinaten von Q die Parameterdarstellung erfüllen. Q liegt nicht auf g.

Beispiel 8.6 : Schnittpunkt zweier Geraden in Parameterdarstellung

Ermittle den Schnittpunkt der Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Lösung

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ... Richtungsvektoren von g_1 und g_2. Da es kein k gibt, sodass $\vec{a}_1 = k \cdot \vec{a}_2$, also der eine Richtungsvektor ein Vielfaches des anderen ist, sind die Geraden nicht parallel und besitzen daher einen Schnittpunkt S. Der Schnittpunkt liegt auf beiden Geraden, sein Ortsvektor muss daher beide Geradengleichungen erfüllen:

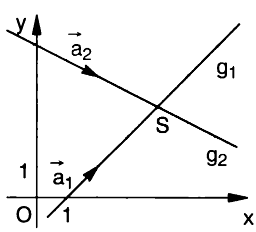


Abb. 8.16

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1+\lambda\\\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\mu\\5-\mu\end{pmatrix}.$$

Daraus folgen die beiden Koordinatengleichungen, die ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung des λ-Wertes und des μ-Wertes des Schnittpunktes S sind:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 1 + \lambda = 2\mu \\ \text{II:} & \lambda = 5 - \mu \end{array}$$

Setzt man für λ aus II in I ein, so erhält man $\mu = 2$. Damit weiter $\lambda = 3$.

Einsetzen von λ in die Parameterdarstellung von g_1 oder μ in jene von g_2 liefert den Ortsvektor des Schnittpunktes S: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. Daher: S (4/3).

Es genügt, einen der beiden Parameterwerte λ oder μ des Schnittpunktes zu bestimmen.

Beispiel 8.7 : Winkelsymmetrale

a) Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (0/1), B (6/1) und C (5/6). Ermittle die Gleichung der Winkelsymmetralen des Winkels α.

b) Bestimme den Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

Lösung

Zu **a)**

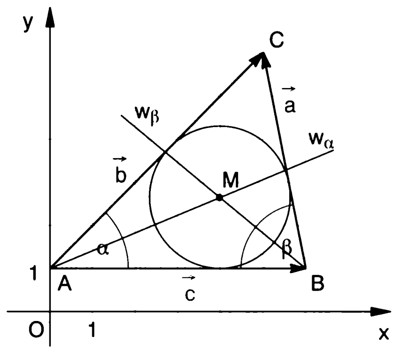


Abb. 8.17

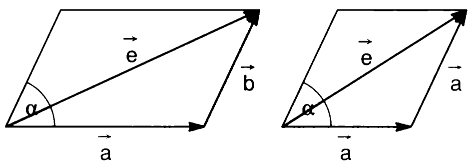


Abb. 8.18

Ein Richtungsvektor $\vec{u}$ der Winkelsymmetralen w_α ist die Summe zweier *gleichlanger* Vektoren in Richtung der Seitenvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Dass man $\vec{u}$ nicht als Summe der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nehmen kann, zeigt die Abb. 8.18: In einem allgemeinen Parallelogramm halbiert die Diagonale nicht den Winkel α. Nur wenn das Parallelogramm eine Raute ist, trifft dies zu!

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AB} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Einheitsvektoren in Richtung $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$\vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{5^2+5^2}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

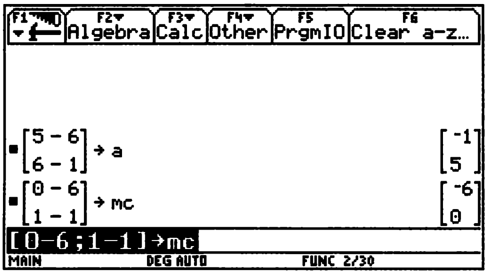
$$\vec{u} = \vec{b}_0 + \vec{c}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

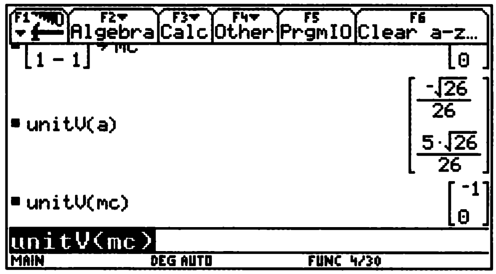
Mit $\vec{u}$ ist auch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Winkelsymmetralen des Winkels α. Damit lautet eine Parameterdarstellung in Vektorform:

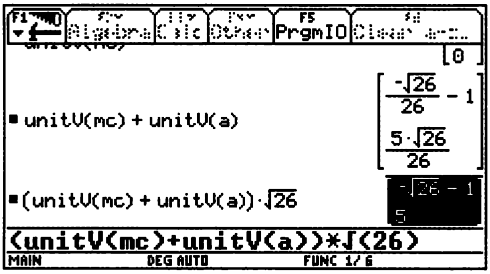
$$w_\alpha: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2{,}414 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu **b)** Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Winkelsymmetralen. Als zweite Winkelsymmetrale soll jene des Winkels β berechnet werden. Ein Richtungsvektor ist die Summe der Einheitsvektoren in Richtung $\vec{a}$ und $-\vec{c}$.

Voyage 200







`Mit dem Befehl unitV (im Menü MATH/Matrix/Vector ops oder schneller durch Eintippen) berechnet man einen Einheitsvektor. So erhält man mit unitV(a) + unitV(mc) einen Richtungsvektor von` w_β, `den man noch mit` $\sqrt{26}$ `multiplizieren kann.`

Damit lautet eine Parameterdarstellung der Winkelsymmetralen w_β in Vektorform:

$$w_\beta\!: \ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1-\sqrt{26} \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6{,}099 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Schnittpunkt M:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2{,}414 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6{,}099 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ll} \text{I:} & 2{,}414 \cdot \lambda = 6 + \mu \cdot (-6{,}099) \\ \text{II:} & 1 + \lambda \quad = 1 + 5 \cdot \mu \end{array}.$$

Aus II folgt $\lambda = 5 \cdot \mu$. Einsetzen in I ergibt $\mu = 0{,}330$; weiters: $\lambda = 1{,}651$.

Einsetzen in die Gleichung von (beispielsweise) w_α ergibt die Koordinaten des Inkreismittelpunktes: $x = 3{,}99$ und $y = 2{,}65$.

Beispiel 8.8 : Normalvektor zu einer Geraden

a) Gegeben ist die Gerade mit der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ (allgemeine Form einer Geradengleichung). Gib einen Normalvektor zur Geraden an!

b) Wie lautet ein Normalvektor zur Geraden $y = -\frac{2}{3} \cdot x + 2$?

Lösung

Zu **a)** Wir formen um auf die Normalform (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 175):

$$ax + by = c \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{-\tfrac{a}{b}}_{=k}x + \tfrac{c}{b} \quad (b \neq 0).$$

Der Abb. 8.19 entnehmen wir, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Geraden g ist.

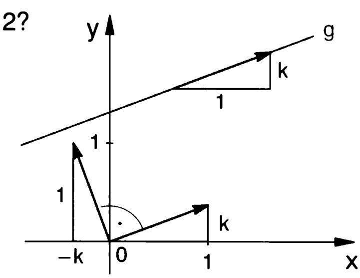


Abb. 8.19

Folglich ist $\begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalvektor zu g. Wir multiplizieren mit b und erhalten einen weiteren Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Die Koeffizienten a und b in der Geradengleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ sind also die x- und die y-Koordinate eines Normalvektors der Geraden! Da $a \cdot x + b \cdot y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot \vec{x}$, kann die Geradengleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ auch als sogenannte **Normalvektorform** $\vec{n} \cdot \vec{x} = c$ geschrieben werden.

Wir setzten voraus, dass $b \neq 0$. Existiert die Normalvektorform auch für den Fall $b = 0$?

$ax + 0 \cdot y = c \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{c}{a}$. Die Gerade ist eine Parallele zur x-Achse.

$ax + 0 \cdot y = c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$. Der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ steht normal auf der x-Achse, daher ist er auch ein Normalvektor zu g.

Es kann somit jede Geradengleichung in der Normalvektorform notiert werden.

Zu **b)** Aus $y = -\frac{2}{3} \cdot x + 2$ folgt nach Multiplikation mit 3:
$2 \cdot x + 3 \cdot y = 6$.

Wegen $a = 2$ und $b = 3$ folgt, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Normalvektor der Geraden ist.

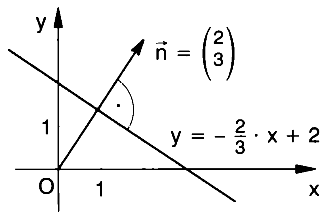


Abb. 8.20

Wir halten fest:

> Die Koeffizienten a und b in der Geradengleichung in allgemeiner Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ sind die Koordinaten eines Normalvektors $\vec{n}$ der Geraden: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
> Daraus folgt die **Normalvektorform der Geradengleichung**: $\vec{n} \cdot \vec{x} = c$.

Beispiel 8.9 : Abstand eines Punktes von einer Geraden

a) Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimme den Normalabstand des Punktes P (5/4) von der Geraden.

b) Ermittle den Fußpunkt F des Lotes von P auf g.

Lösung

Zu **a)** A ist ein beliebiger Punkt der Geraden g. Ein Richtungsvektor von g ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dem rechtwinkligen Dreieck AFP in Abb. 8.21 entnimmt man: $d(P,g) = \overline{AP} \cdot \sin \varphi$.

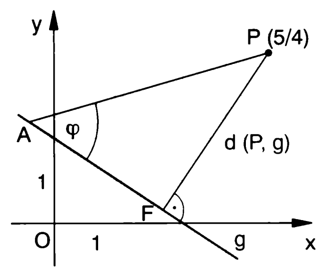


Abb. 8.21

Es ist damit der Abstand $\overline{AP}$ (= Länge des Vektors $\overrightarrow{AP}$) sowie der Winkel φ zwischen der Strecke AP und der Geraden g zu ermitteln. Für A nimmt am einfachsten jenen mit x = 0, also A(0/2).

$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$;

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{377}} \quad\Rightarrow\quad \varphi = 55{,}5°;$$

$d(P, g) = \sqrt{29}\cdot\sin 55{,}5° = 4{,}44$.

Zu **b)** F ist der Schnittpunkt von g mit der Normalen h auf g durch P. Ein Richtungsvektor von h ist Normalvektor von g: $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Damit lautet eine Parameterdarstellung von

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Beachte, dass nun für den Parameter eine andere Bezeichnung zu wählen ist als bei der Parameterdarstellung von g.

Schnittpunkt F von g mit h: $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}3\lambda\\2-2\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+2\mu\\4+3\mu\end{pmatrix}$;

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 3\lambda - 2\mu = 5 \\ \text{II:}\quad & -2\lambda - 3\mu = 2 \end{aligned}$$

Daraus: $\lambda = 0{,}846$; $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0{,}846\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}54\\0{,}31\end{pmatrix}$, also: F(2,54/0,31).

Abstand d(P,g) eines Punktes P von einer Geraden g (auch im Raum gültig):

$d(P,g) = \overline{AP}\cdot\sin\varphi$,

wobei A ein beliebiger Punkt der Geraden g und φ der Winkel zwischen g und $\overrightarrow{AP}$ ist.

Im Überblick: Skalarprodukt zweier Vektoren (in der Ebene)

$\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor der Geraden $a\cdot x + b\cdot y = c$. Damit kann die Geradengleichung in der **Normalvektorform** $\vec{n}\cdot\vec{x} = c$ geschrieben werden.

Abstand d(P,g) eines Punkte P von einer Geraden g (auch im Raum gültig):

$d(P,g) = \overline{AP}\cdot\sin\varphi$,

wobei A ein beliebiger Punkt der Geraden g und φ der Winkel zwischen g und $\overrightarrow{AP}$ ist.

Aufgaben

8.12 Gegeben sind die Punkte P (7/4), Q (5/2), R (4/3). Stelle fest, ob sie auf der Geraden liegen:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

8.13 Gegeben ist die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

a) Stelle fest, ob die Punkte Q (4/4) und R (8/5) auf der Geraden liegen.

b) Stelle die Gerade in der Normalform $y = k \cdot x + d$ dar.

8.14 Ermittle gegebenenfalls den Schnittpunkt der Geraden:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

8.15 Berechne den Schnittwinkel φ ($0 \leqslant \varphi \leqslant 90°$) zwischen den Geraden:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

c) $y = x + 1$ und $y = \frac{1}{2}x + 2$ **d)** $y = \frac{x}{2}$ und $y = -x + 2$

8.16 Wandle in die Normalvektorform um:

a) $2x + 3y - 1 = 0$ **b)** $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 5$ **c)** $y = \frac{1-2x}{5}$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ **e)** $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

8.17 Ermittle den Abstand eines Punktes P von der Geraden g:

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, P (3/5) **b)** g: $y = -\frac{x}{2} + 1$, P (5/5) **c)** g: $2x - 3y = 6$; P (– 4/1)

8.18 Bestimme den Abstand der parallelen Geraden:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ **b)** $2x + 3y = 6$ und $y = -\frac{2}{3}x$

8.19 Gegeben ist die Gerade g durch A (1/4) und B (3/2). Zusätzlich ist der Punkt P (2/5) gegeben.

a) Bestimme die zu g parallele Gerade durch P! **b)** Welchen Abstand hat P von g?

8.20 Gegeben sind die beiden Punkte A(0/4) und B(5/1).

a) Wie lautet die Gleichung jener Geraden g, die normal auf AB steht und durch den Punkt C(3/4) verläuft?

b) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes F von g mit AB und danach die Länge $\overline{CF}$.

c) Überprüfe diesen Wert durch unmittelbares Bestimmen des Normalabstandes des Punktes C von AB.

8.21 Gegeben ist das Dreieck ABC durch A(0/0), B(5/1) und C(3/5). Wie lautet die Gleichung der Winkelsymmetralen des Winkels α?

8.22 Gegeben ist die Strecke AB durch A(0/0) und B(5/1). Wie lautet die Gleichung der Streckensymmetralen von AB?

Hinweis: Überlege zuerst einen Punkt dieser Geraden und dann einen Richtungsvektor!

8.23 Ermittle die Länge der Höhe h auf die Seite c sowie ihren Fußpunkt im Dreieck ABC:

a) A(1/2), B(7/1), C(4/7) **b)** A(2/2), B(7/0), C(0/8) **c)** A(−1/3), B(4/2), C(7/5)

8.24 Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD durch A(5/2), B(9/4) und C(7/6). Berechne seine beiden Höhen!

8.25 A(0/2) und C(5/5) sind zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Quadrats. Wie lauten die beiden anderen Punkte des Quadrats?

8.26 Über der Strecke AB mit A(0/1) und B(5/2) ist ein gleichseitiges Dreieck zu errichten. Wie lautet der dritte Eckpunkt C des Dreiecks (2 Lösungen!)?

8.27 Ermittle im Dreieck ABC mit A(0/0), B(5/1), C(3/5)

a) den Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt von zwei Winkelsymmetralen,

b) den Schwerpunkt als Schnittpunkt von zwei Schwerlinien,

c) den Höhenschnittpunkt als Schnittpunkt von zwei Höhen,

d) den Umkreismittelpunkt als Schnittpunkt von zwei Seitensymmetralen.

e) In einem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Umkreismittelpunkt auf einer Geraden ("Euler'sche Gerade"). Zeige dies!

8.28 Zeige für das Dreieck A(1/2), B(6/1), C(8/6), dass der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Umkreismittelpunkt auf einer Geraden liegen.

8.3 Vektoren im Raum

Analog wie bei einer Zahlenspalte aus zwei Zahlen kann man beispielsweise die Zahlenspalte $\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ als Anweisung betrachten, im Raum einen Punkt 5 Einheiten in x-Richtung, 2 Einheiten in y-Richtung und 4 Einheiten in z-Richtung zu verschieben. Man spricht dann von einem Verschiebungsvektor im Raum. Diese Zahlenspalte kann aber auch als Ortsvektor des Punktes P (5/2/4) im Raum gesehen werden.

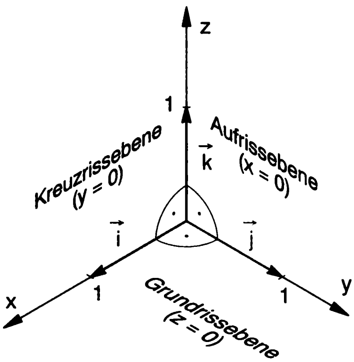


Abb. 8.22 Festlegung eines räumlichen Koordinatensystems

Alle für zweidimensionale Vektoren bestehenden Definitionen und Rechenregeln behalten ihre Gültigkeit auch für dreidimensionale Vektoren. Graphisch dargestellt werden letztere durch Pfeile im Raum, dem ein *rechtshändiges* kartesisches Koordinatensystem nach Abb. 8.22 zugrunde liegt. Die drei jeweils normal aufeinander stehenden Einheitsvektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ folgen in diesem wie die ersten drei Finger der rechten Hand. Die Vektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ werden auch als **Basisvektoren** bezeichnet.

Im Ursprung des Koordinatensystems schneiden sich drei Koordinatenebenen:

Grundrissebene (Punkte mit z = 0), Aufrissebene (Punkte mit x = 0), Kreuzrissebene (Punkte mit y = 0).

Komponentendarstellung eines dreidimensionalen Vektors

$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$. a_x, a_y und a_z werden wieder als *Vektorkoordinaten* oder als *skalare Komponenten* von $\vec{a}$ bezeichnet; $a_x \cdot \vec{i}$, $a_y \cdot \vec{j}$ und $a_z \cdot \vec{k}$ heißen die *Vektorkomponenten* von $\vec{a}$ in Richtung der drei Koordinatenachsen.

In Abb. 8.23 ist der Vektor $\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ als Ortsvektor $\vec{r}\,(P) = \overrightarrow{OP}$ des Punktes P (2/4/3), in Abb. 8.24 als Verschiebungsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, dargestellt als Pfeil von A (1/1/1) nach B (3/5/4). Sind umgekehrt die Punkte A und B gegeben, so gelangt man durch die "Spitze minus Schaft"-Regel zu den Koordinaten des Vektors AB.

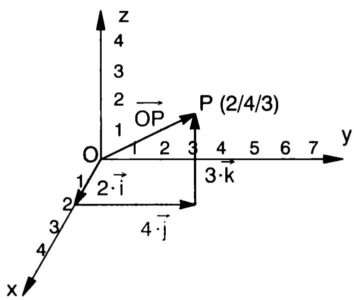


Abb. 8.23 Ortsvektor

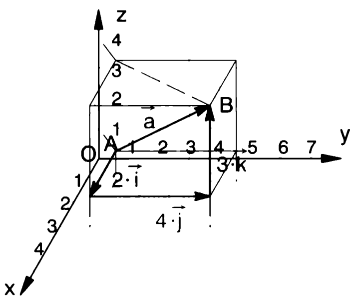


Abb. 8.24 Verschiebungsvektor

Beispiel 8.10 : Grundaufgaben mit räumlichen Vektoren

a) Berechne den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und normiere den Vektor, d.h. bestimme den Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung von $\vec{a}$.

b) Der Vektor $\vec{a}$ wird vom Punkt P (3/2/1) abgetragen. Welche Koordinaten besitzt der Endpunkt Q?

c) Gibt es einen Vektor $\vec{b}$ mit gleicher Richtung wie $\vec{a}$, der in x-Richtung die Koordinate 4 besitzt?

d) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ in Aufgabe b)?

e) Bestimme einen Vektor $\vec{c}$, der parallel zur (x,y)-Ebene ist und normal zu $\vec{a}$ steht.

Lösung

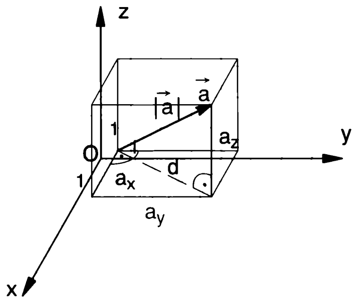


Abb. 8.25

Zu **a)** Der Betrag von $\vec{a}$ lässt sich nach Abb. 8.25 mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes berechnen:

$$d^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$a^2 = |\vec{a}|^2 = d^2 + a_z^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Damit ist $a = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29} = 5{,}39$.

Wie bei zweidimensionalen Vektoren ist der Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung $\vec{a}$:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}743 \\ 0{,}557 \end{pmatrix}.$$

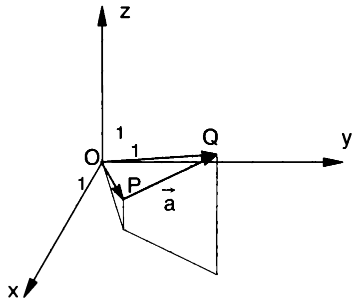


Abb. 8.26

Zu **b)** Nach Abb. 8.26 ist:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit: Q (5/6/4).

Zu **c)** $\vec{b}$ besitzt gleiche Richtung wie $\vec{a}$, wenn $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Die Vektorgleichung $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist genau dann

erfüllt, wenn $4 = \lambda \cdot 2 \ \wedge\ b_y = \lambda \cdot 4 \ \wedge\ b_z = \lambda \cdot 3$.

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda = 2$. Damit ist $b_y = 8$ und $b_z = 6$. Also: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Zu d) Der Winkel berechnet sich wie bei zweidimensionalen Vektoren mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix} = 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 4 = 31;$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}; \quad |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{77};$$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|} = \frac{31}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}} = 0{,}944 \quad\Rightarrow\quad \varphi = \arccos 0{,}944 = 19{,}2°.$$

Zu e) Soll $\vec{c}$ parallel zur (x,y)-Ebene liegen, so muss $c_z = 0$ sein. $\vec{c}$ und $\vec{a}$ stehen genau dann normal aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist.

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = 2\cdot c_x + 4\cdot c_y + 3\cdot 0 = 0$$

Daraus folgt $c_x = -2\cdot c_y$ als Bedingung. So sind $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ oder $\vec{c}_2 = -\vec{c}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ mögliche Normalvektoren; alle anderen Normalvektoren besitzen gleiche Richtung wie $\vec{c}_1$ oder $\vec{c}_2$.

Beispiel 8.11 : Winkel zwischen Vektoren

Gegeben ist ein Quader mit folgenden Maßzahlen für die Seitenkanten: a = 3, b = 5 und c = 3 (Längeneinheit etwa dm). Berechne die Winkel, den die Raumdiagonale d des Quaders mit den Seitenkanten sowie mit der Grundfläche einschließt.

Lösung

Wir legen den Quader wie in Abb. 8.27. Dann sind die Winkel zwischen der Raumdiagonale d und den Seitenkanten die Winkel zwischen d und den drei Koordinatenachsen.

Mit $\vec{d} = \begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$ als Vektor der Raumdiagonale bzw. Grundflächendiagonale erhält man:

$$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{43} \quad \text{und}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{34};$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{d}\cdot\vec{i}}{|\vec{d}|\cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{43}} = 0{,}457 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 62{,}8°;$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{d}\cdot\vec{j}}{|\vec{d}|\cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{43}} = 0{,}762 \quad\Rightarrow\quad \beta = 40{,}3°;$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{d}\cdot\vec{k}}{|\vec{d}|\cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{43}} = 0{,}457 \quad\Rightarrow\quad \gamma = 62{,}8°;$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{d}\cdot\vec{u}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{34}{\sqrt{43}\cdot\sqrt{34}} = 0{,}889 \quad\Rightarrow\quad \varphi = 27{,}2°.$$

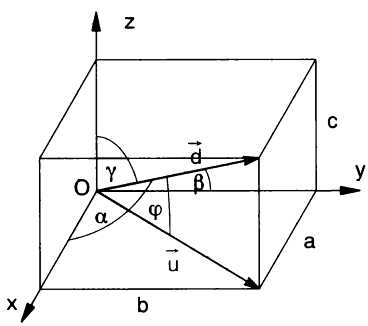


Abb. 8.27

Im Überblick: Vektoren im Raum

Betrag $\lvert\vec{a}\rvert$ von $\vec{a}$: $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ $\vec{a}_0 = \frac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}\vec{a}$ ist wie in der Ebene der Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$.
Komponentendarstellung eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, wobei $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen eines rechtshändigen Systems sind; $a_x \cdot \vec{i}$, $a_y \cdot \vec{j}$, $a_z \cdot \vec{k}$ ... *Vektorkomponenten* in Richtung der drei Koordinatenachsen, a_x, a_y, a_z ... *Vektorkoordinaten* oder *skalare Komponenten*.
Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Ebene oder Raum): $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\varphi$, wobei φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ ist.
Koordinatenform des Skalarproduktes: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Bedingung für **normal aufeinander stehende Vektoren** (Ebene oder Raum): $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$
Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ (Ebene oder Raum): $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$

Aufgaben

8.29 Bestimme die Ortsvektoren aller 8 Eckpunkte des Quaders in Abb. 8.28.

8.30 Normiere folgende Vektoren, d.h. bestimme jeweils den Einheitsvektor gleicher Richtung:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.31 Welche Koordinaten besitzt der Punkt P, der die Strecke zwischen den Punkten A (−2/2/3) und B (4/4/5) halbiert?

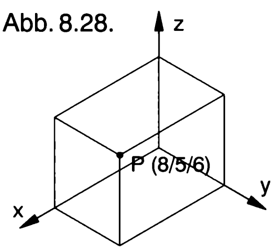


Abb. 8.28

8.32 Die Strecke AB mit A (1/1/1) und B (2/5/4) ist über B hinaus **a)** zu verdoppeln, **b)** um 3 Einheiten zu verlängern. Wie lauten die Koordinaten des so erhaltenen Punktes?

8.33 Gegeben ist eine Strecke AB und ein Punkt P. Trage die Länge d von P aus parallel zu AB beidseitig ab. Wie lauten die Endpunkte dieser Strecke?

a) A (4/1/1), B (2/4/2), P (4/6/5), d = 5 **b)** A (3/1/8), B (1/5/5), P (5/6/0), d = 3

8.34 Gegeben ist ein Dreieck ABC. Berechne die Koordinaten seines Schwerpunktes!

a) A (5/1/2), B (2/5/1), C (1/6/0) **b)** A (2/2/8), B (2/6/7), C (2/1/3)

Hinweis: Siehe Aufgabe 8.3, Seite 227.

8.35 Bestimme das Skalarprodukt folgender Vektoren:

a) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{i}, \vec{j}$

8.36 Bestimme die Winkel α, β und γ, die der Vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ mit den drei Koordinatenachsen einschließt.

8.37 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Berechne den Winkel zwischen folgenden Vektoren:

a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **b)** $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ **c)** $-\vec{a} + 2\vec{b}$ und $3\vec{a} - 2\vec{b}$

8.38 Welchen Winkel schließen die beiden folgenden Vektoren miteinander ein?

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ **b)** $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$

8.39 Zeige, dass die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}$ ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

8.40 Ein Vektor mit dem Betrag 5 schließt mit der x-Achse den Winkel $\alpha = 50°$ und mit der y-Achse den Winkel $\beta = 130°$ ein. Wie lauten seine Koordinaten (2 Lösungen)?

8.41 Zerlege den Vektor $\vec{v}$ in Richtung der Vektoren $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ und $\vec{c} = \vec{j} + 4\vec{k}$ in Komponenten: **a)** $\vec{v} = \vec{i} + 7\vec{j} + 10\vec{k}$ **b)** $\vec{v} = 5\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}$

8.42 Ein Vektor $\vec{a}$ liegt in der (x, y)-Ebene und bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel von 52°. Ein Vektor $\vec{b}$ liegt in der (x, z)-Ebene und bildet mit der positiven z-Achse den Winkel 20°. Wie groß ist der Winkel zwischen beiden Vektoren?

8.43 Ortsvektoren werden in den Anwendungen oft mit $\vec{r}$ bezeichnet. Ein schiefer Wurf wird beschrieben durch $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 20\,\mathrm{ms}^{-1} \cdot t \\ 20\,\mathrm{ms}^{-1} \cdot t \\ 45\,\mathrm{ms}^{-1} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{bmatrix}$ ($g \approx 10\,\mathrm{ms}^{-2}$ Fallbeschleunigung, t Zeit in s nach dem Abwurf im Koordinatenursprung). Gib die Koordinaten des Punktes an, in dem der Körper wieder auf dem Boden auftrifft (z = 0 m), sowie des höchsten Punktes der Wurfbahn.

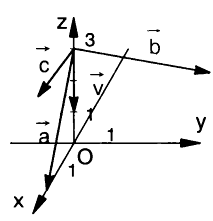


Abb. 8.29

8.44 Zerlege den Vektor $\vec{v} = -2\vec{k}$ in Richtung der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ der Abb. 8.29.

8.45 **a)** Welche Arbeit verrichtet die Kraft $\vec{F} = (310\,\vec{i} + 240\,\vec{j} - 350\,\vec{k})$ N, die einen Körper längs des Weges $\vec{s} = (-4\,\vec{i} + 15\,\vec{j} + 3\,\vec{k})$ m verschiebt?

b) Welche Arbeit verrichtet die Kraft $\vec{F} = (-10\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 8\,\vec{k})$ N, die einen Körper von A (1 m/−4 m/2 m) nach B (1 m/2 m/6 m) verschiebt?

8.46 Von zwei Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ sind Betrag und Richtung bekannt. Bestimme Betrag und Richtung der Resultierenden $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, wenn $F_1 = 100$ N, $\alpha_1 = 80°$, $\beta_1 = 120°$, $\gamma_1 \leqslant 90°$ und $F_2 = 130$ N, $\alpha_2 = 60°$, $\beta_2 = 40°$, $\gamma_2 \geqslant 90°$ sind.

8.4 Vektorprodukt zweier Vektoren

Neben dem Skalarprodukt wird in den Anwendungen ein weiteres Produkt benötigt, bei dem jedoch aus zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein *Vektor* erzeugt wird. Aus diesem Grund wird dieses Produkt nun als *Vektorprodukt* bezeichnet.

> Unter dem **Vektorprodukt** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ("a kreuz b") zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den Vektor mit folgenden Eigenschaften (Abb. 8.30):
>
> (1) $\vec{c}$ ist normal sowohl zu $\vec{a}$ wie auch zu $\vec{b}$;
>
> (2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, wobei φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel mit $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$ ist;
>
> (3) die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System.

Geometrische Deutung

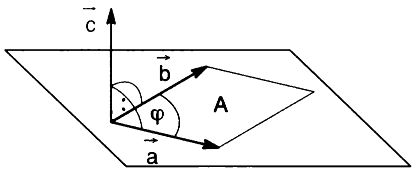


Abb. 8.30 Zur Definition des Vektorprodukts

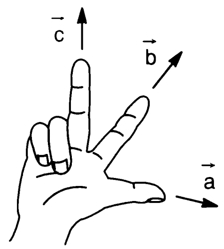


Abb. 8.31 Rechte-Hand-Regel

Der Betrag $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ ist aufgrund der trigonometrischen Flächenformel (Seite 138) gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms (Abb. 8.30). Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden dann ein rechtshändiges System, wenn sie der Rechte-Hand-Regel (Abb. 8.31) folgen: Der Daumen weist in Richtung von $\vec{a}$, der Zeigefinger in Richtung von $\vec{b}$ und der Mittelfinger in Richtung von $\vec{c}$. Das Vektorprodukt wird auch als *äußeres Produkt* oder als *Kreuzprodukt* bezeichnet.

Drehmoment als Vektorprodukt $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$:

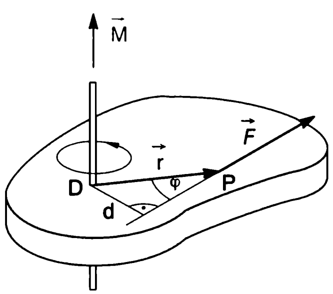


Abb. 8.32 Drehmoment als Vektorprodukt

An einem starren Körper greift (Abb. 8.32) eine Kraft $\vec{F}$ an, die in der Drehebene liegend angenommen wird. Sie erzeugt ein Drehmoment $\vec{M}$, dessen Betrag gleich dem Produkt aus dem Betrag F der Kraft und dem Normalabstand d ihrer Wirkungslinie vom Drehpunkt D ist: $M = d \cdot F$. Mit r als Abstand des Angriffspunktes P der Kraft vom Drehpunkt D gilt: $d = r \cdot \sin \varphi$; daher $M = r \cdot F \cdot \sin \varphi$.

Vektoriell: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, womit man $\vec{M}$ eine Richtung in der Drehachse zuschreibt.

Auch weitere physikalische Größen wie der Drehimpuls oder die Kraft auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld sind als Vektorprodukt darstellbar.

Rechengesetze für Vektorprodukte

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	"Antikommutativgesetz"
(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	Distributivgesetz
(3) $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$	Gültig für eine beliebige Zahl λ

(1) und (3) folgen aus der Definition des Vektorprodukts. (1) besagt, dass bei Vertauschung der Faktoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Produktvektor $\vec{c}$ entgegengesetzte Richtung bekommt! Auf die Herleitung von (2) wird nicht eingegangen.

Das Vektorprodukt kollinearer Vektoren

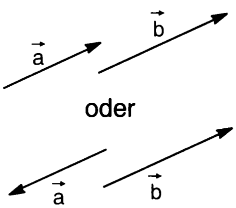


Abb. 8.33 Kollineare Vektoren

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Nullvektoren, so ist $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = 0$ *nur* dann, wenn $\sin\varphi = 0$ und somit $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 180°$ ist: die Vektoren haben gleiche oder entgegengesetzte Richtung, sie sind **kollinear** (Abb. 8.33).

$$\boxed{\vec{a} \text{ kollinear } \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}$$

Sonderfall: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Für die Basisvektoren gelten die wichtigen Beziehungen (überlege):

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

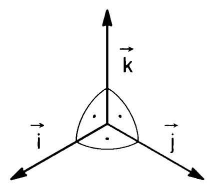


Abb. 8.34

Koordinatenform des Vektorprodukts

Auch für Vektorprodukt gibt es eine Koordinatendarstellung. Unter Verwendung der angeführten Rechenregeln für Vektorprodukte und der obenstehenden Beziehungen für die Basisvektoren lässt sich nach einiger Rechnung herleiten:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}}$$

Merkregeln zur Berechnung eines Vektorprodukts:

(1) Ist $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, so ist $c_x = a_y b_z - a_z b_y$. c_y erhält man aus c_x bzw. c_z aus c_y durch zyklische (kreisförmige) Vertauschung nach Abb. 8.35: $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$.

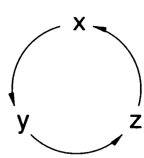


Abb. 8.35

(2) Symbolisch lässt sich ein Vektorprodukt durch eine dreireihige Determinante darstellen und danach mit der Sarrus'schen Regel berechnen (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 256):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Beispiel 8.12 : Berechnung eines Vektorprodukts

$\vec a = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec b = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\vec a \times \vec b = ?$

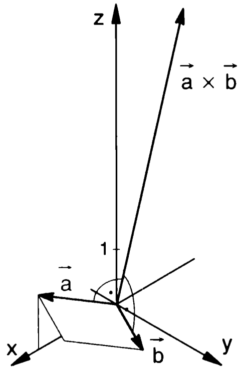


Abb. 8.36

Lösung

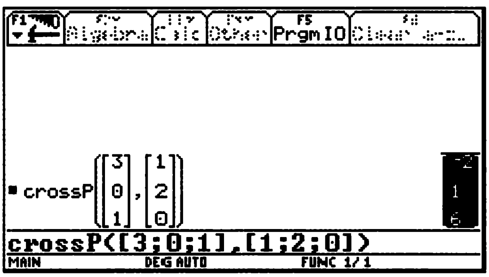
$$\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix}0\cdot 0 - 1\cdot 2\\ 1\cdot 1 - 3\cdot 0\\ 3\cdot 2 - 0\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}.$$

Einfacher ist die symbolische Berechnung über eine dreireihige Determinante:

$$\vec a \times \vec b = \left|\begin{matrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{matrix}\right| \begin{matrix}\vec i & \vec j\\ 3 & 0\\ 1 & 2\end{matrix} = -2\vec i + \vec j + 6\vec k = \begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}.$$

$$\vec 0 \quad 2\vec i \quad \vec 0 \quad \vec 0 \quad \vec j \quad 6\vec k$$

Voyage 200



Mit dem Befehl crossP (im Menü MATH/Matrix/Vector ops oder schneller durch Eintippen) kann das Vektorprodukt zweier Vektoren gebildet werden.

Beispiel 8.13 : Einfaches Fachwerk

Ein Fachwerk ist eine Tragkonstruktion (Dachbinder, Krangerüst, Brücke), das aus unbeweglichen Stäben zusammengesetzt ist. In Abb. 8.37 ist ein einfaches Fachwerk gegeben, das auf zwei Punkten A und B aufliegt. Bestimme die sogenannten Auflagerkräfte $\vec F_A$ und $\vec F_B$.

Lösung

Das Fachwerk ist im Punkt A und im Punkt B so weit fixiert, dass eine Bewegung in y-Richtung verhindert wird. Im Punkt A wird *zusätzlich* eine Bewegung in x-Richtung verhindert. Dies wird insgesamt durch die Stützkräfte ("Auflagerkräfte") $\vec F_A$ und $\vec F_B$ erreicht, wobei für die Stützkraft $\vec F_B$ eine verschwindende x-Komponenten angenommen werden kann.

In Abb. 8.37 sind die x- und die y-Achse eingezeichnet. Die z-Achse ist normal zur (x, y)-Ebene auf den Beobachter gerichtet zu denken.

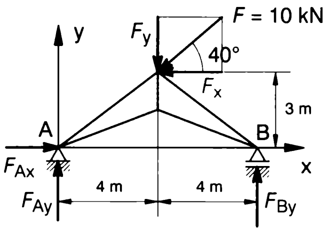


Abb. 8.37

Ein starrer Körper, auf den Kräfte wirken, bleibt in Ruhe, wenn keine resultierende Kraft und kein resultierendes Drehmoment auf ihn wirken. Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

(1) $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$,

(2) $\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$.

(1) $\vec{F}_A + \vec{F} + \vec{F}_B = \vec{0}$; da $F_x = -10\text{ kN}\cdot\cos 40°$ und $F_y = -10\text{ kN}\cdot\sin 40°$, folgt:

$$\begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0\text{ kN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10\cdot\cos 40° \\ -10\cdot\sin 40° \\ 0 \end{pmatrix}\text{kN} + \begin{pmatrix} 0\text{ kN} \\ F_{By} \\ 0\text{ kN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{kN}.$$

(2) Die Summe aller Momente (siehe Seite 240) um einen beliebigen Bezugspunkt ist gleich $\vec{0}$. Als Bezugspunkt wählen wir aus praktischen Gründen den Punkt A, da dann die Momente der Stützkräfte $\vec{F}_{Ax}$ und $\vec{F}_{Ay}$ gleich 0 sind. In A liegt auch der Ursprung des Koordinatensystems.

$(\vec{r}\times\vec{F}) + (\vec{r}_B\times\vec{F}_B) = \vec{0}$.

Aus Abb. 8.38 entnimmt man die Ortsvektoren der Angriffspunkte der Kräfte. Damit ergibt sich:

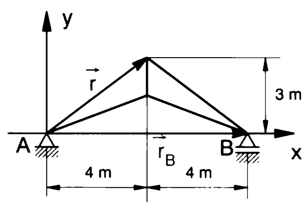


Abb. 8.38

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10\cdot\cos 40° \\ -10\cdot\sin 40° \\ 0 \end{pmatrix}\text{kNm} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix}\text{kNm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{kNm}.$$

Die Berechnung der Vektorprodukte gibt erwartungsgemäß nicht verschwindende Komponenten in z-Richtung. Man erhält:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,73 \end{pmatrix}\text{kNm} + \begin{pmatrix} 0\text{ kN} \\ 0\text{ kN} \\ 8\cdot F_{By} \end{pmatrix}\text{m} = \begin{pmatrix} 0\text{ kNm} \\ 0\text{ kNm} \\ -2,73\text{ kNm} + 8\text{ m}\cdot F_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{kNm}.$$

Schreibt man nun die beiden Vektorgleichungen als Koordinatengleichungen (natürlich unter Weglassung der Gleichungen mit lauter Nullen), so erhält man ein lineares Gleichungssystem für die 3 Unbekannten F_{Ax}, F_{Ay} und F_{By}:

I: $F_{Ax} - 7{,}66\text{ kN} = 0\text{ kN}$

II: $F_{Ay} + F_{By} - 6{,}43\text{ kN} = 0\text{ kN}$

III: $-2{,}73\text{ kNm} + 8\text{ m}\cdot F_{By} = 0\text{ kNm}$

Daraus: $F_{Ax} = 7{,}7\text{ kN}$; $F_{By} = 0{,}3\text{ kN}$ und $F_{Ay} = 6{,}1\text{ kN}$.

Die Beträge der Auflagerkräfte sind: $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = 9{,}8\text{ kN}$ und $F_B = 0{,}3\text{ kN}$.

Im Überblick: Vektorprodukt zweier Vektoren

Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

(1) $\vec{c}$ ist normal sowohl zu $\vec{a}$ wie auch zu $\vec{b}$;

(2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, wobei φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ ist;

(3) die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System.

Koordinatenform des Vektorproduktes:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$ symbolische Berechnung mit Hilfe der Sarrus'schen Regel.

Bedingung für **kollineare Vektoren** $\vec{a}$, $\vec{b}$ (Vektoren gleicher oder entgegengesetzter Richtung):

$\vec{a}$ kollinear $\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$

Aufgaben

8.47 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Berechne das Vektorprodukt folgender Vektoren:

a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **b)** $\vec{a}$ und $2\vec{a}$ **c)** $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$

8.48 Berechne das Vektorprodukt der beiden folgenden Vektoren: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$.

8.49 Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$. Gesucht ist der Vektor $\vec{b}$, der normal auf $\vec{a}$ steht, parallel zur (x,y)-Ebene liegt und den halben Betrag von $\vec{a}$ hat.

8.50 Durch die drei Punkte ABC ist im Raum ein Parallelogramm ABCD gegeben. Bestimme den Winkel α sowie mit Hilfe des Vektorprodukts den Flächeninhalt:

a) A(1/1/1), B(4/5/2), C(2/8/3) **b)** A(5/1/2), B(2/5/1), C(1/6/0)

8.51 Ein sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegendes Elektron (Elementarladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) erfährt in einem Magnetfeld der Kraftflussdichte $\vec{B}$ die sog. Lorentzkraft $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$. Bestimme $\vec{F}$, wenn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2000 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$.

8.52 Ermittle die Stützkräfte $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ und deren Beträge des Trägers in

a) Abb. 8.39, **b)** Abb. 8.40, **c)** Abb. 8.41.

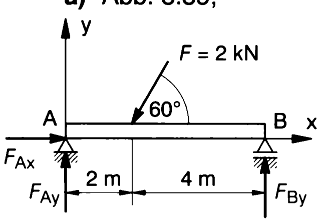


Abb. 8.39

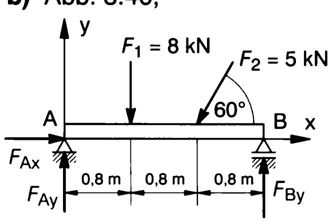


Abb. 8.40

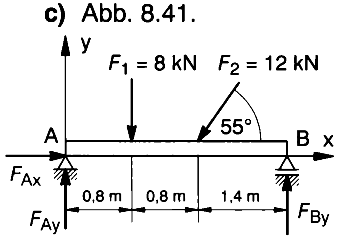


Abb. 8.41

8.53 Ermittle die Stützkräfte $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ und deren Beträge des Fachwerks in
a) Abb. 8.42, **b)** Abb. 8.43, **c)** Abb. 8.44.

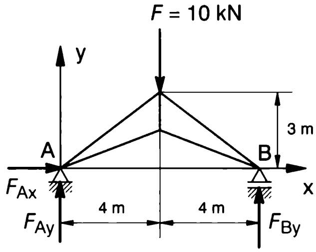


Abb. 8.42

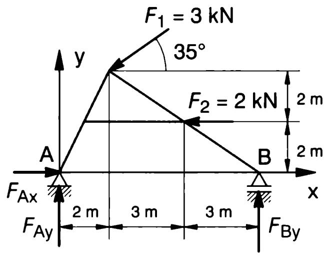


Abb. 8.43

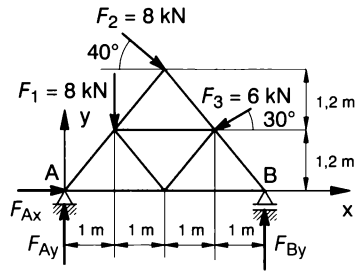


Abb. 8.44

8.5 Gerade und Ebene im Raum

Wie in der Ebene erhält man den Ortsvektor $\vec{x}$ eines Geradenpunktes P im Raum, indem man zum Ortsvektor $\vec{x}_1$ eines *beliebigen* Geradenpunktes P_1 ein bestimmtes Vielfaches λ (= Parameter) eines Richtungsvektors $\vec{a}$ addiert: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$.

Beispiel 8.14 : Parameterdarstellung einer Geraden im Raum

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die Parameterdarstellung einer Geraden (Abb. 8.45) im Raum.

a) Ermittle die Schnittpunkte Q und R ("Spurpunkte") der Geraden mit der Grundrissebene (Punkte mit z = 0) und der Aufrissebene (Punkte mit x = 0).

b) Liegt der Punkt A(1/7/5) auf der Geraden?

Lösung

Zu **a)** Aus $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 5+\lambda \\ 3+\lambda \end{pmatrix}$ folgt $\begin{matrix} x = 3-\lambda \\ y = 5+\lambda, \\ z = 3+\lambda \end{matrix}$ die

Parameterdarstellung in Koordinatenform.

Schnitt mit der Grundrissebene:

$z = 3 + \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -3$;

daraus: $x = 3 - \lambda = 6$; $y = 5 + \lambda = 2$;

d.h. Q(6/2/0).

Schnitt mit der Aufrissebene:

$x = 3 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 3$; daraus:

$y = 5 + \lambda = 8$; $z = 3 + \lambda = 6$; d.h. R(0/8/6).

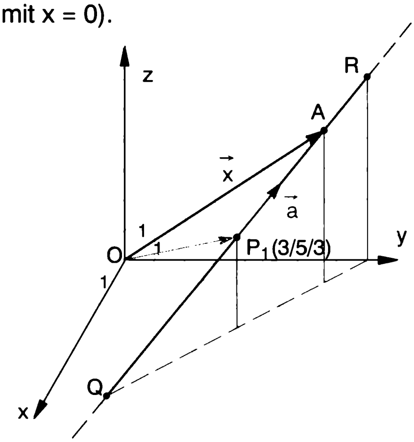


Abb. 8.45

Zu **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} 1 = 3 - \lambda \;\Rightarrow\; \lambda = 2 \\ 7 = 5 + \lambda \;\Rightarrow\; \lambda = 2 \\ 5 = 3 + \lambda \;\Rightarrow\; \lambda = 2 \end{matrix}$

D.h. für $\lambda = 2$ erfüllen die Koordinaten von A die Parameterdarstellung, A liegt auf der Geraden.

Beispiel 8.15 : Gerade durch zwei Punkte

Ermittle eine Parameterdarstellung der Geraden durch die Punkte A (6/4/4) und B (8/8/6).

Lösung

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8-6 \\ 8-4 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $\mu = 2 \cdot \lambda$, so kann man auch die folgende Parameterdarstellung der gesuchten Geraden angeben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 8.16 : Abstand eines Punktes von einer Geraden

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme den (Normal-)Abstand des Punktes P (1/5/4) von der Geraden.

Lösung

Wie in der Ebene lautet die Abstandsformel $d(P,g) = \overline{AP} \cdot \sin\varphi$, wobei A ein beliebiger Punkt der Geraden und φ der Winkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{AP}$ und der Geraden ist. Wir wählen beispielsweise den Geradenpunkt mit $\lambda = 0$, also A (1/0/3).

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 5-0 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{AP} = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{26};$$

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{14}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 42{,}8°; \quad d(P,g) = \sqrt{26} \cdot \sin\varphi = 3{,}46.$$

Parameterdarstellung einer Ebene im Raum

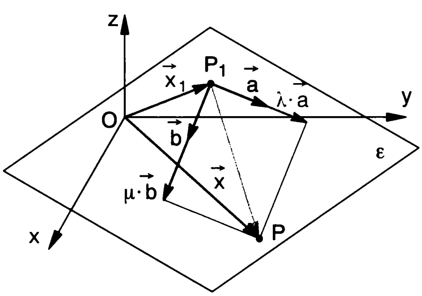


Abb. 8.46 Parameterdarstellung einer Ebene

Abb. 8.46 zeigt die Vorgangsweise bei einer Parameterdarstellung einer Ebene ε. Der Ortsvektor $\vec{x}$ eines beliebigen Punktes P der Ebene ist die Summe des Ortsvektors $\vec{x}_1$ eines fest gewählten Punktes P_1 der Ebene mit einem Vektor $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$ "in" der Ebene.

Parameterdarstellung einer Ebene (in Vektorform): $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

$\vec{x}$ ...... Ortsvektor eines beliebigen Punktes P der Ebene

$\vec{x}_1$ ..... Ortsvektor irgendeines "festen" Punktes P_1 der Ebene

λ, μ ... Parameter von P; $\vec{a}$, $\vec{b}$ .. Vektoren, die die Ebene "aufspannen" $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \neq k \cdot \vec{b}$

Anmerkung: Die Pfeile für $\vec{b}$ und $k \cdot \vec{b}$ sind parallel und spannen folglich keinen Ebene auf. Daher die Bedingung $\vec{a} \neq k \cdot \vec{b}$.

Beispiel 8.17 : Parameterform der Ebene im Raum

Gegeben ist die Gleichung einer Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Stelle fest, ob der Punkt A(3/1/−3) in der Ebene liegt.

b) Die Ebenengleichung ist parameterfrei darzustellen.

Lösung

Zu **a)** Ein Punkt liegt genau dann in einer Ebene, wenn sein Ortsvektor bzw. seine Koordinaten die Ebenengleichung erfüllen. Es ist also festzustellen, ob für den Punkt A je ein Parameterwert λ und μ gefunden werden kann, mit denen die Gleichung erfüllt ist.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3 &= 1 - \lambda \\ 1 &= 1 - \mu \\ -3 &= 1 + 3\lambda + 2\mu \end{aligned}$$

Man erhält ein lineares Gleichungssystem für λ und μ. Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda = -2$, aus der zweiten $\mu = 0$; diese Werte erfüllen jedoch nicht die dritte Gleichung: $-3 = 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0$ oder $-3 = -5$. D.h. das Gleichungssystem ist unlösbar, es gibt keine Parameterwerte λ und μ für den Punkt A: A liegt nicht in der Ebene.

Zu **b)** Wir führen die Parameterdarstellung in Vektorform in ihre Koordinatenform über:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 1 - \mu \\ 1 + 3\lambda + 2\mu \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 - \lambda \\ y &= 1 - \mu \\ z &= 1 + 3\lambda + 2\mu \end{aligned}$$

Man erhält drei Gleichungen für x, y und z, aus denen die Parameter λ und μ eliminiert werden können: Aus der ersten und zweiten Gleichung folgt $\lambda = 1 - x$ bzw. $\mu = 1 - y$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt schließlich

$z = 6 - 3 \cdot x - 2 \cdot y$ oder $3x + 2y + z = 6$.

Das Ergebnis von Beispiel 8.17 kann – wie sich zeigen lässt – verallgemeinert werden:

Allgemeine Ebenengleichung:

Durch eine lineare Gleichung in drei Variablen $\mathbf{ax + by + cz = d}$ (a, b, c, d feste Werte, nicht alle Werte a, b oder c gleich 0) ist genau eine **Ebene** bestimmt.

Anmerkungen: Die Koeffizienten a, b und c der linearen Glieder sind, was ohne Begründung erwähnt wird, die Koordinaten eines Normalvektors der Ebene!

Beispiel 8.18 : Festlegung einer Ebene durch drei Punkte

Liegen drei Punkte nicht auf einer Geraden, so bestimmen sie eine Ebene. Ermittle eine Parameterdarstellung der Ebene durch die drei Punkte A (4/1/2), B (6/4/7) und C (7/6/8).

Lösung

Etwa die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ spannen die gesuchte Ebene auf.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 4-1 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ 6-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Als Ortsvektor $\vec{x}_1$ eines festen Punktes der Ebene kann einer der Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ oder $\overrightarrow{OC}$ gewählt werden. Wir entscheiden uns für $\overrightarrow{OA}$. Somit:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Welche Punkte erhält man für $\lambda = 1$ und $\mu = 0$ bzw. $\lambda = 0$ und $\mu = 1$?

Der Abstand zweier windschiefer Geraden (die Geraden sind weder parallel noch schneiden sie einander) kann mit Hilfe des Vektorproduktes bestimmt werden. Es gilt (ohne Herleitung):

Abstand d (g, h) zweier windschiefer Geraden g, h:

g: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$, h: $\vec{x} = \vec{x}_2 + \mu \cdot \vec{b}$; $\quad d(g, h) = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0|$

Beispiel 8.19 : Bestimmung des Abstandes windschiefer Geraden

Bestimme den Abstand der windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{x}_2 + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ Einheitsvektor: } (\vec{a} \times \vec{b})_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4; \quad d(g, h) = |-4| = 4.$$

Im Überblick: Gerade und Ebene im Raum

Parameterdarstellung einer Geraden (in Vektorform): $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$ wie in der Ebene
Parameterdarstellung einer Ebene (in Vektorform): $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$ $\vec{x}$ ... Ortsvektor eines beliebigen Punktes P der Ebene $\vec{x}_1$ ... Ortsvektor irgendeines "festen" Punktes P_1 der Ebene λ, μ ... Parameter von P; $\vec{a}, \vec{b}$ ... Vektoren, die die Ebene aufspannen
Allgemeine Ebenengleichung: $ax + by + cz = d$ (a, b, c, d feste Werte, nicht alle Werte a, b oder c gleich 0)
Abstand d (g, h) zweier windschiefer Geraden g, h: g: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$, h: $\vec{x} = \vec{x}_2 + \mu \cdot \vec{b}$: $d(g, h) = \lvert(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0\rvert$

Aufgaben

Gerade im Raum

8.54 Stelle fest, ob die Punkte **a)** P (3/4/–1), **b)** Q (1/0/3) **c)** R (1/2/1) auf der Geraden
g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegen.

8.55 Wie lautet die Gleichung der Geraden durch den Punkt Q parallel zum Vektor $\vec{a}$? Welchen Punkt der Geraden erhält man für die Parameter $\lambda = 2$?

a) Q (3/4/2), $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** Q (0/2/1), $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** Q (4/0/–2), $\vec{a} = \vec{j}$

8.56 Gegeben sind die Punkte A (0/1/1), B (5/5/3) und P (2/2/5). Durch A und B ist eine Gerade g bestimmt. Lege durch P die zu g parallele Gerade.

8.57 Gegeben ist eine Geradengleichung in Parameterdarstellung. Stelle die Punkte fest, in denen die Gerade die drei Koordinatenebenen schneidet.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

8.58 Die Punkte A (3/y/z), B (x/0/z), C (x/y/–3) liegen auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Wie lauten die fehlenden Koordinaten?

8.59 Gegeben sind zwei Punkte A und B. Wie lautet die Gleichung der Geraden durch A und B?

a) A (4/2/1), B (2/6/8) **b)** A (4/0/2), B (–1/6/3)
c) A (0/0/0), B (0/4/5) **d)** A (–2/0/3), B (5/4/0)

8.60 Liegen die drei Punkte A, B, C auf einer Geraden?

a) A (2/1/4), B (4/1/4), C (−2/1/1) **b)** A (2/2/2), B (2/3/1), C (−1/0/5)

Hinweis: Man kann zuerst eine Gerade durch zwei Punkte legen und dann prüfen, ob der dritte Punkt auf dieser Geraden liegt. Schneller prüft man, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ kollinear sind; d.h., ob es ein k gibt, sodass $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

8.61 Bestimme den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2:

a) $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Berechnung analog wie bei Geraden in der Ebene.

8.62 Bestimme den Abstand des Punktes P von der Geraden g:

a) P (0/0/0), $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** P (2/4/1), $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

8.63 Gegeben ist ein Dreieck ABC durch drei Punkte. Bestimme die Höhe auf die Seite AB.

a) A (1/1/1), B (3/7/2), C (2/5/3) **b)** A (2/2/8), B (2/6/7), C (2/1/3)

8.64 Gegeben sind die beiden parallelen Geraden g_1 und g_2. Bestimme ihren Abstand!

$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hinweis: Wähle einen Punkt auf g_2 und ermittle seinen Abstand von g_1.

8.65 Durch die drei Punkte A (0/1/2), B (5/6/2) und C (3/8/4) ist im Raum ein Dreieck gegeben.

a) Berechne die Seitenlängen.

b) Berechne alle drei Innenwinkel und kontrolliere über die Winkelsumme.

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

8.66 Gegeben ist das Dreieck ABC durch A (7/1/3), B (1/3/1) und C (4/5/5).

a) Wie lautet eine Parameterdarstellung der Schwerlinie durch C?

b) Wie lautet eine Parameterdarstellung der Winkelsymmetralen des Winkels α?

c) Ermittle den Schwerpunkt des Dreiecks als Schnittpunkt zweier Schwerlinien.

d) Ermittle den Inkreismittelpunkt des Dreiecks als Schnittpunkt zweier Winkelsymmetralen.

8.67 Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden g und h. Bestimme ihren Abstand.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebene im Raum

8.68 Wie lautet die Gleichung der Ebene, die den Punkt Q enthält und parallel zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verläuft? Welchen Punkt der Ebene erhält man für die Parameter $\lambda = 2$ und $\mu = -1$?

a) Q (3/1/2), $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** Q (5/4/1), $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.69 Liegt der Punkt Q in der Ebene $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$?

a) Q (6/5/4) **b)** Q (3/5/6) **c)** Q (10/1/1)

8.70 Die folgende Ebenengleichung in Parameterform soll parameterfrei gemacht werden:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

8.71 Bestimme die Gleichung der Ebene durch die drei Punkte A, B und C:

a) A (2/3/0), B (3/2/–3), C (0/1/2) **b)** A (6/5/4), B (3/7/6), C (10/1/1)

8.72 Liegen die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene? Wenn ja, wie lautet die Gleichung der Ebene in parameterfreier Darstellung?

a) A (3/1/5), B (5/–1/1), C (4/0/3), D (1/1/3)

b) A (1/1/0), B (0/–1/2), C (–2/1/2), D (1/1/1)

Hinweis: Man kann eine Ebene durch 3 Punkte legen und danach prüfen, ob der vierte Punkt in dieser Ebene liegt.

8.73 Wie lautet die Gleichung einer Ebene in parameterfreier Darstellung, die den Punkt P (3/4/5) enthält und parallel zur **a)** Grundrissebene, **b)** Aufrissebene, **c)** Kreuzrissebene verläuft?

Hinweis: Nicht rechnen, sondern überlegen!

8.74 Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S. Berechne ihr Volumen, wenn A (0/0/0), B (0/5/2), C (5/3/0), S (2/3/1).

8.75 Eine Ebene ε ist durch die Punkte A (0/0/1), B (1/0/0), C (0/1/0) gegeben. Bestimme in parameterfreier Form die Gleichungen der zu ε parallelen Ebenen im Abstand $d = \sqrt{3}$.

9 Wirtschaftsmathematik

9.1 Finanzmathematik

9.1.1 Einfache Zinsrechnung

Bringt ein Kunde einen Geldbetrag zur Aufbewahrung in eine Bank oder bekommt er von der Bank einen Kredit, so wird Geld *verliehen.* Der Verleiher bekommt in der Regel dieses Geld ("Kapital") nach einiger Zeit vom Schuldner samt einer Verleihgebühr, den "Zinsen", zurück. Die Berechnung der Zinsen ist lediglich eine besondere Anwendung der Prozentrechnung.

Der **Zinssatz** $\mathbf{i} = \frac{p}{100} = \mathbf{p\,\%}$ gibt an, wie viel Prozent des verliehenen Geldbetrages, des Kapitals K_0 nach *einem* Jahr als Zinsen anfallen. Man schreibt auch p% p.a. (per annum). p heißt *Zinsfuß*. Daher betragen die Zinsen für 1 Jahr:

Zinsen für ein Jahr: $Z = K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot i$

Beachte den Unterschied zwischen p und i!

Wird das Kapital nur über einen Teil eines (Kalender-)Jahres verliehen, so gelten für die Zinsberechnung üblicherweise folgende Vereinbarungen: Das Jahr hat 360 Tage und *jeder* Monat (auch der Jänner oder Februar) wird mit 30 Tagen gezählt.

Dann betragen die Zinsen für t Tage ("Zinstage") den Anteil $\frac{t}{360}$ der Zinsen eines Jahres; wir erhalten so die Tageszinsformel:

Zinsen für t Tage: $Z = K_0\, i \cdot \frac{t}{360}$

Was sind Zinstage?

Zinsen werden auf den Tag genau gerechnet. Es gibt sie erst, wenn das Geld nach mehr als 14 Tagen ab der Einzahlung ("Respirofrist") abgehoben wird. In diesem Fall beginnt die Verzinsung am ersten Werktag (Werktage sind die Wochentage ohne Sonn- und Feiertage) nach dem Einzahlungstag. Die Verzinsung endet am Tag vor der Abhebung (auch wenn dieser Tag ein Sonntag ist).

Von den (Spar-)Zinsen werden von der Bank derzeit 25 %, die sogenannte Kapitalertragssteuer (KESt), an das Finanzministerium abgegeben. Effektiv beträgt der Zinssatz für den Bankkunden daher nicht i, sondern nur $0{,}75 \cdot i$.

Bleibt das Kapital über das Jahresende hinaus verliehen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) Die Zinsen des abgelaufenen Jahres werden mit Beginn des nächsten Jahres dem Kapital gutgeschrieben. Dies heißt **Kapitalisierung** (= zu einem Kapital machen) der Zinsen. Im nächsten Jahr werden die Zinsen vom so vergrößerten Kapital berechnet, weshalb man dann auch Zinsen von den Zinsen des Vorjahres erhält; man spricht daher von **Zinseszinsen**.

(2) Die am Jahresende fälligen Zinsen werden nicht verzinst, die Verzinsung geht gleichmäßig weiter. Man spricht in diesem Fall von einer **einfachen Verzinsung**.

Beispiel 9.1 : Zinsrechnung bei einfacher Verzinsung

Ein Kapital von € 4000,– (im Bankbereich schreibt man nach der Tausenderziffer einen Punkt, also € 4.000,–) wird bei einer Verzinsung von 3% auf ein Sparbuch gelegt.

a) Wie hoch sind die einfachen Zinsen bei einem Zeitraum

(1) von 1 Jahr (2) 5 Jahren (3) von 5 Monaten (4) von 128 Tagen

b) Welches Kapital erbringt bei 3% in einer Zeitspanne von 5 Monaten einfache Zinsen in der Höhe von € 120,– ?

c) Jemand verleiht € 10000,– auf ein halbes Jahr und erhält € 10200,–. Wie hoch war der Zinssatz?

d) Wieviele Tage muss ein Kapital von € 4000,– bei 3% im Sparbuch liegen, damit es im selben Jahr ein Guthaben von € 4100,– behoben werden kann?

Lösung

Zu **a)** (1) $Z = K_0\, i = 4000 \cdot \frac{3}{100} = 120,–.$

(2) Die Zinsen pro Jahr sind: $Z = K_0\, i$; in 5 Jahren: $n \cdot Z = 5 \cdot K_0\, i = 600,–.$

(3) $t = 5 \cdot 30$ Tage $= 150$ Tage; $Z = \frac{t}{360} . K_0\, i = \frac{150}{360} . 4000 \cdot \frac{3}{100} = 50,–.$

(4) $Z = \frac{t}{360} . K_0\, i = \frac{128}{360} . 4000 \cdot \frac{3}{100} = 42{,}67.$

Zu **b)** Die Zinsformel ist nach K_0 umzustellen:

$$K_0 = \frac{Z \cdot 360}{i \cdot t} = \frac{120 \cdot 360}{0{,}03 \cdot 150} = 9600,–$$

Zu **c)** $Z = 200,–$; $t = 180$ Tage. Die Zinsformel ist nach i umzustellen:

$$i = \frac{Z \cdot 360}{K_0 \cdot t} = \frac{200 \cdot 360}{10000 \cdot 180} = 0{,}04 = \frac{4}{100} = 4\%;$$ der Zinssatz ist also 4%.

Zu **d)** $Z = 100,–$. Die Zinsformel ist nach t umzustellen:

$$t = \frac{Z \cdot 360}{K_0 \cdot i} = \frac{100 \cdot 360}{4000 \cdot 0{,}03} = 300 \text{ Tage.}$$

Aufgaben

9.1 Ein Betrag von € 3000,– wird bei einer einfachen Verzinsung von 4% in ein Sparbuch gelegt. Berechne die Höhe des Guthabens nach

a) 7 Monaten, **b)** $4\frac{1}{2}$ Monaten, **c)** 25 Tagen, **d)** 110 Tagen.

9.2 Zu welchem Zinsfuß muss ein Kapital von € 1000,– angelegt sein, damit es in

a) 4 Monaten, **b)** 6 Monaten, **c)** 150 Tagen, **d)** 100 Tagen

einfache Zinsen in der Höhe von € 20,– erbringt?

9.3 Wie viele Tage muss ein Betrag von € 8000,– bei einer Verzinsung von

a) 2% **b)** 3% **c)** 4% **d)** 5%

am Sparbuch liegen, damit er einfache Zinsen von € 100,– erbringt?

9.4 Welches Kapital erreicht bei einfacher Verzinsung mit 3,75% in 8 Monaten einen Endwert von € 3690,–?

9.5 Ein Betrag von € 1000,– wird mit 3% pro Jahr verzinst. Von den *Zinsen* wird zu Jahresende 25% vom Finanzministerium als Kapitalertragssteuer ("KESt") eingehoben. Berechne den verbleibenden Ertrag nach einem Jahr, wenn der genannte Betrag zu Jahresbeginn eingelegt wurde? Wie hoch ist bei Berücksichtigung der KESt die eigentliche Verzinsung für den Bankkunden?

9.1.2 Zinseszinsrechnung

Die Zinsen werden am *Ende* jedes Jahres zum Kapital dazugeschlagen. Diese *Summe* ist das Kapital, das im nächsten Jahr verzinst wird.

Bezeichnungen:

K_0 ... Anfangskapital, Kapital zu Beginn des ersten Jahres

K_1, K_2, ... Kapital am Ende des ersten, zweiten, ... , Jahres

K_n ... Kapital nach n Jahren

$i = \frac{p}{100}$

Damit ergibt sich:

$K_1 = K_0 + i \cdot K_0 = K_0 . (1 + i)$

$K_2 = K_1 + i \cdot K_1 = K_1 . (1 + i) = K_0 . (1 + i)^2$

$K_3 = K_2 + i \cdot K_2 = K_2 . (1 + i) = K_0 . (1 + i)^3$

...

Setzt man abkürzend $q = 1 + i$, so erhält man also für das Kapital am Ende des n-ten Jahres die

Zinseszinsformel: $K_n = K_0 . q^n$

q heisst **Aufzinsungsfaktor** und ist der Faktor, mit dem ein Kapitalstand zu multiplizieren ist, um dessen Wert nach *einem* Jahr zu erhalten.

$$\text{Barwert } K_0 = \frac{K_n}{q^n} \underset{\text{Abzinsen}}{\overset{\text{Aufzinsen}}{\rightleftarrows}} \text{Endwert } K_n = K_0 \cdot q^n$$

Abb. 9.1 Aufzinsen und Abzinsen

Nach vollzogener Verzinsung kann man fragen, wie groß das ursprüngliche Anfangskapital K_0 ist, das nach n Jahren zu einem bestimmten **Endwert** K_n führt. K_0 wird auch **Barwert** (oder diskontierter Wert) genannt. Man sagt, dass aus dem Barwert durch **Aufzinsung** der Endwert entsteht bzw. aus dem Endwert durch **Abzinsung** der Barwert.

Es kommt auch vor, dass die Kapitalisierung nicht nur am Jahresende erfolgt, sondern halbjährlich, vierteljährlich oder auch monatlich: die "Zinsperioden" sind Halbjahre, Vierteljahre oder Monate. In diesem Fall spricht man von einer unterjährigen Verzinsung. Die Vorgangsweise ist ganz entsprechend jener bei einmaliger Kapitalisierung im Jahr. Darauf wird jedoch nicht eingegangen.

Wir können nun ähnliche Fragen wie auch im Beispiel 9.1 stellen. Dabei und auch für die folgenden numerischen Berechnungen wird eine Aufgabe stets mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit gerechnet. Geldbeträge werden auf Hundertstel gerundet (Taschenrechner auf 2 Nachkommastellen einstellen!).

Beispiel 9.2 : Vergleich zwischen einfachen Zinsen und Zinseszinsen

Ein Kapital von € 100,– wird bei einer Verzinsung von i = 4% durch

a) einfache Zinsen **b)** Zinseszinsen

aufgezinst. Berechne K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_{10} und K_{20} und stelle die Kapitalentwicklung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch dar.

Lösung

Zu **a)** Wir überlegen zuerst, wie die Zinsformel bei einfacher Verzinsung über n Jahre aussieht: sind $K_0 \cdot i$ die Zinsen pro Jahr, so sind sie in n Jahren $n \cdot K_0 \cdot i$. Somit ist der Endwert K_n des Kapitals: $K_n = K_0 + n \cdot K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$.

Damit ist mit $K_0 =$ 100,– und i = 0,04:

$K_1 = K_0 \cdot (1 + i) \quad = 104,–$

$K_2 = K_0 \cdot (1 + 2\,i) = 108,–$

$K_3 = K_0 \cdot (1 + 3\,i) = 112,–$

$K_4 = K_0 \cdot (1 + 4\,i) = 116,–$

$K_5 = K_0 \cdot (1 + 5\,i) = 120,–$

...

$K_{10} = K_0 \cdot (1 + 10\,i) = 140,–$ sowie $K_{20} = K_0 \cdot (1 + 20\,i) = 180,–$

Die Endwerte nehmen pro Jahr stets um den gleichen Betrag $Z = K_0 \cdot i =$ 4,– (= Zinsen pro Jahr) zu. Man spricht von einem **linearen Wachstum** des Kapitals. Die Endwerte K_n liegen auf der Geraden $y = k \cdot x + d$ mit $k = Z$ und $d = K_0$.

Zu **b)** $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + i = 1{,}04$.

$K_1 = K_0 \cdot q \quad = 104,–$

$K_2 = K_0 \cdot q^2 = 108{,}16$

$K_3 = K_0 \cdot q^3 = 112{,}49$

$K_4 = K_0 \cdot q^4 = 116{,}99$

$K_5 = K_0 \cdot q^5 = 121{,}67$

...

$K_{10} = K_0 \cdot q^{10} = 148{,}02$ sowie $K_{20} = K_0 \cdot q^{20} = 219{,}11$

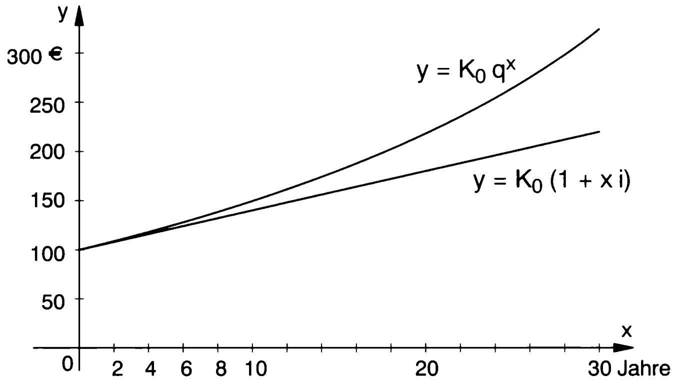


Abb. 9.2 Lineares und exponentielles Wachstum

Die Endwerte nehmen pro Jahr nicht mehr um einen gleichbleibenden Betrag zu, auch die Zunahmen *steigen* pro Jahr, und zwar *stets* um den gleichen Prozentsatz i gegenüber dem Vorjahr! Das heißt aber, dass ein **exponentielles Wachstum** des Kapitals vorliegt. Die Endwerte K_n liegen auf dem Graphen der Exponentialfunktion $y = K_0 \cdot q^x$ (Abb. 9.2).

Beispiel 9.3 : Zinseszinsen

a) Zwei Kapitale von je € 1 000,– wird bei einer Verzinsung von 3% bzw. von 6% auf ein Sparbuch gelegt. Auf welche Endwerte wachsen sie nach 5 Jahren?

b) Nach 10 Jahren soll ein Guthaben € 200 000 betragen. Welcher einmalige Geldbetrag ist bei einer Verzinsung von 6% einzuzahlen?

c) Eine Spareinlage von € 2000,– wächst in drei Jahren auf € 2185,45. Wie hoch war die Verzinsung?

d) Bei welchem Zinssatz wächst ein Kapital in 10 Jahren auf das Doppelte?

e) In wie vielen Jahren wächst ein Kapital bei i = 3% auf das Doppelte?

Lösung

Ausgangsposition ist die grundlegende Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$.

Zu **a)** $K_5 = 1000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 1159{,}27$; $K_5 = 1000 \cdot (1 + 0{,}06)^5 = 1338{,}23$.

Zu **b)** Der Endwert K_{10} ist auf den Barwert K_0 abzuzinsen:

$$K_{10} = K_0 \cdot q^{10} \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{K_{10}}{q^{10}} = \frac{200\,000}{1{,}06^{10}} = 111\,678{,}96.$$

Zu **c)** $K_n = K_0 \cdot q^n \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = \sqrt[3]{\frac{2185{,}45}{2000}} = 1{,}030$; daraus $i = q - 1 = 0{,}03 = 3\%$.

Zu **d)**

$$\begin{aligned} K_n = 2 \cdot K_0 &= K_0 . q^{10} \quad | : K_0 \\ 2 &= q^{10} \\ q &= \sqrt[10]{2} \end{aligned}$$

daraus $i = q - 1 \approx 0{,}072 = 7{,}2\%$.

Zu **e)** Mit $q = 1 + i = 1{,}03$ löst man eine Exponentialgleichung:

$$\begin{aligned} K_n = 2 \cdot K_0 &= K_0 . 1{,}03^n \quad | : K_0 \\ 2 &= 1{,}03^n \quad | \text{ logarithmieren} \\ \ln 2 &= n \cdot \ln 1{,}03 \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} = 23{,}45. \end{aligned}$$

Zwischen dem 23. und 24. Jahr erreicht das Kapital seinen doppelten Wert.

Man hätte – ohne Logarithmieren – auch die Potenzen $1{,}03^n$ so lange bilden können, bis erstmals der Wert 2 überstiegen wird. Die Hochzahl n unmittelbar davor gibt die Anzahl der vollen Jahre an.

Beispiel 9.4 : Verdopplungszeiten beim Zinssatz i = p%

In wie vielen Jahren wächst ein Kapital bei p% Verzinsung

a) bei einfachem Zins **b)** bei Zinseszins auf das Doppelte?

Rechne zuerst allgemein und dann speziell mit i = 4%.

Lösung

Zu **a)** $K_n = 2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + n\,i) \quad | : K_0$

$$2 = 1 + n\,i$$

$$n = \frac{1}{i} = \frac{1}{\frac{4}{100}} = 25 \text{ Jahre.}$$

Zu **b)** Wir gehen wie in Beispiel 9.3 e) vor.

$$K_n = 2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + n\,i) \quad | : K_0$$

$$2 = (1 + i)^n \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$\ln 2 = n \cdot \ln(1 + i)$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i)} = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}04} \approx 17{,}7 \text{ Jahre.}$$

Gemischte Verzinsung

Die Berechnung der Zinsen erfolgt in der Praxis so, dass bis zum ersten Jahreswechsel einfache Zinsen, für die folgenden *ganzen* Jahre Zinseszinsen und für den Rest des begonnen Jahres wieder einfache Zinsen berechnet werden. Man nennt dies *gemischte Verzinsung*.

Sind die Zinsperioden Halbjahre, so liegen die "Zinstermine" am Ende jedes Halbjahres. Entsprechendes gilt bei anderen Zinsperioden.

Beispiel 9.5 : Gemischte Verzinsung

Ein Geldbetrag von € 400,– wurde auf ein Sparkonto zu $i = 3\%$ eingezahlt. Wie groß ist das Sparguthaben, wenn über den Zeitraum der Verzinsung folgendes bekannt ist: 43 Zinstage im Einzahlungsjahr, danach 2 volle Jahre, Abhebung im darauffolgenden Jahr zur Jahresmitte.

Lösung

Zeitpunkt:	Kapital
Ende des Einzahlungsjahres:	$400 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{43}{360}\right)$
Nach den nächsten 2 vollen Jahren:	$400 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{43}{360}\right) \cdot (1 + i)^2$
Abhebung	$400 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{43}{360}\right) \cdot (1 + i)^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)$

Mit $i = 3\%$ ergibt sich somit als Endwert bei der Abhebung: € 432,27.

Statt eine gemischte Verzinsung durchzuführen, kommt man näherungsweise mit der Zinseszinsformel aus, indem man für n nicht ganzzahlige Jahreswerte zulässt.

Beispiel 9.6 : Näherungsrechnung bei gemischter Verzinsung

a) Berechne den Endwert in Beispiel 9.5 näherungsweise.

b) Wann erreicht ein Kapital von € 1000,– bei einer Verzinsung von 4% den Endwert € 1300,–?

Lösung

Zu **a)** $n = \frac{43}{360} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{943}{360}$; $K \approx 400 \cdot (1 + 0{,}03)^n = 432{,}20$.

Der Unterschied zur gemischten Verzinsung beträgt nur € 0,07!

Zu **b)**

$$1300 = 1000 \cdot 1{,}04^n \quad | : 1000$$
$$1{,}3 = 1{,}04^n \quad | \text{ logarithmieren}$$
$$\ln 1{,}3 = n \cdot \ln 1{,}04$$
$$n = \frac{\ln 1{,}3}{\ln 1{,}04} = 6{,}689.$$

Nach 6,689 Jahren = 6 Jahre und 248 Tage wird näherungsweise der gewünschte Endwert erreicht.

Zahlungen zu unterschiedlichen Terminen

Solche Zahlungen können leicht verglichen werden, wenn der gleiche Zinssatz i vorliegt: Man bezieht alle Zahlungen **durch Auf- bzw. Abzinsen auf einen gemeinsamen Zeitpunkt**.

Beispiel 9.7 : Vergleich von Angeboten

Einem Verkäufer eines Grundstückes werden zwei Angebote gemacht:

Angebot A: € 20000 in einem Jahr und € 50000 in drei Jahren.

Angebot B: € 30000 sofort und € 40000 in vier Jahren.

Welches Angebot ist bei einem Zinssatz von 10% ("Kalkulationszinssatz") günstiger?

Lösung

Es bietet sich an, die beiden Angebote auf den Anfangszeitpunkt abzuzinsen, also jeweils den Barwert der Angebote zu berechnen. Auch ein anderer gemeinsamer Zeitpunkt ist grundsätzlich denkbar, aber mit mehr Rechenaufwand verbunden.

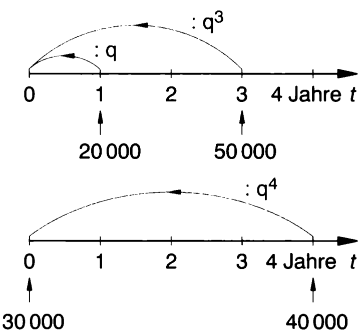


Abb. 9.3

Abb. 9.3 veranschaulicht die Situation durch "Zeitlinien".

Barwert des Angebotes A:

$$\frac{20000}{1{,}1} + \frac{50000}{1{,}1^3} = 18118{,}12 + 37565{,}74 = 55747{,}56;$$

Barwert des Angebotes B:

$$30000 + \frac{40000}{1{,}1^4} = 30000{,}00 + 27320{,}54 = 57320{,}54.$$

Angebot B ist daher für den Verkäufer günstiger.

Im Überblick: Finanzmathematik

Der **Zinssatz i = p%** gibt den Anteil eines Kapitals K_0 an, der nach *einem* Jahr an Zinsen (= Jahreszinsen) anfällt.

Einfache Zinsen: Die Zinsen Z sind proportional zur Dauer der Verzinsung.
Zinsen für ein Jahr: $Z = K_0 i$; Zinsen für n Jahre: $Z = K_0 i \cdot n$;
Zinsen für t Tage: $Z = K_0 i \cdot \frac{t}{360}$.

Zinsenszinsen: Die Zinsen werden am Ende eines Jahres (allgemeiner am Ende einer bestimmten Zinsperiode) zum Kapital geschlagen und danach mitverzinst.
Zinseszinsformel: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$ für das Kapital nach n Jahren.

Gemischte Verzinsung: Einfache Zinsen bis zum ersten Jahreswechsel, dann Zinseszinsen für die vollen Jahre, danach wieder einfache Zinsen.
Statt eine gemischte Verzinsung vorzunehmen, kann näherungsweise die Zinseszinsformel mit entsprechenden nichtganzzahligen Jahreswerten verwendet werden.

Aufzinsen und Abzinsen: Berechnen des Endwertes K_n aus dem Barwert K_0 bzw. umgekehrt. Bei einer Anzahl von n vollen Jahren bedeutet dies eine Multiplikation mit q^n oder eine Division durch q^n, wobei $q = 1 + i$ (Aufzinsungsfaktor).

Aufgaben

9.6 Berechne die fehlende Größe aus der Zinseszinsformel:

	K_n (in €)	K_0 (in €)	i	n (in Jahren)
a)		1000	4%	5
b)	7969,24		6%	8
c)	2339,72	2000		4
d)	91922,96	50000	7%	

9.7 Ein Betrag von € 1500 wird 5 Jahre bei einem Zinssatz i = 4,5%
a) bei einfacher Verzinsung **b)** bei Zinseszinsen angelegt.
Berechne den Endwert.

9.8 Wie groß muss ein Anfangskapital sein, damit nach 4 Jahren bei i = 5% ein Guthaben von
a) € 1000,- **b)** € 2000,- zur Verfügung steht.

9.9 Wie hoch muss die Verzinsung sein, damit ein Kapital von € 3000 in
a) 4 Jahren **b)** 6 Jahren **c)** 8 Jahren **d)** 10 Jahren
auf € 5000 anwächst?

9.10 In welcher Zeit ist ein Kapital von € 2000 bei 5%iger Verzinsung auf
a) € 2431,01 **b)** € 2680,19 angewachsen?

9.11 Ein Kapital K_0 = € 100,– verdoppelt sich erstmals nach 20 Jahren. Es wird stets gleichbleibende Verzinsung angenommen.
a) Wann hätte es den vierfachen Anfangswert K_0 erreicht?
b) Wie hoch wäre der Kapitalstand nach 80 Jahren?
c) Wie hoch ist die Verzinsung?

9.12 Auf ein Sparbuch wird ein Betrag von **a)** € 500,– **b)** € 1000,– eingezahlt. Die Verzinsung beträgt anfangs 4%. Nach Ablauf von zwei Jahren wird der Zinssatz auf 3,5% gesenkt und nach einem weiteren Jahr auf 3%. Wie groß ist der Endwert 5 Jahre nach der Einzahlung?

9.13 Ein Geldbetrag von ursprünglich € 5000,– war auf 10 Jahre gebunden. Die Verzinsung betrug in den ersten drei Jahren 6%, danach fiel der Zinssatz zuerst auf 5,5% und nach einem weiteren Jahr auf 4,5%.
a) Wie groß ist der Endwert?
b) Wie groß war die mittlere Verzinsung in diesen 10 Jahren?

9.14 Jemand legt € 400,– auf ein Sparbuch mit einer Verzinsung von 3% ein. Nach Ablauf von zwei Jahren hebt er € 200,– ab. Wie viel liegt nach weiteren zwei Jahren noch auf dem Sparbuch?

9.15 Ein Kapital von € 2000,– wird zu 4% auf ein Sparbuch gelegt.
a) Nach wie vielen vollen Jahren übersteigt das Guthaben erstmals den Wert € 2500,–?
b) Welchen Wert hat es dann?
c) Welchen Wert hat es ein Jahr vorher?
d) Wie viele Tage müsste ein Guthaben mit dem Wert aus c) noch verzinst werden, damit es den den Endwert € 2500,– erreicht?

9.16 Ein junger Mann erbt € 5000,–, die er auf ein Sparkonto legt, das mit 4% verzinst wird.
a) Wie viel Zinsen erhält er nach 5 Jahren?
b) Er lässt sich die Zinsen jährlich ausbezahlen. Wie viel Zinsen erhält er insgesamt in 5 Jahren?

9.17 Jemand zahlt stets zu Jahresbeginn dreimal hintereinander € 400,– auf ein Sparbuch ein. Die Verzinsung beträgt 4,5%. Wie groß ist das Guthaben nach Abschluss von drei Jahren?

9.18 Ein Schüler hat € 1000,– gespart; seine Eltern geben noch einmal so viel dazu. Diese Geldsumme legt er zu 4% für fünf volle Jahre auf ein Sparbuch. Bei welchem Zinssatz würden € 1000,– in der gleichen Zeit auf denselben Endwert ansteigen?

9.19 Jemand eröffnet zu Jahresbeginn mit € 300,– bei einer Verzinsung von 3,5% ein Sparbuch. Zu jedem Jahresbeginn der nächsten 3 Jahre legt er den gleichen Betrag dazu. Wie groß ist das Guthaben ein halbes Jahr nach der letzten Einzahlung?

Hinweis: Berechne den Endwert jeder Einzahlung!

9.20 Jemand nimmt zu Jahresbeginn einen Kredit von € 20000,– zu 8% Zinsen auf.

a) Auf welchen Betrag wächst die Schuld in 2 Jahren an, wenn in diesem Zeitraum keine Rückzahlungen erfolgen?

b) Nach einem Jahr werden € 12000,– zurückgezahlt. Wie groß ist die Restschuld am Ende des zweiten Jahres?

9.21 Ein Geldbetrag von € 30000 wird zu 5% auf ein Sparkonto gelegt. Berechne den Endwert, wenn sich die Laufzeit folgendermaßen zusammensetzt:

	Im Einlegejahr	Anzahl der vollen Jahre	Im Jahr der Abhebung
a)	5 Monate	0	5 Monate
b)	2 Monate	0	8 Monate
c)	214 Tage	3	32 Tage
d)	4 Monate	2	112 Tage

9.22 Berechne näherungsweise unter alleiniger Verwendung der Zinseszinsformel den Endwert von Aufgabe 9.21 a), b), c), d).

9.23 Ein Anfangskapital wächst von € 2000,– auf € 2500,–. Beantworte näherungsweise unter alleiniger Verwendung der Zinseszinsformel:

a) Wie lange dauert dies bei $i = 4\%$?

b) Bei welchem Zinssatz würde dies 4 Jahre dauern?

9.24 Berechne näherungsweise unter Verwendung der Zinseszinsformel den Barwert einer Forderung von € 1200,–, die in 1 Jahr und 4 Monaten fällig ist ($i = 5\%$).

9.25 Jemand will sich in 3 Jahren ein gebrauchtes Auto für € 10000,– kaufen. Welchen Betrag muss er dafür heute auf die Bank bringen, wenn die Verzinsung 4% beträgt?

9.26 Beim Kauf eines großen Grundstückes bezahlt der Käufer € 40000,– sofort und € 50000,– nach einem Jahr und noch einmal € 50000,– nach einem weiteren Jahr. Zu welchem Barwert wird das Grundstück verkauft, wenn mit $i = 8\%$ kalkuliert wird?

9.27 Jemand erhält viermal jeweils am Jahresende, einen gleichbleibenden Betrag von € 1000,–. Wie groß ist der Barwert aller dieser Zahlungen? ($i = 5\%$).

Hinweis: Berechne einzeln die Barwerte der vier Zahlungen.

Vergleich von Zahlungsangeboten

9.28 Beim Kauf eines Autos werden dem Käufer zwei Angebote gemacht: Entweder nach zwei Jahren € 25000,– oder sofort € 20000,–.

a) Was ist für den Käufer günstiger, wenn mit $i = 8\%$ kalkuliert wird?

b) Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die beiden Angebote gleichwertig?

9.29 Dem Käufer eines Gebrauchtautos werden von einem Autohändler 2 Kaufangebote gemacht:

Angebot A: € 10000,– bei Kaufabschluss,

Angebot B: Je € 6000,– nach dem ersten und zweiten Jahr des Kaufzeitpunktes.

Der Käufer geht zu einer Bank und nimmt einen Kredit von € 10000,– auf, mit dem er das Auto sofort kauft.

a) Der Zinssatz bei der Bank beträgt 8%. Er vereinbart zwei gleiche Rückzahlungen nach dem ersten und dem zweiten Jahr. Wie groß sind diese Rückzahlungen?

b) Wie groß wäre der Zinssatz bei der Bank, wenn die Rückzahlung wie beim Autohändler erfolgte?

9.30 Eine Firma erhält für den Kauf einer Maschinenanlage 2 Angebote:

Angebot A: € 200000,– sofort, den Rest in zwei gleichen Jahresraten
von je € 200000,– nach jeweils einem Jahr,

Angebot B: € 700000,– in 2 Jahren.

a) Welches Angebot ist günstiger, falls ein Zinssatz von 10% zugrunde gelegt wird?

b) Bei welchem Zinssatz sind die Angebote gleichwertig?

9.31 Dem Verkäufer einer Fabriksanlage liegen drei Kaufanbote vor. Welches ist das für ihn günstigste, wenn als Kalkulationszinssatz **a)** 6% **b)** 12% angenommen wird?

Angebot A: € 4 Mio. sofort, € 3 Mio. in 5 Jahren,

Angebot B: € 2 Mio. sofort, je € 1 Mio. fünfmal in Jahresabständen,

Angebot C: € 2 Mio. sofort, € 3 Mio. nach 2 Jahren, € 2 Mio. nach 4 Jahren.

9.32 Eine Firma verkauft einen Teil ihres Maschinenparks und erhält dafür drei Angebote:

Angebot A: € 2 Millionen Anzahlung sowie € 3 Millionen nach 2 Jahren,

Angebot B: € 1 Million Anzahlung sowie
je € 2 Millionen nach dem ersten und zweiten Jahr,

Angebot C: € 3 Millionen Anzahlung sowie
je € 1 Million nach dem ersten und zweiten Jahr.

a) Welches Angebot ist für die Firma am günstigsten?

b) Um wie viel müsste die Anzahlung des Angebots B erhöht werden, um mit dem Bestbieter gleichzuziehen?

c) Um wie viel müsste die Restzahlung des Angebotes A erhöht werden, um mit dem Bestbieter gleichzuziehen?

Es wird mit einem Zinssatz von 9% kalkuliert.

9.2 Lineare Optimierung

9.2.1 Lineare Ungleichungen in zwei Variablen

Eine Ungleichung der Form $a \cdot x + b \cdot y < c$ (a,b und c sind beliebige Konstanten, wobei jedoch a und b nicht beide 0 sind) heißt **lineare Ungleichung in x und y**.
Anstelle des $<$-Zeichens kann auch $>$, $\leq$ oder $\geq$ stehen.

Beispiel 9.8 : Lösungsmenge einer linearen Ungleichung in zwei Variablen

Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen in $\mathbb{R}^2$:

a) $3x - 2y < 2$, **b)** $\frac{x}{2} + y \leq 2$.

Lösung

Zu **a)** Man löst die Ungleichung nach y auf:

$$3x - 2y < 2 \quad | -3x$$
$$-2y < -3x + 2 \quad | : (-2)$$
$$y > \tfrac{3}{2}x - 1.$$

Zur Lösungsmenge der Ungleichung gehören alle Paare (x, y), deren y-Werte größer als $\frac{3}{2}x - 1$ sind. Graphisch dargestellt sind dies die Punkte "oberhalb" der Geraden $y = \frac{3}{2}x - 1$.

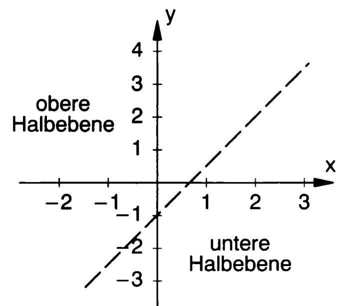


Abb. 9.4

Zu **b)** Wir lösen wieder nach y auf:

$$\tfrac{x}{2} + y \leq 2 \quad | -\tfrac{x}{2}$$
$$y \leq -\tfrac{x}{2} + 2.$$

Zur Lösungsmenge der Ungleichung gehören alle Paare (x,y), deren y-Werte kleiner oder gleich $-\frac{x}{2} + 2$ sind. Graphisch dargestellt sind dies die Punkte "unterhalb" und auf der Geraden $-\frac{x}{2} + 2$.

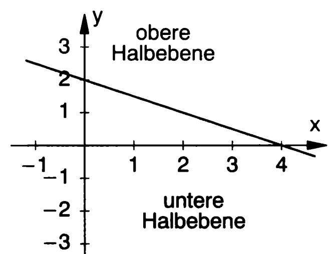


Abb. 9.5

Eine lineare Ungleichung beispielsweise der Art $a \cdot x + b \cdot y < c$ kann man graphisch lösen, wenn man zuerst die Gerade mit der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ zeichnet. Diese teilt die Ebene in zwei **Halbebenen**, von denen genau eine, möglicherweise mit der Geraden, graphisch die Lösungsmenge bildet. Die Gerade mit der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ heisst **Randgerade**.

Da als Lösungsmenge nur eine von den beiden möglichen Halbebenen (eventuell mit der Randgerade) in Frage kommt, kann man diese auch schnell durch einen "Testpunkt" feststellen. Am einfachsten geht dies mit dem Ursprung O (0/0), falls dieser nicht auf der Randgeraden liegt. Im Beispiel 9.7 a) führt dies zu $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 < 2$; d.h. (0/0) erfüllt die Ungleichung und liegt damit in der "richtigen" Halbebene. Oder man kontrolliert die Lösungsmenge, indem man die Koordinaten irgend eines Punktes, der nicht auf der Randgerade liegt, in die Ungleichung einsetzt.

Ist ein **System von Ungleichungen** gegeben, so ermittelt man von jeder einzelnen Ungleichung die Lösungsmenge nach dem gezeigten Verfahren. Die Lösungsmenge des Systems ist dann der Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen.

Beispiel 9.9 : Lineares Ungleichungssystem in zwei Variablen (1)

Gegeben ist das Ungleichungssystem

I: $x + y \geqslant -3$

II: $x - 2y < 2$

Stelle die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems graphisch in $\mathbb{R}^2$ dar.

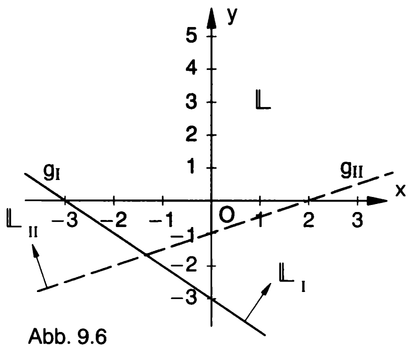


Abb. 9.6

Lösung

Randgerade g_I: $y = -x - 3$

Randgerade g_{II}: $y = \frac{x}{2} - 1$

$\mathbb{L}_I$: Halbebene mit Randgerade über g_I

$\mathbb{L}_{II}$: Halbebene ohne Randgerade über g_{II}

Die Lösung $\mathbb{L}$ ist gleich dem Durchschnitt der beiden Lösungsmengen $\mathbb{L}_I$ und $\mathbb{L}_{II}$: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_I \cap \mathbb{L}_{II}$.
Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist unbeschränkt.

Beispiel 9.10 : Lineares Ungleichungssystem in zwei Variablen (2)

Gegeben ist das Ungleichungssystem

I: $2x + y \geqslant -1$

II: $x - 2y \leqslant 2$

III: $x - 3 \leqslant 0$

IV: $y \leqslant 2$

Stelle die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems graphisch in **a)** $\mathbb{R}^2$, **b)** $\mathbb{Z}^2$ dar.

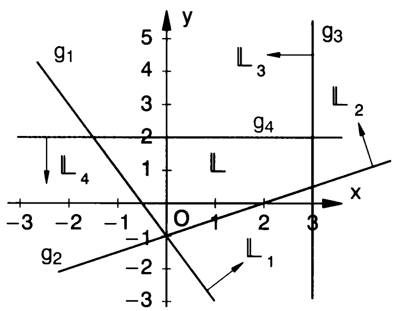


Abb. 9.7

Lösung

Zu **a)** Die 4 Randgeraden haben folgende Gleichungen (Abb. 9.7):

g_1: $y = -2x - 1$,

g_2: $y = \frac{x}{2} - 1$,

g_3: $x = 3$,

g_4: $y = 2$.

Wählt man O (0/0) als Testpunkt, so erkennt man sogleich die Halbebenen, die graphisch die Lösungsmengen $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$ und $\mathbb{L}_4$ darstellen. Ihr Durchschnitt ist die gesuchte Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des Systems. Wir erhalten eine beschränkte Lösungsmenge.

Zu **b)** Als Lösungen kommen nur Punkte der Lösungsmenge von a) in Frage, die ganzzahlig sind. In unserem Fall gibt es offenbar 14 derartige Lösungen:

$\mathbb{L} = \{(-1, 2), \ldots, (3, 2), (-1, 1), \ldots, (3, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, -1)\}$

Anmerkung: Ungleichungssysteme mit einer sowie mit zwei Variablen x, y lassen sich graphisch lösen. Auf die Behandlung von Ungleichungssystemen mit mehr als zwei Variablen wird nicht eingegangen.

Im Überblick: Lineare Gleichungen in zwei Variablen

Eine Ungleichung der Form $a \cdot x + b \cdot y < c$ (a,b und c sind beliebige Konstanten, wobei jedoch a und b nicht beide 0 sind) heißt **lineare Ungleichung in x und y**.
Anstelle des $<$-Zeichens kann auch $>$, $\leqslant$ oder $\geqslant$ stehen.

Die **Gerade** $a \cdot x + b \cdot y = c$ teilt die Ebene in zwei Halbebenen; sie wird *Randgerade* dieser Halbebenen genannt.
Eine dieser beiden **Halbebenen** bildet, graphisch veranschaulicht, die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung. Tritt "$\leqslant$" statt "$<$" bzw. "$\geqslant$" statt "$>$" auf, so wird die betreffende Halbebene durch ihre Randgerade abgeschlossen, sonst ist nur das Innere der Halbebene Lösungsmenge.

Ist ein **System** von linearen Ungleichungen gegeben, so ist die Lösungsmenge des Systems der Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen.

Aufgaben

9.33 Löse das folgende Ungleichungssystem graphisch:

a)
I: $x + y \leqslant 4$
II: $x > 0$
III: $y \geqslant 0$

b)
I: $2y + 4 \geqslant x$
II: $y < 2x + 1$
III: $y \leqslant 2$

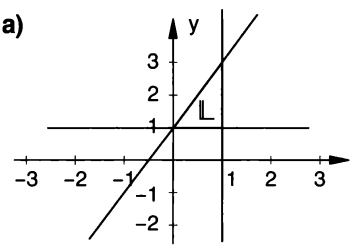
c)
I: $y \leqslant 3$
II: $x - y > -2$
III: $y \geqslant -2$
IV: $x < 2$

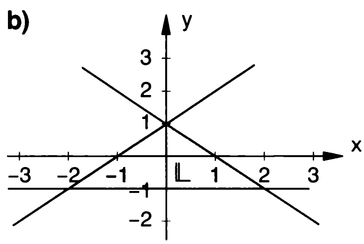
d)
I: $y < 2x + 1$
II: $y + x \geqslant -3$
III: $2y + x \leqslant 4$
IV: $y - x + 3 > 0$

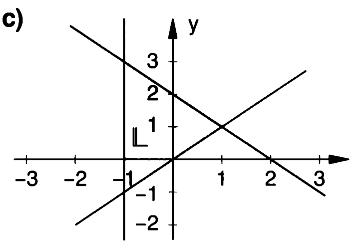
e)
I: $y \leqslant 1$
II: $x \geqslant -2$
III: $x \leqslant 3$
IV: $y + x \leqslant 2$

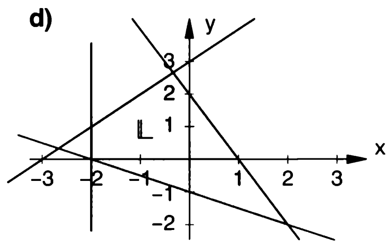
f)
I: $2y - x - 4 \leqslant 0$
II: $3y + x + 6 \geqslant 0$
III: $3y + 2x \leqslant 3$
IV: $y + 2 > 2x$

9.34 Stelle das Ungleichungssystem zur folgenden graphisch dargestellten Lösungsmenge auf. Dabei sollen alle Randgeraden zur Lösungsmenge gehören.

a)


b)


c)


d)


9.2.2 Lineare Optimierung

Auf betrieblicher Ebene, aber auch darüberhinaus, können Aufgaben der folgenden Art auftreten: Man sucht die Stelle, an der eine interessierende Funktion, die **Zielfunktion**, ihren größten oder kleinsten Wert annimmt. Dieser Wert ist ein Maß für den anfallenden maximalen "Gewinn" oder die entstehenden minimalen "Kosten". Er muss nicht in Geldeinheiten bestehen. Entsprechend spricht man von einer **Maximum-** bzw. **Minimumaufgabe**. Wichtig ist jedoch, dass bei diesen Aufgaben gewisse **Nebenbedingungen** vorgegeben sind, die eingehalten werden müssen. Lassen sich nun diese Nebenbedingungen in Form von *linearen* Gleichungen oder Ungleichungen beschreiben und ist außerdem die Zielfunktion *linear,* so spricht man von einer Aufgabe der **linearen Optimierung** (engl.: linear programming).

Optimierungsaufgaben (Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen), werden seit langem in den technischen und naturwissenschaftlichen Anwendungen gelöst. Aufgaben der linearen Optimierung, obwohl vom mathematischen Standpunkt grundsätzlich einfach, konnten mit den bisher bekannten Methoden nicht in vernünftiger Zeit gelöst werden. Das Hauptinstrument zur ihrer Lösung ist das im Jahre 1947 entdeckte *Simplexverfahren.* Ergänzt wird es dabei durch den Computer, der die dabei anfallende gewaltige Rechenarbeit bei in der Praxis oft Hunderten von Variablen übernimmt.

Wir werden uns auf lineare Optimierungsaufgaben mit zwei Variablen beschränken. Diese können in einfacher Weise auch graphisch gelöst werden.

Beispiel 9.11 : Eine Maximumaufgabe

Für den Zusammenbau zweier Geräte A und B sind zwei Montageplätze erforderlich. Der Montageplatz I ist pro Woche 40 Stunden und der Montageplatz II 28 Stunden einsetzbar. Für das Gerät A werden am Montageplatz I durchschnittlich vier Stunden und für das Gerät B zwei Stunden gebraucht. Am Montageplatz II sind für das Gerät A eine Stunde und für das Gerät B zwei Stunden im Mittel notwendig.

Der (Rein-)Gewinn pro Stück ist bei A gleich € 600,– bei B gleich € 400,–. Wie viele Geräte der Art A und der Art B müssen pro Woche hergestellt werden, damit der Gewinn größtmöglich ist?

Lösung

Wir können zur besseren Übersicht die Angabe noch einmal in Tabellenform anschreiben:

	Gerät A	Gerät B	Verfügbare Zeit
Montageplatz I	4 h	2 h	40 h
Montageplatz II	1 h	2 h	28 h
Gewinn	€ 600,–	€ 400,–	

Wir lösen diese Optimierungsaufgabe in mehreren Schritten.

1. Schritt: Einführung von Variablen und Aufstellen der Zielfunktion

x … Anzahl der Geräte A pro Woche

y … Anzahl der Geräte B pro Woche

z … Gewinn pro Woche

Es besteht die lineare Zielfunktion: $z = f(x, y) = 600 \cdot x + 400 \cdot y \to$ **Maximum**; die Schreibweise "$z \to$ Maximum" soll zum Ausdruck bringen, dass jenes Wertepaar (x, y) gesucht ist, das die Zielfunktion maximal macht.

2. Schritt: Aufstellen der Nebenbedingungen

Es werden x Stück von A und y Stück von B pro Woche hergestellt. Aus der ersten und zweiten Zeile der Tabelle kann man ablesen, welche Zeit (in h) an beiden Montageplätzen gearbeitet wird:

M I: $4x + 2y$.

M II: $x + 2y$.

M I steht wöchentlich höchstens 40 h und M II höchstens 28 h zur Verfügung; somit erhält man die beiden linearen Ungleichungen:

$4x + 2y \leqslant 40,$

$x + 2y \leqslant 28.$

Dazu kommt noch die Forderung, dass natürlich $x \geqslant 0$ und $y \geqslant 0$ sein muss. Diese besonderen Nebenbedingungen werden auch als *Nichtnegativitätsbedingungen* bezeichnet.

Wir können die Aufgabenstellung kurz und prägnant zusammenfassen:

I: $x \geqslant 0$

II: $y \geqslant 0$

III: $4x + 2y \leqslant 40$

IV: $x + 2y \leqslant 28$

Zielfunktion: $z = 600 \cdot x + 400 \cdot y \to$ Maximum

Nebenbedingungen und Zielfunktion sind linear, weshalb eine lineare Optimierungsaufgabe vorliegt.

Es muss betont werden, dass wir damit ein mathematisches *Modell* des Problems aufgestellt haben. Jedes Modell unterliegt bestimmten vereinfachenden Annahmen. Beispielsweise ist es denkbar, dass die Geräte A nicht so gut verkauft werden können und daher für sie eine gewisse Produktionsbeschränkung eingehalten werden muss. Dies ist im Modell nicht enthalten.

3. Schritt: Lösung der Optimierungsaufgabe

a) Ermitteln der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des linearen Ungleichungssystems I bis IV. Sie wird **zulässiger Bereich** der Optimierungsaufgabe genannt.

$\mathbb{L}$ ist die Durchschnittsmenge der Lösungsmengen der Ungleichungen I bis IV und wird graphisch (Abb. 9.8) ermittelt. Dabei besagen die Ungleichungen I und II nur, dass $\mathbb{L}$ im ersten Quadranten liegen muss. Die Randgeraden von Ungleichung III und IV sind:

g_3: $4x + 2y = 40$

g_4: $x + 2y = 28$.

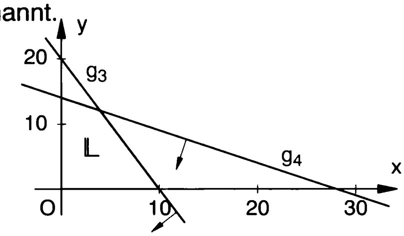


Abb. 9.8 Zulässigkeitsbereich

Der zulässige Bereich ist graphisch ein konvexes Vieleck (Vieleck ohne einspringende Ecken) und wird auch Planungsvieleck genannt.

b) Aus der Menge aller Zahlenpaare des zulässigen Bereichs ist nun jenes (oder jene?) herauszufinden, das die Zielfunktion maximal macht. Dazu bringen wir die Zielfunktion $z = 600 \cdot x + 400 \cdot y$ auf die Form $y = k \cdot x + d$:

$y = -\frac{600}{400} \cdot x + \frac{z}{400} = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{z}{400}$.

Dann gehen wir wie folgt vor. Zunächst wird der Gewinn z gleich 0 gesetzt und man zeichnet (Abb. 9.9) dementsprechend die Gerade $y = -\frac{3}{2} \cdot x$. Wächst z, so wird dadurch der Ordinatenabstand $d = \frac{z}{400}$ größer. Verschiebt man daher die Gerade $y = -\frac{3}{2} \cdot x$ so lange parallel im zulässigen Bereich $\mathbb{L}$, bis die verschobene Gerade noch einen gemeinsamen Punkt mit diesem hat, so ist in diesem Punkt mit d auch der Gewinn z maximal.

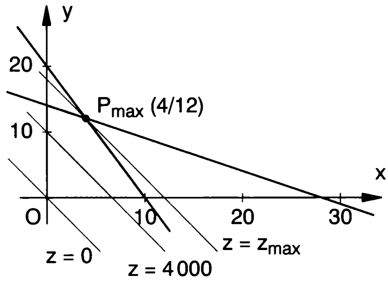


Abb. 9.9 Ermitteln des Maximums

Aus Abb. 9.9 liest man ab, dass dies im Punkt P (4/12) der Fall ist; d.h. der Gewinn ist maximal, wenn man 4 Stück vom Gerät A und 12 Stück vom Gerät B herstellt. Der dabei erzielte maximale Gewinn ist

$z_{max} = 600 \cdot 4 + 400 \cdot 12 =$ € 7200,–.

Da es bei graphischen Lösungen immer eine gewisse Ungenauigkeit gibt, kann eine *rechnerische "Nachbesserung"* empfehlenswert sein. Dies ist besonders bei schleifenden Schnitten von Geraden angebracht. In unserer Aufgabe liegt die Lösung im Schnittpunkt der Geraden g_3 und g_4.

g_3: $4x + 2y = 40$

g_4: $x + 2y = 28$

Löse dieses Gleichungssystem und zeige damit, dass x = 4 und y = 12 ist.

Anmerkungen:

(1) Bei diesem Beispiel war eine Lösung (x, y) gesucht, bei der x und x natürliche Zahlen sein müssen. Wir könnten dies auch zum Ausdruck bringen, dass die Grundmenge des linearen Systems $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist. Man spricht in diesem Fall von "ganzzahliger linearer Optimierung". Sind die Lösungswerte nicht von vornherein ganzzahlig, so verschiebt man die Zielfunktionsgerade so lange, bis man den optimalen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten erreicht hat.

(2) Wir haben die Lösung graphisch erhalten. Dies ist möglich, wenn nur zwei Variable in der Aufgabenstellung vorkommen. Damit kann die grundsätzliche Vorgangsweise gezeigt werden. Auf rechnerische Verfahren kann nicht eingegangen werden.

Beispiel 9.12 : Minimumaufgabe

Ein Unternehmen muss täglich mindestens 120 hl Abwässer entsorgen. Dafür kommen zwei Frächter A und B in Frage. A kann pro Fahrt bis zu 20 hl, B bis zu 8 hl befördern. Aus Personalgründen kann A jedoch höchstens 4 Fahrten, B höchstens 10 Fahrten anbieten. A verlangt pro Fahrt € 400,–, B pro Fahrt € 300,–. Wie muss das Unternehmen die Fahraufträge verteilen, damit die Beförderungskosten minimal bleiben?

Lösung

Wir schreiben die Angabe wieder in Tabellenform:

	Maximale Beförderung pro Fahrt	Höchstzahl der Fahrten	Kosten pro Fahrt
Frächter A	20 hl	4	€ 400,–
Frächter B	8 hl	10	€ 300,–

1. Schritt: Einführung der Variablen und Aufstellen der Zielfunktion

x ... Anzahl der Fahrten von A;
y ... Anzahl der Fahrten von B
z ... anfallende Kosten für die Fahrten; $z = f(x, y) = 400 \cdot x + 300 \cdot y \rightarrow$ **Minimum**

2. Schritt: Aufstellen der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 20x + 8y &\geqslant 120 \\ x &\leqslant 4 \\ y &\leqslant 10 \end{aligned}$$

Dazu kommen noch Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geqslant 0$ und $y \geqslant 0$.
Zusammengefaßt laut das mathematische Modell unseres Optimierungsproblems:

$$\begin{array}{lr} \text{I:} & x \geqslant 0 \\ \text{II:} & y \geqslant 0 \\ \text{III:} & 20x + 8y \geqslant 120 \\ \text{IV:} & x \leqslant 4 \\ \text{V:} & y \leqslant 10 \end{array}$$

Zielfunktion: $z = 400 \cdot x + 300 \cdot y \rightarrow$ Minimum

3. Schritt: Lösung der Optimierungsaufgabe

Wegen der Nichtnegativitätsbedingungen muss der zulässige Bereich wieder im ersten Quadranten liegen.

Die Randgerade $y = 10$ begrenzt ihn nach oben, die Gerade $x = 4$ nach rechts.

Die Ungleichung $20x + 8y \geqslant 120$ oder $y \geqslant -\frac{5}{2} \cdot x + 15$ zeigt, dass die y-Werte der gesuchten Halbebene oberhalb der Randgerade $y \geqslant -\frac{5}{2} \cdot x + 15$ liegen. Dies zeigt sich auch, wenn man den Testpunkt O (0/0) in die Ungleichung einsetzt: seine Koordinaten erfüllen diese nicht, somit ist dieser Punkt nicht in der "richtigen" Halbebene. Abb. 9.10 zeigt den zulässigen Bereich $\mathbb{L}$.

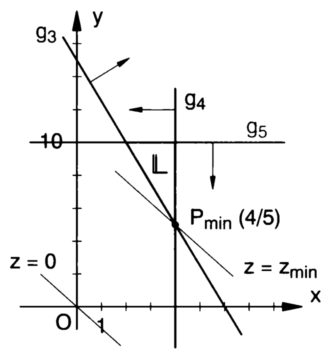


Abb. 9.10 Minimumaufgabe

Wir bringen dann die Zielfunktion $z = 400 \cdot x + 300 \cdot y$ wieder auf die Form $y = k \cdot x + d$: $y = -\frac{4}{3} \cdot x + \frac{z}{300}$. Dann zeichnen wir die Gerade mit den Kosten $z = 0$: $y = -\frac{4}{3} \cdot x$. Verschieben wir diese Gerade parallel in Richtung des zulässigen Bereichs, so steigen die Kosten z. Im Punkt P (4/5) erreicht sie mit *kleinstem* z den zulässiger Bereich. Die Kosten sind minimal, wenn der Frächter A 4 Fahrten und der Frächter B 5 Fahrten macht. Sie betragen:

$z_{min} = 4 \cdot 400 + 5 \cdot 300 =$ € 3100,–.

Man kann wieder die gefundene Lösung rechnerisch bestätigen, wenn man die Geraden g_3 und g_4 zum Schnitt bringt, d.h. das Gleichungssystem

g_3: $20x + 8y = 120$
g_4: $x = 4$

löst, was natürlich hier nur ein Einsetzen von $x = 4$ in die obere Gleichung bedeutet, um $y = 5$ zu erhalten.

Bei den bisher besprochenen Beispielen trat die optimale Lösung stets in einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs auf. Dass dies kein Zufall ist, besagt der

Hauptsatz der Linearen Optimierung:
Besitzt eine lineare Optimierungsaufgabe eine optimale Lösung, so kann sie nur am **Rand** des zulässigen Bereichs liegen. In diesem Fall liegt sie stets in (mindestens) einem **Eckpunkt** des zulässigen Bereichs.

Zur rechnerischen Bestimmung könnte man daher auch die Schnittpunkte aller Begrenzungsgeraden des zulässigen Bereichs bestimmen. Setzt man die Schnittpunktkoordinaten in die Zielfunktion ein, so findet man also im Allgemeinen in einem Eckpunkt ihr Maximum bzw. Minimum.

Die lineare Optimierung findet vielfach Anwendung. Dies kann bei der Bestimmung eines optimalen Schichtplanes (in Betrieben, auf Baustellen, in Versorgungseinrichtungen, usw.), der Ermittlung des optimalen Verkehrsflusses in einer Stadt oder die Aufstellung des kostengünstigsten Transportplanes sein.

Im Überblick: Lineare Optimierung

In einer linearen Optimierungsaufgabe wird nach dem Maximum oder Minimum einer linearen Funktion, der **Zielfunktion** gesucht. Dabei müssen ihre Variablen ein System von linearen Ungleichungen, die **Nebenbedingungen**, erfüllen. In diesem Fall sagt man auch, dass die Variablen im **zulässigen Bereich** liegen.

Hauptsatz der Linearen Optimierung:
Die Zielfunktion erreicht ihr Maximum oder Minimum stets am **Rand** des zulässigen Bereichs (wenn der zulässige Bereich nicht leer oder unbeschränkt ist und wenn die Grundmenge $\mathbb{R}^2$ ist). Im *Allgemeinen* ist die Lösung eindeutig und liegt in einem **Eckpunkt**!

Liegen nur **zwei Variable** vor, so kann die Lösung in einfacher Weise **graphisch** erfolgen.
Dabei wird zuerst der zulässige Bereich durch Zeichnen der Randgeraden ermittelt, die zu den linearen Ungleichungen gehören; ist dieser nicht leer oder unbeschränkt, so ist er ein Vieleck mit nicht einspringenden Ecken (konvexes Vieleck).
Die Punkte, für die die Zielfunktion konstant ist, liegen auf einer Geraden. Man zeichnet eine solche Gerade, etwa jene durch den Ursprung, und verschiebt sie parallel, bis sie den Eckpunkt (eventuell die Linie zwischen zwei Eckpunkten) mit optimalem Zielfunktionswert erreicht. Dessen Koordinaten sind die gesuchten Variablenwerte.

Aufgaben

9.35 Löse folgende Optimierungsaufgaben:

a)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x \geqslant 0 \\ \text{II:} & y \geqslant 0 \\ \text{III:} & x \leqslant 4 \\ \text{IV:} & x + y \leqslant 6 \\ \text{V:} & -x + 2y \leqslant 6 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{z = 3x + 4y \rightarrow \text{Maximum}} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x \geqslant 3 \\ \text{II:} & y \geqslant 3 \\ \text{III:} & x + y \geqslant 8 \\ \text{IV:} & 3x + 2y \leqslant 30 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{z = x + 2y \rightarrow \text{Minimum}} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x \geqslant 0 \\ \text{II:} & y \geqslant 0 \\ \text{III:} & x \leqslant 3 \\ \text{IV:} & x + y \leqslant 7 \\ \text{V:} & -x + 2y \geqslant 2 \\ \hline & z = 2x + y \rightarrow \text{Maximum} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x \leqslant 6 \\ \text{II:} & y \leqslant 5 \\ \text{III:} & 5x + 2y \geqslant 16 \\ \text{IV:} & x + 2y \geqslant 8 \\ \text{V:} & 2x + 3y \leqslant 24 \\ \hline & z = x + 3y \rightarrow \text{Minimum} \end{array}$$

9.36 Wie Beispiel 9.11, Seite 266, jedoch konnte an beiden Montageplätzen die Zeit für den Zusammenbau für das Gerät B halbiert werden. Welche Auswirkungen hat das auf den maximalen Gewinn?

9.37 **a)** Für den Zusammenbau zweier verschiedener Typen von Tischlampen L_1 und L_2 sind zwei Mitarbeiter M_1 und M_2 für unterschiedliche Arbeiten eingesetzt:
M_1 ist mit L_1 2 min und mit L_2 7 min,
M_2 ist mit L_1 8 min und mit L_2 4 min durchschnittlich beschäftigt.
Der (Rein-)Gewinn pro Stück ist bei L_1 gleich € 100,– bei L_2 gleich € 200,–. Wie viele Lampen der beiden Typen müssen pro Halbtag (= 4 Stunden) hergestellt werden, wenn der Gewinn größtmöglich sein soll?

b) Der Mitarbeiter M_1 steht nur die halbe Zeit von a) zur Verfügung. Welche Auswirkung hat dies?

9.38 Bei einem Autozulieferer werden auf zwei Automaten Zubehörteile Z_1 und Z_2 gefertigt. Für Z_1 wird der Automat I 24 Minuten und der Automat II 16 Minuten benötigt; für Z_2 wird der Automat I 12 Minuten und der Automat II 24 Minuten benötigt. Beide Automaten stehen täglich 8 Stunden zur Verfügung. Für Z_1 wird ein Gewinn von € 600,– und für Z_2 ein Gewinn von € 400,– erzielt. Bei welchen täglichen Fertigungszahlen wird der Gewinn maximal?

9.39 Eine Firma bestellt zu Werbezwecken bei einer Druckerei Broschüren in einer guten Qualität A zum Stückpreis von € 1,2 und in einer einfacheren Qualität zum Stückpreis von € 0,4. Sie braucht mindestens 600 Stück von A und mindestens 400 Stück von B. Die Mindestmenge, ab der die Druckerei den Auftrag annimmt, ist 1400 Stück. Wie viele Broschüren von Qualität A und von Qualität B soll die Firma bestellen, um die anfallenden Kosten zu minimieren?

9.40 Für die Anfertigung eines Werkstückes A wird eine Drehmaschine 5 Minuten und eine Hobelmaschine 2 Minuten benötigt. Für ein zweites Werkstück B wird die Drehmaschine 2 Minuten und die Hobelmaschine 4 Minuten benötigt. Die Drehmaschine steht täglich 3 Stunden und die Hobelmaschine 4 Stunden zur Verfügung. Es sollen täglich insgesamt mindestens 60 Werkstücke angefertigt werden. Die Eigenkosten betragen beim Werkstück A € 60,– und bei B € 90,–. Welche Anzahlen der beiden Werkstücke sind herzustellen, damit die Eigenkosten minimal sind?

9.41 Eine kleine Fluglinie erhält von einem Reiseunternehmen den Auftrag, für ein Urlaubsprogramm täglich mindestens 600 Personen sowie zusätzlich mindestens 12000 kg Nutzlast zu befördern. Um diesen Auftrag zu erfüllen, muss die Fluglinie Flugzeuge mieten. Zur Auswahl stehen zwei Typen A und B: Typ A kann höchstens 40 Personen sowie 1000 kg Nutzlast, Typ B höchstens 56 Personen sowie 800 kg Nutzlast befördern. Die Mietkosten betragen € 40000 für den Typ A sowie € 50000 für den Typ B jeweils pro Maschine.
Wie viele Flugzeuge müssen von jedem Typ angemietet werden, wenn die gesamten Mietkosten kleinstmöglich sein sollen? Wie groß sind die Mietkosten und wie groß ist in beiden Fällen die Auslastung?

10 Beschreibende Statistik

10.1 Darstellung von Daten

Die Erfahrung zeigt, dass die Werte eines **Merkmales**, etwa

des elektrischen Widerstandes bestimmter elektronischer Bauteile,
der Profiltiefe von PKW-Reifen,
der Füllmenge von Milchpackungen,
der Anzahl fehlerhafter Stanzteile in einer Tagesproduktion,
der Lebensdauer gleichartiger Glühlampen usw.

unter gleich gehaltenen Bedingungen **nicht gleich** sind. Sie **streuen** in einem gewissen Bereich, auch wenn versucht wird, einen Sollwert einzuhalten.

Dieser Streuung von Merkmalswerten begegnen wir praktisch überall. So streuen die Körpergröße von Personen gleichen Alters, eine bestimmte sportliche Leistung einer Person über mehrere Wochen, die Anzahl der Verkehrsunfälle pro Jahr, der Ernteertrag einer bestimmten Frucht, die jährliche Niederschlagsmenge an verschiedenen Orten eines Landes, usw. Wir werden uns besonders mit Anwendungen aus dem Bereich der Qualitätssicherung befassen.

Kennzeichnend für statistische Methoden ist, dass sie sich auf *quantitative* Informationen ("Daten") stützen. Damit wird versucht, **Gesetzmäßigkeiten** bei Größen zu erkennen, die von vielen, praktisch nicht erfassbaren Ursachen abhängen. Solche Gesetzmäßigkeiten lassen sich nicht auf die *einzelnen* Elemente beziehen.

So lässt sich auch über die Lebensdauer eines einzelnen Menschen (oder eines technischen Bauteiles) keine genaue Vorhersage treffen; dies trifft nicht mehr auf eine Bevölkerungsgruppe zu, wenn man auf Grund von Beobachtungen Gesetzmäßigkeiten festgestellt hat. So können Lebensversicherungen (altersabhängige) Prämien vorschreiben, weil sie ziemlich genau wissen, wie viele beispielsweise heute 30-jährige Personen in einer gewissen Anzahl von Jahren noch leben werden. Der Betreiber eines Kasinos kann mit einem Gewinn rechnen, nicht jedoch ein einzelner Spieler. Statistische Methoden finden praktisch in allen Lebensbereichen Anwendung.

Aus wirtschaftlichen Gründen oder anderen Gründen ist man in der Regel nicht in der Lage, eine "100%-Prüfung" oder eine Vollerhebung in einer **Grundgesamtheit** zu einem bestimmten Merkmal durchzuführen. Die Grundgesamtheit besteht aus allen interessierenden Einheiten (Personen einer Stadt, Werkstücken einer Lieferung, ...). Man ist auf eine Auswahl der möglichen Einheiten, eine **Stichprobe**, angewiesen.

Die Stichprobendaten werden zuerst in übersichtlicher Form dargestellt. Zusätzlich werden aus ihnen mehrere Kenngrößen berechnet, die über die vorliegende Stichprobe möglichst viel Information liefern sollen. Bis hierher spricht man von einer **beschreibenden Statistik**.

Die Auswertung von Stichproben bleibt jedoch nicht bei deren Beschreibung stehen, sondern versucht mit Hilfe der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** den Stichprobenbefund auf die Grundgesamtheit zu verallgemeinern ("hochzurechnen"). Die dabei angewandten statistischen Verfahren werden unter dem Namen **schließende** (auch beurteilende) **Statistik** zusammengefasst.

Gegenstand dieses Bandes sind Hinweise, wie man einmal Daten in Form von Tabellen oder graphisch praktisch brauchbar darstellt. Zum anderen werden wir gewisse Kennzahlen zur kurzen Beschreibung der Stichproben kennen lernen.

Merkmalsarten

Bei jeder Einheit einer Stichprobe (Person, Bolzen, Spritzgussteil, ...) wird ein Merkmal oder auch mehrere Merkmale betrachtet. Abb. 10.1 zeigt die beiden Überbegriffe der Merkmalsarten.

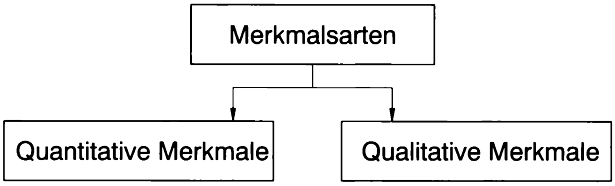


Abb. 10.1 Merkmalsarten

Quantitative Merkmale: Differenzen der Merkmalswerte (Beispiele: Celsiustemperatur, Kalenderwoche) oder sogar Verhältnisse der Merkmalswerte (Beispiele: Körpergröße, Bolzendurchmesser, Beschäftigtenzahl) sind sinnvoll.

Qualitative Merkmale: Sinnvoll ist nur die Unterscheidung zwischen gleich/ungleich (Beispiel: Beruf, Autofarbe) oder zusätzlich kleiner/größer (Beispiel: Schulnote, Produktgüteklasse).

Je nach Art des Merkmals werden unterschiedliche Methoden bei der Beschreibung der Daten verwendet.

Statistische Erhebungen beginnen in der Regel damit, dass die beobachteten Ergebnisse nacheinander (oft in Formularen) notiert werden. Die so entstehende Liste wird als **Urliste** bezeichnet.

Beispiel 10.1 : Darstellung kleiner Stichproben

Einer Lieferung von Kondensatoren werden 20 Stück entnommen und ihre Kapazität gemessen. Es ergeben sich folgende Werte (in nF) als Urliste:

53 47 52 49 50 50 47 43 48 50

51 53 54 56 52 46 49 51 50 49.

Gesucht ist eine **übersichtliche Darstellung der Daten**.

Lösung

Für eine Übersicht der Daten (Abb. 10.2) in **Tabellenform** schreibt man alle Werte vom kleinsten bis zum größten Stichprobenwert untereinander auf. Dann geht man die Urliste durch und notiert jeden Stichprobenwert als Strich in der entsprechenden Zeile. Man erhält eine sogenannte **Strichliste**. Nach Fertigstellung der Strichliste notiert man in jeder Zeile die Anzahl der Striche, also die Häufigkeit, mit welcher der entsprechende Wert vorkommt. Diese Anzahl heißt **absolute Häufigkeit**; dividiert man ihn durch den Stichprobenumfang $n = 20$, so erhält man (nach Multiplikation mit 100) die **relative Häufigkeit** in % des betreffenden Wertes, die auch **prozentuelle Häufigkeit** genannt wird.

Werte	Strichliste	absolute Häufigkeit	prozentuelle Häufigkeit	Häufigkeitssumme (in %)
43	|	1	5%	5
44		0	0%	5
45		0	0%	5
46	|	1	5%	10
47	||	2	10%	20
48	|	1	5%	25
49	|||	3	15%	40
50	||||	4	20%	60
51	||	2	10%	70
52	||	2	10%	80
53	||	2	10%	90
54	|	1	5%	95
55		0	0%	95
56	|	1	5%	100

Abb. 10.2 Häufigkeitstabelle

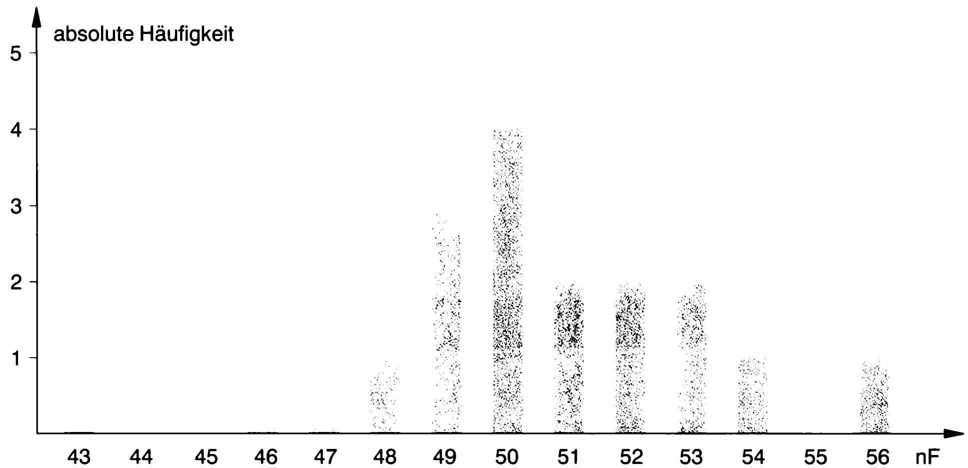


Abb. 10.3 Stabdiagramm

Neben der Darstellung in Tabellenform gibt es noch **graphische** Darstellungen. Im **Stabdiagramm** (Abb. 10.3) zeichnet man über jedem Wert einen vertikalen "Stab", dessen Länge gleich der absoluten Häufigkeit (oder auch der prozentuellen Häufigkeit) dieses Wertes ist.

Bei einem qualitativen Merkmal ohne natürliche Rangordnung (z.B.: Staatszugehörigkeit, Beruf, Autofarbe) kann man die Stäbe nach fallender Häufigkeit anordnen. Ein derartiges Stabdiagramm wird **Pareto[10]-Diagramm** genannt. Die Stäbe werden hier häufig ohne Zwischenraum gezeichnet.

10 Vilfredo PARETO, 1848 – 1923, ital. Nationalökonom

Beispiel 10.2 : Pareto-Diagramm

In Abb. 10.4 zeigt eine "Fehlersammelliste" eines Blechteils. Das Merkmal "Blechfehler" hat verschiedene Werte wie "Kratzer", "Delle", usw.

Um das Ausmaß der wichtigsten Fehlerarten zu erkennen, sollen die Häufigkeiten größenmäßig geordnet als Stäbe (Balken) auf der x-Achse aufgetragen werden.

Lösung

Fehler-Nr.	Fehlerart	Häufigkeit
1	Delle	卌 III
2	Kratzer	卌 卌 卌 卌 卌 I
3	Korrosion	IIII
4	Lackfehler	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 III
5	Verbogen	IIII
6	Gerissen	II
7	Maßfehler	II
8	Bohrfehler	III
9	Sonstige	III

Abb. 10.4

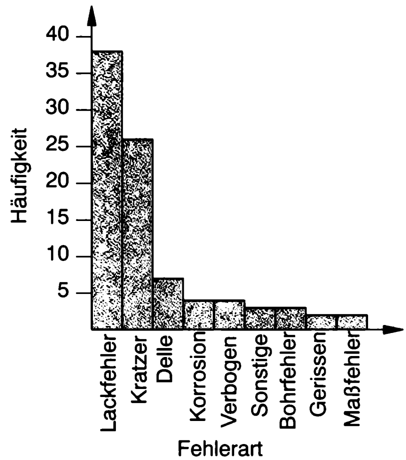


Abb. 10.5

Beispiel 10.3 : Kreisdiagramm

Zeichne ein Kreisdiagramm zur Fehlersammelliste in Abb. 10.4.

Lösung

Zu jeder Fehlerart wird ein Kreissektor gebildet, dessen Fläche und daher auch dessen Mittenwinkel ω proportional zu den Häufigkeiten gewählt werden.

Z.B. Mittenwinkel für den Lackfehlersektor:

Von den insgesamt 90 erfassten Fehlern entfällt der Anteil $\frac{38}{90}$ auf die Lackfehler.

Somit: $\omega = \frac{38}{90} \cdot 360° = 152°$.

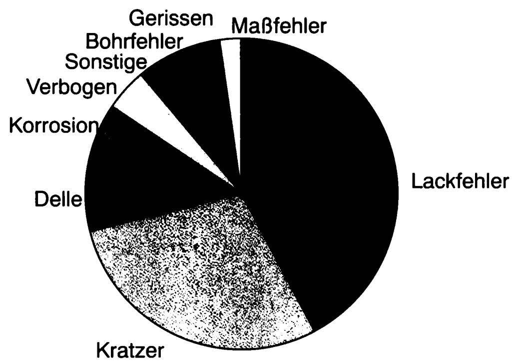


Abb. 10.6 Kreisdiagramm

Besitzt die Stichprobe viele Werte eines quantitativen Merkmals (etwa mehr als 50), so sind die bisherigen Darstellungen meist unübersichtlich. In diesem Fall sollte man die Werte in **Klassen** einteilen.

Beispiel 10.4 : Darstellung großer Stichproben

Längenmessungen an 80 Werkstücken ergaben folgende Werte (in mm):

93,0	88,2	92,1	91,0	86,9	93,8	91,0	92,0	87,4	92,1
92,7	93,3	88,8	91,5	90,4	88,1	89,7	88,9	92,7	91,4
89,6	89,4	87,3	86,5	90,8	90,3	86,9	91,2	89,3	90,4
94,2	90,4	90,8	91,9	90,8	92,4	88,3	92,0	87,3	93,8
90,6	88,0	94,0	90,9	88,0	93,1	91,7	89,7	92,7	89,5
90,7	89,3	89,3	86,5	88,9	87,5	88,2	88,7	90,2	86,3
93,9	86,4	90,6	87,9	85,0	89,1	91,8	92,3	87,9	95,4
89,7	90,9	90,4	91,2	85,5	90,7	93,6	89,9	92,9	92,2

Gesucht ist eine **übersichtliche Darstellung der Daten**.

Lösung

Jede Klasseneinteilung bedeutet einen Informationsverlust, da nur noch mitgeteilt wird, wie viele Merkmalswerte in einer bestimmten Klasse liegen, jedoch nicht mehr, wo sie zwischen den Klassengrenzen liegen. Viele Klassen bedeuten weniger Informationsverlust, wenige Klassen jedoch bessere Übersicht. Es gilt dazwischen einen Kompromiss zu finden. Daraus empfiehlt sich eine Klassenanzahl, die etwa gleich der Wurzel aus dem Stichprobenumfang n ist. Im Folgenden ist eine mögliche Vorgangsweise bei der Klassenbildung angegeben.

Richtlinien für die Klassenbildung:

(1) Die Klassengrenzen sollen möglichst einfache Zahlen sein und bei gerundeten Daten mit den Rundungsgrenzen zusammenfallen.

(2) Man sucht den Kleinstwert x_{min} und den Größtwert x_{max} der Werte; in unserem Beispiel ist x_{min} = 85,0 mm und x_{max} = 95,4 mm. Als *unterste* Klassengrenze können wir die untere Rundungsgrenze von x_{min}, also 84,95 mm, wählen.

(3) Alle Klassen werden *gleich breit* gewählt. Als Richtwert für die Anzahl der Klassen kann $\sqrt{n}$ (n Stichprobenumfang) genommen werden. Ist $n \geqslant 400$, bleibt die Klassenanzahl bei 20 bestehen.

(4) Die Klassenbreite w ist dann $w = \frac{x_{max} - x_{min}}{\sqrt{n}}$ (für $n < 400$); w wird auf die Genauigkeit der Daten gerundet.

Daher ist im Beispiel $w = \frac{10{,}4}{\sqrt{80}} = 1{,}162... \approx 1{,}2$ (auf Zehntel gerundet); damit lauten die Klassengrenzen (in mm): 84,95 86,15 87,35 usw.

Man trägt nun in einer Tabelle (Abb. 10.7) alle Klassen untereinander auf. Jeder Stichprobenwert wird als Strich in die entsprechende Zeile eingetragen; es entsteht eine **Strichliste**. Jeder fünfte Strich wird quer über die vier vorangehenden Striche gesetzt. Daneben wird noch die **absolute Häufigkeit** oder **Besetzungszahl n_j** sowie die **prozentuelle Häufigkeit f_j** jeder Klasse angeschrieben.

Klasse (in mm)	Strichliste	n_j	f_j
84,95 ... 86,15	||	2	2,50
86,15 ... 87,35	~~||||~~ |||	8	10,00
87,35 ... 88,55	~~||||~~ ~~||||~~	10	12,50
88,55 ... 89,75	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14	17,50
89,75 ... 90,95	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |	16	20,00
90,95 ... 92,15	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13	16,25
92,15 ... 93,35	~~||||~~ ~~||||~~	10	12,50
93,35 ... 94,55	~~||||~~ |	6	7,50
94,55 ... 95,75	|	1	1,25
		80	100,00

Abb. 10.7 Klassierung von Daten

Vorteilhaft ist wieder eine **graphische Darstellung** der Daten. Beim **Histogramm** werden über den Klassen Rechtecke gezeichnet. Jedes Rechteck hat eine Höhe gleich der zugehörigen absoluten oder relativen Häufigkeit (bei ungleichen Klassenbreiten sollten die Rechtecks*flächen* gleich den Häufigkeiten sein).

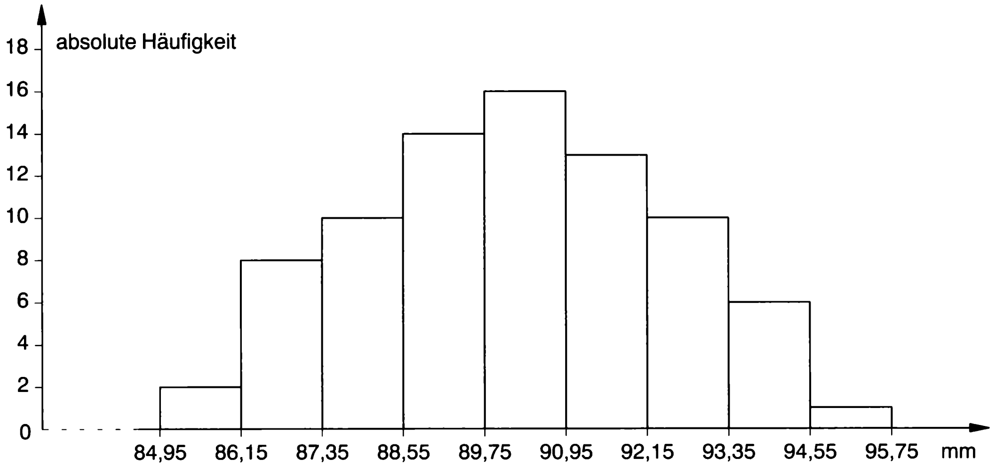


Abb. 10.8 Histogramm

10.2 Kennwerte von Stichproben

Wir suchen nun sogenannte Kennwerte, die stellvertretend für die Stichprobe wesentliche Eigenschaften von ihr beschreiben. Dabei interessieren uns besonders Kennwerte, die ihre **Lage**, sowie solche, die ihre "Breite" oder **Streuung** angeben.

A) Lagekennwerte

Die beiden wichtigsten sind das **arithmetische Mittel** $\bar{x}$ (kurz Mittelwert, Summe aller Merkmalswerte geteilt durch den Stichprobenumfang):

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

sowie der **Median** oder **Zentralwert** $\tilde{x}$. Um den Median der Stichprobe zu erhalten, ordnet man ihre n Werte der Größe nach. Bei *ungerader* Anzahl n ist der Median der Wert genau in der Mitte; ist n *gerade,* so ist der Median das arithmetische Mittel der beiden in der Mitte befindlichen Werte.

Beispiel 10.5 : Lagekennwerte einer Stichprobe

Aus einer Lieferung von elektrischen Widerständen gleicher Art werden einige Stück herausgegriffen und gemessen. Dabei werden folgende Werte x_i gefunden (in Ohm):

a) 98,7 99,3 95,8 101,6 100,4 98,0 96,3

b) 98,7 99,3 95,8 101,6 100,4 98,0 96,3 101,2

Berechne $\bar{x}$ und $\tilde{x}$.

Lösung

Zu **a)** $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{7} \cdot (98{,}7 + \ldots + 96{,}3)\ \Omega = 98{,}59\ \Omega.$

Als Faustregel gilt, dass ein Mittelwert auf eine Stelle genauer als die Messwerte gerundet wird, wenn er *anzuschreiben* ist; ist mit diesem Wert weiterzurechnen, so erfolgt dies mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit.

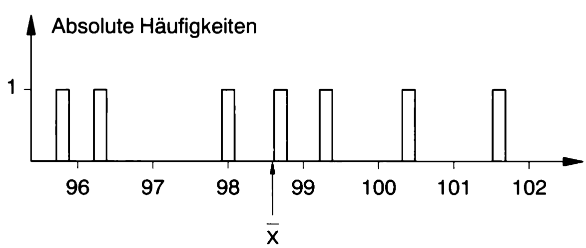


Abb. 10.9 Arithmetischer Mittelwert als Schwerpunktskoordinate

Eine anschauliche Deutung des arithmetischen Mittelwertes $\bar{x}$ als *Schwerpunktskoordinate* gewinnt man, wenn man das Stabdiagramm oder das Histogramm der Datenmenge zeichnet (Abb. 10.9). Denkt man sich die Stäbe (oder Rechtecke im Falle eines Histogramms) als Massen, die man an $\bar{x}$ unterstützt, so besteht Gleichgewicht.

Zur Ermittlung des Medians ordnen wir die Werte der Größe nach:

95,8 96,3 98,0 98,7 99,3 100,4 101,6;

der genau in der Mitte stehende Wert 98,7 ist der Median $\tilde{x}$.

Zu **b)** $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8} \cdot (98{,}7 + \ldots + 101{,}2)\ \Omega = 98{,}91\ \Omega.$

Ist die Anzahl der Messwerte eine *gerade* Zahl, so ist der Median das arithmetische Mittel der beiden Werte in der Mitte der geordneten Folge:

95,8 96,3 98,0 98,7 99,3 100,4 101,2 101,6;

$$\tilde{x} = \frac{98{,}7 + 99{,}3}{2}\ \Omega = 99{,}0\ \Omega.$$

Quartile

Der Mittelwert $\bar{x}$ kann nur bei quantitativen Merkmalen bestimmt werden. Die sogenannten **Quartile** können *auch* noch bei qualitativen Merkmalen mit einer natürlichen Rangordnung (Unterscheidung sowohl gleich/ungleich als auch kleiner/größer) ermittelt werden.

Durch den Median $\tilde{x}$ werden die aufsteigend geordneten Stichprobendaten in einen unteren und oberen Teil zerlegt. Das untere Quartil q_1 ist der Median des unteren Teils, das obere Quartil q_3 der Median des oberen Teils. Das Quartil q_2 ist der Median $\tilde{x}$. Eine geordnete Stichprobe wird somit durch die Quartile q_1, q_2 und q_3 "geviertelt".

Beispiel (Abb. 10.10):

Sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 die geordneten Stichprobendaten, so ist $q_2 = \tilde{x} = 5$; q_1 ist der Median des unterhalb von $\tilde{x}$ liegenden Teils, also $q_1 = 2{,}5$. q_3 ist der Median des oberhalb von $\tilde{x}$ liegenden Teils, also $q_3 = 7{,}5$.

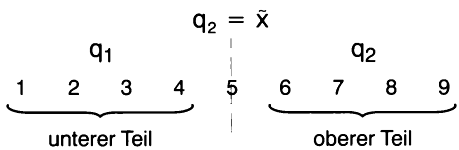


Abb. 10.10

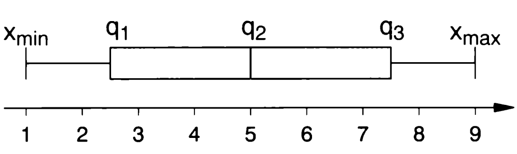


Abb. 10.11 Box Plot

Zur graphischen Veranschaulichung der Verteilung der Stichprobendaten kann nun auch das **Kastenschaubild (Box Plot)** dienen. Es lässt die Lage der drei Quartile sowie des Kleinstwertes x_{min} und Größtwertes x_{max} erkennen.

Zwischen

x_{min} und q_1,
q_1 und q_2,
q_2 und q_3 sowie
q_3 und x_{max}

liegt jeweils (etwa) ein Viertel der Daten.

B) Streuungskennwerte

Beispiel 10.6 : Wie kann man die Streuung messen?

Angenommen, es liegen die folgenden zwei Datenmengen vor (etwa die Anzahlen unbrauchbarer Spritzgussteile in fünf Lieferungen zweier Lieferanten A und B):

Daten A: 1, 1, 3, 5, 5; Daten B: 1, 2, 3, 4, 5.

Wir stellen schnell fest, dass beide Datenmengen trotz unterschiedlicher "Streuung" den arithmetischen Mittelwert $\bar{x} = 3$ haben. Kann man angeben, wie groß die *Streuung* in den beiden Datenmengen ist? Wo ist sie größer?

Lösung

Zu entscheiden ist zuerst, was wir als Zentrum einer Datenmenge sehen, um das die einzelnen Daten streuen. Wir entscheiden uns für das arithmetische Mittel $\bar{x}$ (es hätte auch der Median $\tilde{x}$ sein können, der in unseren beiden Datenmengen nur zufällig gleich $\bar{x}$ ist).

1. Versuch: Mittel der Differenzen $x_i - \bar{x}$

Daten A: $\frac{1}{5} \cdot [(1-3) + (1-3) + (3-3) + (5-3) + (5-3)] = 0.$

Daten B: $\frac{1}{5} \cdot [(1-3) + (2-3) + (3-3) + (4-3) + (5-3)] = 0.$

Dieses Ergebnis erhält man, wie gezeigt werden kann, auch für jede beliebige andere Datenmenge. Damit ist der Durchschnitt der Differenzen als Streuungsmaß natürlich ungeeignet.

2. Versuch: Mittel der Abstände:

Daten A: $\frac{1}{5} \cdot [|1-3| + |1-3| + |3-3| + |5-3| + |5-3|] = \frac{8}{5} = 1{,}6.$

Daten B: $\frac{1}{5} \cdot [|1-3| + |2-3| + |3-3| + |4-3| + |5-3|] = \frac{6}{5} = 1{,}2.$

Mit diesem Maß haben die Daten A eine höhere Streuung als B.

3. Versuch: Mittel der quadrierten Differenzen:

Daten A: $\frac{1}{5} \cdot [(1-3)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2 + (5-3)^2] = \frac{16}{5} = 3{,}2.$

Daten B: $\frac{1}{5} \cdot [(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2] = \frac{10}{5} = 2.$

Auch mit diesem Maß haben die Daten A eine höhere Streuung als B. Für dieses Streuungsmaß, es wird auch als die **mittlere quadratische Abweichung** bezeichnet, sprechen jedoch einige Gründe: Einmal vermeidet man das Rechnen mit Beträgen. Weiters "bestraft" Quadrieren eine größere Abweichung, da Quadrate (von Zahlen > 1) größer sind als die ursprünglichen Zahlen. Und schließlich – so kann man zeigen – harmoniert der Durchschnitt der quadrierten Differenzen gut mit dem Mittelwert $\bar{x}$: jeder andere Wert als Streuungszentrum macht ihn größer.

! Geht es um die Streuung in einer **Stichprobe**, so werden die quadrierten Differenzen nicht durch n, sondern **durch (n – 1) dividiert**. Der Hauptgrund ist, dass die durch (n – 1) dividierte Summe bessere Schätzeigenschaften für die schließende Statistik besitzt. Das so definierte Streuungsmaß wird mit s^2 bezeichnet und heisst (Stichproben-)Varianz", die Wurzel daraus (Stichproben-)Standardabweichung s.

Sind die vorliegenden Daten bereits die *Gesamtheit* der interessierenden Werte, so bleibt der Nenner n. Diese mittlere quadratische Abweichung wird oft mit dem Buchstaben σ^2 bzw. nach dem Wurzelziehen mit σ bezeichnet.

Wir fassen zusammen:

> Ein Maß dafür, wie sehr **Stichprobenwerte** x_i eines quantitativen Merkmals um ihren Mittelwert $\bar{x}$ streuen, ist die **Standardabweichung s**; ihr Quadrat heißt **(Stichproben-)Varianz s^2**.
>
> $$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Man bildet also die Differenz *jedes* Messwertes x_i zu $\bar{x}$, quadriert und addiert dann alle so erhaltenen Quadrate. Anschließend ist durch n – 1 zu dividieren und die Wurzel zu ziehen.

s wie auch s^2 können nicht negativ werden. Sie sind nur dann null, wenn alle x_i gleich groß sind. Auch hier kann als Faustregel gelten, dass s um eine Stelle genauer als die Stichprobenwerte x_i gerundet *angeschrieben* wird.

s hat die gleiche Einheit wie die Stichprobenwerte x_i (z.B. mm, kg, ...). Es lässt sich nachweisen, dass s größer als der *mittlere* Abstand aller Werte x_i von $\bar{x}$ ist. *s gibt daher eine obere Schranke an, wie weit im Mittel die Stichprobenwerte vom arithmetischen Mittel entfernt sind.* Die Varianz s^2 kann mechanisch (näherungsweise) als Trägheitsmoment einer Massenverteilung (Gesamtmasse 1) entsprechend dem Stabdiagramm der Stichprobe bei einer Drehung um eine Achse durch den Schwerpunkt gedeutet werden.

Die Berechnung von s^2 bzw. s erfolgt numerisch günstiger nach der folgenden gleichwertigen Formel:

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)}$$

Liegen die Daten klassiert vor, so rechnet man näherungsweise mit den Klassenmitten. Ist nun x_j die Klassenmitte, n_j die absolute Häufigkeit der j-ten Klasse und ist k die Klassenanzahl, so lauten nun die Formeln:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{k} n_j \cdot x_j$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot x_j^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

Ein weiteres, eher grobes Streuungsmaß ist die **Spannweite R** (engl. range). Sie ist die Differenz aus dem größten und kleinsten Stichprobenwert:

> **Spannweite**
>
> $R = x_{max} - x_{min}$

R ist leichter zu berechnen als s, lässt aber alle Werte außer dem größten und kleinsten unberücksichtigt, wodurch vorhandene Information nicht genützt wird.

Beispiel 10.7 : Streuungskennwerte einer Stichprobe

Berechne Varianz, Standardabweichung und Spannweite der Stichprobe aus Beispiel 10.5 a) bzw. b), Seite 278.

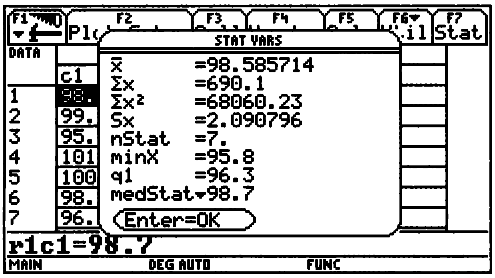
Lösung

$s^2 = \frac{1}{6} \cdot [98{,}7^2 + \ldots + 96{,}3^2 - 7 \cdot \bar{x}^2] = 4{,}37\ \Omega^2$; $\quad s = \sqrt{s^2} = 2{,}09\ \Omega$;

bzw. $s^2 = \frac{1}{7} \cdot [98{,}7^2 + \ldots + 101{,}2^2 - 8 \cdot \bar{x}^2] = 4{,}60\ \Omega^2$; $\quad s = \sqrt{s^2} = 2{,}15\ \Omega$;

$R = 101{,}6 - 95{,}8 = 5{,}8\ \Omega$ in beiden Fällen.

Voyage 200



Im Kapitel 12 wird die Vorgangsweise zur Berechnung der Stichprobenkennwerte $\bar{x}$, $\tilde{x}$ (hier: medStat) und s (hier: Sx) gezeigt.

Standardabweichung s und Spannweite R können nur bei quantitativen Merkmalen gebildet werden. Bei einem qualitativem Merkmal mit einer natürlichen Rangordnung kann als Streuungsmaß noch der sogenannte **Interquartilsabstand** $d = q_3 - q_1$ verwendet werden.

Beispiel 10.8 : Kennwerte einer Stichprobe und Kastenschaubild (Box Plot)

Berechne Mittelwert, Median, unteres und oberes Quartil, Varianz, Standardabweichung, Spannweite und Interquartilsabstand der Stichprobe aus Beispiel 10.1, Seite 273.

Lösung

$\bar{x} = \frac{1}{20}(53 + 47 + \ldots + 49) = 50{,}0$ nF.

$s^2 = \frac{1}{19} \cdot [53^2 + 47^2 + \ldots + 49^2 - 20 \cdot \bar{x}^2] = 8{,}9\ \text{nF}^2$; $\quad s = \sqrt{s^2} = 3{,}0$ nF.

Wie auf Seite 282 gesagt, ist die durchschnittliche Entfernung eines Stichprobenwertes von $\bar{x} = 50{,}0$ nF größer als $s = 3{,}0$ nF.

$R = 56 - 43 = 13$ nF.

Zur Ermittlung des Zentralwertes (Medians) $\tilde{x}$ ordnen wir die Messwerte aufsteigend:

43 46 47 47 48 49 49 49 50 50 50 50 51 51 52 52 53 53 54 56.

Da der Stichprobenumfang n = 20 eine gerade Zahl ist, ist der Zentralwert das arithmetische Mittel der beiden Werte in der Mitte:

$\tilde{x} = q_2 = \frac{1}{2} \cdot (50 + 50) = 50$ nF.

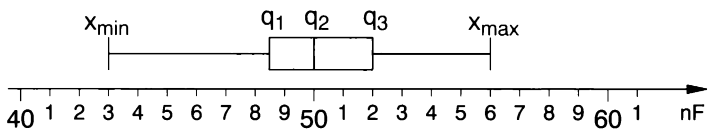


Abb. 10.12

Das untere Quartil q_1 ist der Median des unteren Listenteils 43 46 47 47 48 49 49 49 50 50,

das obere Quartil q_3 der Median des oberen Listenteils 50 50 51 51 52 52 53 53 54 56.

Also: $q_1 = 48{,}5$; $q_3 = 52$.

Interquartilsabstand $d = q_3 - q_1 = 3{,}5$.

Beispiel 10.9 : Kennwerte einer klassierten Stichprobe

Berechne Varianz, Standardabweichung und Spannweite der Stichprobe aus Beispiel 10.4, Seite 276, *nach* ihrer Klassierung.

Lösung

Statt mit den echten Werten kann man näherungsweise mit den Klassenmitten rechnen; hierbei wird jede Klassenmitte so oft berücksichtigt, wie die Besetzungszahl n_j dieser Klasse ist. Die Klassenmitten lauten:

85,55 86,75 87,95 89,15 90,35 91,55 92,75 93,95 95,15.

Die zugehörigen Häufigkeiten n_j sind:

2 8 10 14 16 13 10 6 1.

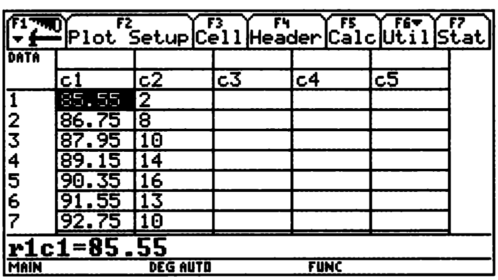
Somit:

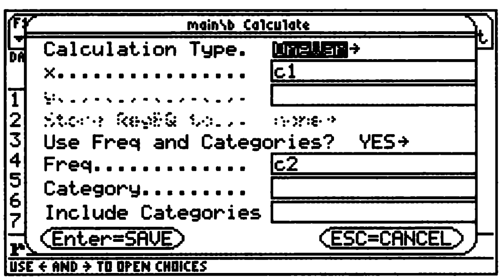
$$\bar{x} \approx \frac{1}{80}\cdot(2\cdot 85{,}55 + 8\cdot 86{,}75 + 10\cdot 87{,}95 + \ldots + 1\cdot 95{,}15)\text{ mm} = 90{,}185\text{ mm} \approx 90{,}19\text{ mm}$$

$$s \approx \sqrt{\frac{1}{79}\cdot(2\cdot 85{,}55^2 + 8\cdot 86{,}75^2 + 10\cdot 87{,}95^2 + \ldots + 1\cdot 90{,}15^2 - 80\cdot 90{,}185^2)}\text{ mm} = \\ = 2{,}26\text{ mm}.$$

Rechnet man mit den 80 Stichprobenwerten, so erhält man $\bar{x} = 90{,}25$ mm sowie $s = 2{,}29$ mm.

Voyage 200





Statt jeden Wert (Klassenmitte) so oft einzugeben wie er auftritt, gibt man in der Spalte c2 die zugehörige Häufigkeit ein. Nach F5 gibt man zusätzlich zu OneVar und c1 noch YES bei Use Freq and Categories sowie c2 bei Freq ein.

Im Überblick: Beschreibende Statistik

Die Statistik versucht **Gesetzmäßigkeiten** bei Größen zu erkennen, die von vielen, praktisch nicht erfassbaren Ursachen abhängen.

Aufgabe der **beschreibenden Statistik** ist es, die Stichprobendaten in übersichtlicher Form darzustellen und mehrere möglichst informative Kenngrößen (Lagemaße, Streuungsmaße, ...) zu berechnen.

Quantitative Merkmale: Differenzen oder sogar Verhältnisse sind sinnvoll.

Qualitative Merkmale: Nur die Unterscheidung zwischen gleich/ungleich oder zusätzlich kleiner/größer ist sinnvoll.

Graphische Darstellung von Stichprobendaten: Stabdiagramm, Histogramm bei klassierten Daten, Pareto-Diagramm, Kreisdiagramm

Lagekennwerte von Stichprobendaten:

Mittelwert $\bar{x}$, Median oder Zentralwert $\tilde{x} = q_2$, unteres Quartil q_1 und oberes Quartil q_3. Die Quartile "vierteln" die geordnete Datenliste.

Streuungskennwerte von Stichprobendaten: Standardabweichung s, Stichprobenvarianz s^2, Spannweite R, Interquartilsabstand d.

Aufgaben

10.1 Mit einem Würfel wurde 20-mal geworfen. Dabei ergaben sich folgende Augenzahlen:
3 2 3 1 6 5 4 3 6 2 6 1 3 5 6 1 4 2 4 2.

a) Stelle die Stichprobe in Tabellenform dar.

b) Zeichne das Stabdiagramm.

c) Berechne $\bar{x}$, $\tilde{x}$, die Quartile q_1 und q_3, s und s^2, R , d.

10.2 Berechne Mittelwert und Standardabweichung folgender Bolzenlängen (in mm):
45,2 45,1 45,1 43,9 45,0 45,2 45,1 44,8 45,2 45,3

10.3 Bei einer Zugfestigkeitsprüfung wird die Reißlast eines speziellen Drahttyps gemessen. Es ergaben sich (Werte in N):
84 83 87 79 81 82 85 84 84 78 82 83 81 85 84 86 89 85 84 83 83 81 82

a) Stelle die Stichprobe in Tabellenform dar.

b) Zeichne das Stabdiagramm.

c) Berechne $\bar{x}$, $\tilde{x}$, die Quartile q_1 und q_3, s und s^2, R , d.

10.4 In einem Betrieb wurde der Zeitaufwand für Schreibarbeiten bei leitenden Angestellten in einem Tag erhoben. Es ergaben sich in Stunden:

2,2 1,1 2,5 2,4 4,5 1,6 0,3 3,5 2,1 3,6 4,5 3,0 4,6 0,0 1,8 1,8 3,4 2,5 2,2

a) Berechne $\overline{x}$, $\tilde{x}$, die Quartile q_1 und q_3, s und s^2, R , d.

b) Zeichne ein Kastenschaubild.

10.5 Eine Überprüfung der Englisch-Kenntnisse an Mitarbeitern in einem Unternehmen ergab:

"sehr gut": 4;
"gut": 12;
"ausreichend": 44;
"mangelhaft": 23;
"unzureichend": 9 Mitarbeiter.

Veranschauliche das Ergebnis durch ein **a)** Pareto-Diagramm **b)** Kreisdiagramm.

10.6 Ermittle Mittelwert, Median, s, s^2 und R der Stichprobe mit folgenden Werten:

a) 41,9 40,6 43,1 40,3 42,1 40,0 40,2

b) 7,91 8,04 8,04 7,93 8,01 7,85 8,03 8,12

10.7 Bei einer Reifenkontrolle an PKWs wurden die Profiltiefen (in mm) ermittelt:

3,6 3,6 4,1 4,6 6,4 5,5 5,4 2,2 2,5 4,3 3,5 3,6 4,5 4,8 5,4.

a) Berechne $\overline{x}$, $\tilde{x}$, die Quartile q_1 und q_3, s und s^2, R , d.

b) Zeichne ein Kastendiagramm.

10.8 Schalter eines bestimmten Typs wurden einer Lebensdauerprüfung unterzogen. Bei 12 Schaltern wurde die Anzahl der Betätigungen bis zum Ausfall gezählt. Dabei ergaben sich folgende Ausfallswerte (in 10^3 Betätigungen):

30,0 19,2 12,5 38,7 5,1 28,4 24,9 53,9 34,5 16,3 11,0 41,1.

a) Zeichne das Stabdiagramm.

b) Berechne Mittelwert, Zentralwert, s und R.

10.9 Folgende Katodenstromstärken werden gemessen (in mA):

50,1 50,0 50,3 49,6 50,2 49,7 49,9 49,9 50,0 50,2 49,8 50,1 49,8 49,9 50,0.

a) Zeichne das Stabdiagramm.

b) Berechne Mittelwert, Zentralwert, s, s^2 und R.

10.10 Ein bestimmter Test wurde in zwei Klassen durchgeführt. Die erste Klasse mit 25 Schülern erreichte eine durchschnittliche Punkteanzahl von 18,4 pro Schüler, die zweite Klasse mit 30 Schülern eine solche von 16,2. Berechne die durchschnittliche Punkteanzahl aller 55 Schüler.

10.11 Drei Personen entnehmen derselben Lieferung von Bauteilen je eine Stichprobe mit folgenden Stichprobenumfängen und Mittelwerten:

$n_1 = 30$; $\overline{x}_1 = 49,4$; $n_2 = 20$; $\overline{x}_2 = 50,2$; $n_3 = 40$; $\overline{x}_3 = 50,1$.

Die drei Stichproben werden zu einer einzigen vereinigt; wie groß ist ihr Mittelwert?

10.12 Eine Messung von 60 elektrischen Widerständen ergab folgende Werte (in Ω):

79,4	75,6	76,5	81,4	80,3	75,2	80,0	84,7	77,3	76,2
80,4	77,5	82,5	78,5	78,0	82,0	84,8	80,2	80,0	85,8
80,6	78,9	81,5	81,1	77,3	82,6	76,2	78,4	85,5	84,5
78,2	76,4	83,5	81,6	80,4	75,1	80,8	78,8	87,0	79,7
83,5	80,2	80,4	83,1	79,4	81,0	73,5	78,6	75,0	84,4
79,3	75,9	84,5	82,4	77,7	77,7	79,0	81,1	77,9	77,6

a) Führe eine Klassierung durch und zeichne das Histogramm!

b) Berechne Mittelwert und Standardabweichung!

10.13 Von 100 gleichartigen Dioden wurde der Durchlasswiderstand gemessen. Nach der Klassenbildung ergab sich folgendes Bild (Werte in mΩ):

Klasse	Absolute Häufigkeit n_j
88,85 ... 89,05	2
89,05 ... 89,25	2
89,25 ... 89,45	4
89,45 ... 89,65	9
89,65 ... 89,85	18
89,85 ... 90,05	19
90,05 ... 90,25	16
90,25 ... 90,45	13
90,45 ... 90,65	10
90,65 ... 90,85	5
90,85 ... 91,05	2

Berechne unter Verwendung der Klassenmitten $\bar{x}$ und s.

10.14 Eine Messung des Füllgewichtes von 80 automatisch abgefüllten Marmeladegläsern ergab folgende Werte (in g):

453	451	454	453	446	449	453	452	451	462
455	452	446	450	449	454	459	459	456	448
449	456	456	448	437	441	444	456	446	453
447	459	457	442	445	454	442	458	452	448
450	456	454	444	445	442	445	450	457	458
451	451	446	448	456	450	450	461	452	455
449	455	443	451	452	449	445	451	454	449
446	443	446	453	453	448	455	448	444	444

a) Führe eine Klassierung durch und zeichne das Histogramm!

b) Berechne Mittelwert und Standardabweichung über die Klassenmitten!

11 Wahrscheinlichkeitsrechnung

11.1 Grundbegriffe

Versuche eine Antwort!

(1) In einer Klasse sind 30 Schüler. Ist zu vermuten, dass zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben oder ist dies eher nicht der Fall?

(2) Ein Lottospieler stellt aufgrund von Aufzeichnungen einer Tageszeitung fest, dass die Zahl 14 deutlich weniger oft die "Richtige" war als die meisten anderen Zahlen. Er denkt, dass sie daher eine höhere Chance hat, beim nächsten Ziehen unter den sechs Richtigen zu sein. Hat er Recht?

(3) Ist es wahrscheinlicher, den Herz-König aus einem üblichen Spielkartenpaket beim ersten als beim zweiten Zug zu ziehen?

Lösung auf Seite 290.

Unsicherheiten richtig einzuschätzen kann schwierig sein. Damit beschäftigt sich eine eigene mathematische Disziplin, die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Auch der Zufall unterliegt Regeln!

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung untersucht die Regeln, denen sogenannte **Zufallsexperimente** (auch Zufallsvorgänge genannt) unterliegen.

Beispiele für Zufallsexperimente: Wartezeit, Reparaturdauer, Ausschussstücke in einer Tagesproduktion, Werfen eines Würfels oder einer Münze usw.

Das Ergebnis eines Zufallsexperimentes ist nicht oder nur in gewissen Grenzen voraussagbar. Es wird **Ereignis** genannt und üblicherweise mit Großbuchstaben: A, B, ... bezeichnet.

Z.B.: Werfen eines Würfels:

A ... Werfen einer ungeraden Augenanzahl,

B ... Werfen von "6".

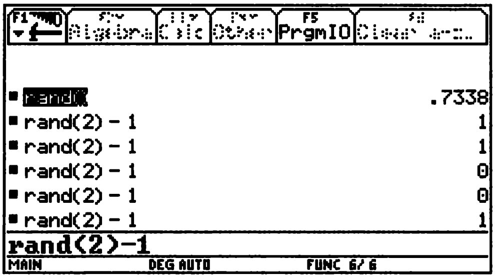
Was versteht man unter der **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses A ?

Zur Beantwortung dieser Frage wird eine "ideale" Münze oftmals geworfen oder dieser Vorgang geeignet simuliert. Dabei wird notiert, wie oft das Ereignis "Zahl" auftritt:

Wurfanzahl	Häufigkeit von "Zahl"	Anteil von "Zahl"
50	30	0,6000
100	59	0,5900
200	112	0,5600
500	264	0,5280
1 000	492	0,4920
10000	4932	0,4932
100000	49858	0,4986

Der Anteil liegt beim Wert 0,5. Es gilt als Erfahrungstatsache, dass er mit steigender Wurfanzahl beliebig nahe an diesen Wert kommt, den man dann als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "Zahl" bezeichnet.

Voyage 200



Man kann den Münzwurf auch mit einem Zufallszahlengenerator simulieren. Besonders wichtig sind Zufallszahlengeneratoren, die stetig gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall [0,1] erzeugen. Bei jedem Aufruf von rand( ) (MATH/ Probability – Menü oder eintippen) erzeugt der Rechner einigermaßen gut eine Zahl von dieser Art.

Ist n eine natürliche Zahl (n ≠ 0), so erzeugt rand(n) eine in [1,n]. liegende ganze Zahl; rand(2)–1 erzeugt daher "zufällig" 0 oder 1 und simuliert so einen Münzwurf, wenn man etwa 1 als "Zahl" und 0 als "Wappen" deutet.

Um einen schnellen Münzwurf zu simulieren, wird man das Erzeugen der Zufallszahlen 0 oder 1 und das Zählen der Einser in ein entsprechendes Programm einfügen.

Bei der Festlegung von in der Praxis auftretenden unbekannten Wahrscheinlichkeiten wird ebenfalls auf diese Art vorgegangen. Statt "Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A" schreibt man kurz: P(A). P kommt vom engl. Wort "probability";

Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten

Ein Zufallsexperiment wird n-mal durchgeführt, dabei tritt k-mal das Ereignis A ein. Der Anteil $\frac{k}{n}$ bei einer ausreichend großen Anzahl von Versuchsdurchführungen wird als *Näherungs-* oder *Schätzwert* für die unbekannte Wahrscheinlichkeit von A festgelegt:

$$P(A) \approx \frac{k}{n}$$

Z.B.: P (A) = 0,4 oder 40% heißt, dass bei einer *sehr großen* Anzahl von Versuchen in etwa 40% der Versuche das Ereignis A eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit P (A) kann so auch als zu **erwartender Anteil** der Versuche, in denen A eintritt, bezeichnet werden.

Wir haben damit die sogenannte *statistische* Definition der Wahrscheinlichkeit angegeben. Es handelt sich dabei jedoch um keine Definition im strengen mathematischen Sinn. Der Begriff "Wahrscheinlichkeit" wird nämlich überhaupt nicht definiert, sondern – wie Punkt und Gerade in der Geometrie – als Grundbegriff betrachtet, der gewissen Axiomen genügt.

In besonderen Situationen, die in der Praxis öfters näherungsweise erfüllt sind, lassen sich Wahrscheinlichkeiten auch ohne Anteilsbestimmung angeben. Wir betrachten ein Zufallsexperiment, das folgende Eigenschaften besitzt:

(1) Bei einer Ausführung kommen nur endlich viele verschiedene Ergebnisse ("Fälle") vor.

(2) Jedes *dieser* Ergebnisse ist gleichmöglich ("gleichwahrscheinlich").

Ein solches Zufallsexperiment wird **Laplace[11]-Experiment** genannt. Dann wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wie folgt festgelegt (sogenannte *klassische* Definition):

Festlegung von Wahrscheinlichkeiten in einem Laplace-Experiment

$$P\,(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}} = \frac{g}{m}$$

Anmerkungen:

(1) Laplace-Experimente sind etwa das Werfen eines idealen Würfels oder einer solchen Münze mit den geworfenen Augenzahlen bzw. Münzseiten als Ergebnisse (Fälle). Ebenfalls gehört dazu das Ziehen eines Artikels aus einem Behälter ("Prüflos") und eine anschließende Gut/Schlecht-Prüfung, wenn der Ziehvorgang zufällig vor sich geht, d.h. jeder Artikel die gleiche Chance hat, gezogen zu werden.

Der Zusatz "ideal" beim Würfel bedeutet, dass jede Augenzahl gleichmöglich ist.

Verhält sich ein Würfel nicht annähernd "ideal", so kann die Wahrscheinlichkeit eines Wurfereignisses nur über die Anteilsbestimmung bei ausreichend vielen Versuchen geschätzt werden.

(2) Ein für das Ereignis A "günstiger" Fall bedeutet einen Ausgang des Zufallsexperimentes, bei dem A eingetreten ist.

Z.B.: Werfen eines Würfels: A ... Ereignis, eine gerade Augenzahl zu werfen. Dann sind die für A günstigen Fälle das Werfen von "2", das Werfen von "4" und das Werfen von "6".

Ein *sicheres* Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit 1; ein solches ist etwa, mit einem gewöhnlichen Würfel irgendeine Zahl von 1 bis 6 zu werfen;

Ein *unmögliches* Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit 0; ein solches ist etwa, mit einem gewöhnlichen Würfel 7 zu werfen.

Beispiel 11.1 : Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten

Zwei ideale Würfeln werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) wenigstens einmal "6", **b)** eine Augensumme von 8 zu werfen.

Lösung

Wir listen alle möglichen gleichwahrscheinlichen Fälle auf. Beachte, dass etwa die beiden Wurffolgen (1, 2) und (2, 1) nicht als *ein* Fall gesehen werden dürfen, weil sonst die möglichen Fälle nicht mehr gleichwahrscheinlich sind. So hat jeder dieser beiden Fälle die gleiche Wahrscheinlichkeit wie (1, 1).

Einfachheitshalber schreiben wir die Wurffolge (1, 2) in der Form 12, usw., wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.

11	21	31	41	51	**61**
12	22	32	42	52	**62**
13	23	33	43	53	**63**
14	24	34	44	54	**64**
15	25	35	45	55	**65**
16	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**

Abb. 11.1 Wenigstens enmal "6"

Zu **a)** Mögliche Fälle: $m = 6^2 = 36$

günstige Fälle: $g = 11$

P (wenigstens einmal "6") $= \frac{11}{36} \approx 30{,}6\,\%$.

[11] Pierre Simon LAPLACE, 1749–1827, französischer Mathematiker und Physiker

Zu **b)** Mögliche Fälle: $m = 6^2 = 36$
günstige Fälle: $g = 5$
$P\,(\text{Augensumme} = 8) = \frac{5}{36} = 0{,}139 \approx 13{,}9\%$.

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Abb. 11.2 Augensumme = 8

Beispiel 11.2 : Bestimmen einer Wahrscheinlichkeit

Drei ideale Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei mindestens einmal Zahl zu werfen?

Lösung

Bezeichnet Z das Werfen von Zahl sowie W das Werfen von Wappen, so lauten die möglichen Fälle:

WWW WWZ WZW ZWW WZZ ZWZ ZZW ZZZ.

D.h. es gibt 8 mögliche und 7 günstige Fälle;

somit: $P\,(\text{mindestens einmal Zahl}) = \frac{7}{8} = 87{,}5\%$.

Lösung der Fragen von Seite 287:

Zu (1) Die Wahrscheinlichkeit für gleiche Geburtstage ist weit mehr als doppelt so hoch wie für den Fall lauter ungleicher Geburtstage. Siehe Beispiel 11.11, Seite 296.

Zu (2) Nein, die Chancen sind für jede Zahl bei jeder Ziehung gleich.

Zu (3) Nein! Siehe Beispiel 11.13, Seite 299.

Aufgaben

11.1 In den ersten zehn Spieljahren des Lottos "6 aus 45" seit dessen Einführung im Jahre 1986 wurden 8,3 Milliarden Tipps von je 6 Zahlen abgegeben. 1024 Tipps davon waren die sechs Richtigen. Berechne daraus einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, die sechs Richtigen zu tippen.

11.2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem idealen Würfel
a) "1" **b)** "2" **c)** eine Augenzahl über 1 **d)** eine gerade Augenzahl
e) eine Augenzahl höchstens 4 **f)** eine Augenzahl mindestens 2 zu werfen?

11.3 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von zwei idealen Würfeln
a) mindestens einmal "6" **b)** eine Augensumme von 5
c) eine Augensumme von höchstens 5 zu werfen?

11.4 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von drei idealen Münzen
a) nie **b)** genau einmal **c)** höchstens einmal
d) mindestens einmal **e)** genau zweimal **f)** höchstens zweimal
g) mindestens zweimal **h)** dreimal Zahl zu werfen?

11.2 Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse (UND-Regel, ODER-Regel)

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses versucht man häufig, dieses aus einfacheren Ereignissen zusammenzusetzen. Dann kann man nämlich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einfacher Regeln aus den Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse bestimmen.

Will man *zwei* einzelne Ereignisse zu **einem** Ereignis zusammensetzen, so lauten zwei grundlegende Möglichkeiten dazu:

A **und** B	Ereignis, bei dem A und B **zugleich** eintreten
A **oder** B	Ereignis, bei dem **mindestens eines** der Ereignisse A oder B eintritt

Anmerkungen:

(1) A oder B schließt auch ein, dass beide Ereignisse A, B zugleich eintreten ("oder" im nicht ausschließenden Sinn! Beachte den Unterschied zu: "entweder ... oder").

(2) Statt A **und** B schreibt man auch $A \cap B$, für A **oder** B auch $A \cup B$. Der Grund liegt darin, dass Ereignisse als Mengen betrachtet werden können und dann die beiden Zusammensetzungen der Durchschnitt bzw. die Vereinigung der betroffenen Mengen sind.

Beispiel 11.3 : Zusammengesetzte Ereignisse

Zwei ideale Würfel werden geworfen. Wir betrachten die Ereignisse:
A ... wenigstens einmal "6" werfen; B ... Augensumme = 8 werfen.

Zähle alle Wurffolgen des zusammengesetzten Ereignisses

a) A **und** B **b)** A **oder** B auf.

Lösung

Zu **a)** 26, 62 (im markierten Feld von Abb. 11.1 **und** in jenem von Abb. 11.2)

Zu **b)** 16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65, 35, 44, 53 (im markierten Feld von Abb. 11.1 **oder** in jenem von Abb. 11.2)

Wir überlegen zuerst die Ermittlung von P(A **oder** B). Von Bedeutung dabei ist, ob die beiden Ereignisse vereinbar oder unvereinbar sind.

> Zwei Ereignisse A, B heißen **unvereinbar**, wenn sie nicht gemeinsam auftreten können, d.h. wenn P(A **und** B) = 0 ist.

Z.B.: Zweimaliges Werfen eines Würfels;

A ... beim ersten Wurf "6" werfen;

B ... beim ersten Wurf eine ungerade Augenzahl werfen;

C ... beim zweiten Wurf "6" werfen.

A ist unvereinbar mit B, denn man kann nicht zugleich "6" und dabei eine ungerade Augenzahl werfen. A ist jedoch mit C vereinbar.

Beispiel 11.4 : Unvereinbare Ereignisse

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spielkartenpaket von 32 Karten eine Herz-Karte **oder** eine Karo-Karte zu ziehen?

Lösung

A ... Ziehen einer Herz-Karte; B ... Ziehen einer Karo-Karte;

$P(A) = \frac{8}{32}$; $P(B) = \frac{8}{32}$; $P(A$ **oder** $B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Somit gilt hier: $P(A$ **oder** $B) = P(A) + P(B)$.

Diese einfache Addition der Wahrscheinlichkeiten ist jedoch nicht allgemein richtig!

Beispiel 11.5 : Vereinbare Ereignisse

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spielkartenpaket von 32 Karten eine Herz-Karte **oder** einen König zu ziehen?

Lösung

A ... Ziehen einer Herz-Karte, B ... Ziehen eines Königs;

$P(A) = \frac{8}{32}$; $P(B) = \frac{4}{32}$.

Günstige Fälle für das Ereignis "A **oder** B": Herz-7, Herz-8, Herz-9, Herz-10, Herz-Bub, Herz-Dame, Herz-König, Herz-As, Pik-König, Kreuz-König, Karo-König; also $g = 11$.

$P(A$ **oder** $B) = \frac{11}{32} \neq P(A) + P(B)$!

Dies deshalb, weil A und B zugleich auftreten können (im Ereignis Herz-König!), sie sind also **vereinbar**. Die Wahrscheinlichkeit von A **und** B (= Herz-König) wird sowohl in der Wahrscheinlichkeit von A wie auch in der von B mitberücksichtigt; d.h. es muss einmal $P(A$ **und** $B)$ abgezogen werden:

$P(A$ **oder** $B) = P(A) + P(B) - P(A$ **und** $B) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

Additionssatz ("ODER-Regel"):

$P(A$ **oder** $B) = P(A) + P(B) - P(A$ **und** $B)$ für beliebige Ereignisse;

$P(A$ **oder** $B) = P(A) + P(B)$ für unvereinbare Ereignisse.

Bei *unvereinbaren* Ereignissen werden die Wahrscheinlichkeiten einfach addiert: "**oder**" wird zu "plus".

Beispiel 11.6 : Unvereinbare Ereignisse

In einem Behälter sind 3 rote, 2 grüne und 5 weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zug zufällig eine rote **oder** eine grüne Kugel zu ziehen?

Lösung

A ... Ziehen einer roten Kugel, B ... Ziehen einer grünen Kugel;

A **oder** B ... Ziehen einer roten **oder** grünen Kugel; $P(A) = \frac{3}{10}$; $P(B) = \frac{2}{10}$.

Da A, B unvereinbare Ereignisse sind (man kann nicht beim Ziehen von genau einer Kugel sowohl eine rote als auch eine grüne Kugel ziehen, d.h. P(A **und** B) = 0), lautet die ODER-Regel:

P(A **oder** B) = $P(A) + P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Natürlich könnte man dieses einfache Beispiel auch ohne Bilden eines zusammengesetzten Ereignisses lösen, indem man gleich $g = 5$ bei $m = 10$ findet, also P(Ziehen einer roten **oder** grünen Kugel) = $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Beispiel 11.7 : Bedingte Wahrscheinlichkeit

Zwei ideale Würfeln werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Augensumme von 8 zu werfen **unter der Bedingung**, dass wenigstens einmal "6" geworfen wird?

Lösung

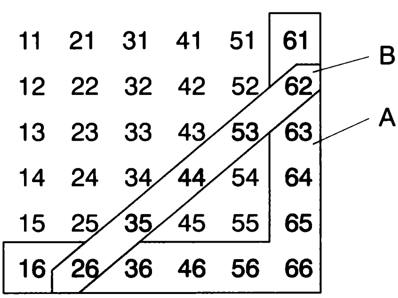


Abb. 11.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

B ... Werfen einer Augensumme 8,

A ... Wenigstens einmal wird "6" geworfen;

Es soll nun die Wahrscheinlichkeit von B *unter der Bedingung* A bestimmt werden; d.h. es werden nur noch jene Fälle betrachtet, in denen A eintritt. Diese Wahrscheinlichkeit wird mit $P(B|A)$ bezeichnet.

Es gilt (Abb. 11.3): $P(B|A) = \frac{2}{11} = 18{,}2\%$, da für dieses Ereignis 2 Fälle günstig sind unter den nur noch 11 möglichen Fällen von A. Diese Wahrscheinlichkeit ist nicht gleich $P(B) = \frac{5}{36} = 13{,}9\%$.

Hier begünstigt das Eintreten von A das Eintreten von B (überlege, warum dies so ist!).

$P(B|A)$ kann in einfacher Weise durch $P(A) = \frac{11}{36}$ und P(A **und** B) = $\frac{2}{36}$ ausgedrückt werden:

$$P(B|A) = \frac{2}{11} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{P(A \textbf{ und } B)}{P(A)}$$

Die Überlegungen von Beispiel 11.7 führen allgemein zu folgender Definition:

Bedingte Wahrscheinlichkeit P(B|A)

Ist $P(A) \neq 0$, so heißt der Wert $P(B|A) = \frac{P(A \textbf{ und } B)}{P(A)}$ die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eingetroffen ist, oder kürzer die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B unter der Bedingung A.

Gilt für zwei Ereignisse A, B eines Zufallsexperimentes, dass $P(B|A) = P(B)$, d.h. das Eintreten von A hat keinen Einfluß auf das Eintreten von B, so heißen die Ereignisse A, B **unabhängig**.

Bei einfachen Zufallsexperimenten wie dem Werfen von Würfeln ist es meist leicht möglich zu entscheiden, ob zwei interessierende Ereignisse unabhängig sind oder nicht. Im Allgemeinen ist jedoch Vorsicht angebracht. In vielen praktischen Beispielen wird häufig (wenigstens näherungsweise) eine Unabhängigkeit zweier Ereignisse angenommen.

Aus $P(B|A) = \frac{P(A \textbf{ und } B)}{P(A)}$ ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung mit $P(A)$ der grundlegende Multiplikationssatz.

Multiplikationssatz ("UND-Regel"):

$P(A \textbf{ und } B) = P(A) \cdot P(B|A)$ für beliebige Ereignisse;

$P(A \textbf{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$ für unabhängige Ereignisse.

Bei *unabhängigen* Ereignissen werden die Wahrscheinlichkeiten einfach multipliziert: "**und**" wird zu "mal".

Beispiel 11.8 : Unabhängige Ereignisse

Ein idealer Würfel wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst "2" **und** dann "3" zu werfen?

Lösung

Einziger günstiger Fall: 23 (d.h. beim 1. Wurf "2", beim 2. Wurf "3");

Anzahl der möglichen Fälle: $m = 36$.

Somit P(zuerst "2", dann "3") $= \frac{1}{36} = 0{,}0278 = 2{,}78\%$.

Das betrachtete Ereignis kann aber auch aus zwei Ereignissen zusammengesetzt werden:
A ... "2" beim ersten Wurf, B ... "3" beim zweiten Wurf, A und B ... zuerst "2", dann "3".

A, B können sicherlich als unabhängig betrachtet werden, es ist kein Einfluss des 1. Wurfes auf den 2. Wurf denkbar.

$P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{6}$; $P(A \textbf{ und } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Beispiel 11.9 : Abhängige Ereignisse

Irrtümlicherweise wurden 3 alte, nicht mehr ausreichend funktionsfähige Batterien in eine Schachtel mit 9 neuwertigen Batterien geworfen. Alte und neuwertige Batterien sind äußerlich nicht unterscheidbar. Man entnimmt nun hintereinander zufällig zwei Batterien.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Batterien neuwertig sind?

Lösung

Das gesuchte Ereignis kann als zusammengesetztes Ereignis "A **und** B" gesehen werden, wenn bedeuten:

A ... Die erste Batterie ist neuwertig; B ... Die zweite Batterie ist neuwertig.

Die Ereignisse A, B sind abhängig: Tritt A ein, so ist das Eintreten von B etwas weniger wahrscheinlich.

$P(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4};$

$P(B|A) = \frac{8}{11},$ da nach dem Eintreten von A nur noch 8 neuwertige unter den verbliebenen 11 Batterien in der Schachtel sind.

$P(A$ **und** $B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{6}{11} = 54{,}5\%.$

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

Z.B.: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Werfen eines idealen Würfels, **nicht** "6" zu werfen? "Werfen von 6" und "Werfen einer anderen Zahl als 6" heißen **Gegenereignisse** zueinander; eines dieser beiden Ereignisse tritt beim Werfen eines Würfels stets ein.

Ist A ein Ereignis, so bezeichnen wir sein Gegenereignis mit $\overline{A}$. "A **oder** $\overline{A}$" stellt ein sicheres Ereignis dar: $P(A$ **oder** $\overline{A}) = 1$. Außerdem sind die beiden Ereignisse unvereinbar: $P(A$ **oder** $\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses gilt daher:

Wahrscheinlichkeit für das **Gegenereignis** von A: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Also: A ... Werfen von "6"; $P(A) = \frac{1}{6};$ $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$

Selbstverständlich kann diese einfache Aufgabe auch ohne Hilfe des Gegenereignisses *direkt* gelöst werden.

Öfters ergeben sich jedoch Rechenvorteile bei Fragestellungen mit "mindestens" oder auch "höchstens", wenn man zuerst die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ermittelt. Z.B.: **mindestens einmal = nicht 0-mal**.

Beispiel 11.10 : Lösung über das Gegenereignis

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Werfen

a) einer idealen Münze mindestens einmal Zahl

b) eines idealen Würfels mindestens einmal "6" zu werfen?

Dieses Beispiel ist Modell für viele Aufgabenstellungen in der Qualitätssicherung wie: Mindestens eine fehlerhafte Einheit unter n Einheiten einer Stichprobe, Ausfall mindestens eines Schalters in einer Schaltergruppe und dgl.

Lösung

Zu **a)** Mindestens einmal Zahl = Nicht 0-mal Zahl. Die folgende Tabelle zeigt den Vorteil der Verwendung des Gegenereignisses; die Zahl der gleichwahrscheinlichen möglichen Fälle m ist 8.

A: mindestens einmal Zahl	$\overline{A}$: 0-mal Zahl
ZWW, WZW, WWZ, ZZW, ZWZ, WZZ, ZZZ	WWW
$P(A) = \frac{7}{8}$	$P(\overline{A}) = \frac{1}{8}$
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{7}{8}$	

Zu **b)** Hier und noch mehr bei längeren Wurfserien ist es schon etwas mühsam, die Anzahl g der gleichwahrscheinlichen günstigen Fälle

116, 126, 136, ..., 666 für mindestens einmal "6" bzw.

111, 112, ..., 555 für das Gegenereignis 0-mal "6"

zu finden. Es empfiehlt sich, wieder mit dem Gegenereignis 0-mal "6" zu arbeiten und dieses wie folgt *zusammenzusetzen:*

A_1 ... "6" beim 1. Wurf; $P(A_1) = \frac{1}{6}$; $P(\overline{A}_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$;

A_2 ... "6" beim 2. Wurf; $P(A_2) = \frac{1}{6}$; $P(\overline{A}_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$;

A_3 ... "6" beim 3. Wurf; $P(A_3) = \frac{1}{6}$; $P(\overline{A}_3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$;

0-mal "6" = $\overline{A}_1$ **und** $\overline{A}_2$ **und** $\overline{A}_3$; wegen der UND-Regel ($\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ sind unabhängige Ereignisse) gilt:

$$P(\overline{A}_1 \textbf{ und } \overline{A}_2 \textbf{ und } \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}.$$

$$P(\text{mindestens einmal "6"}) = 1 - P(\overline{A}_1 \textbf{ und } \overline{A}_2 \textbf{ und } \overline{A}_3) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} = 42{,}1\%.$$

Die Bedeutung der Zusammensetzungen mit "und", "oder" sowie der "nicht"-Bildung liegt darin, dass jedes zusammengesetzte Ereignis mit Hilfe der Wörter "und", "oder", "nicht" ausgedrückt werden kann. Danach kann seine Wahrscheinlichkeit aus den Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse ermittelt werden.

Zu beachten ist jedoch die genaue Bedeutung und Anwendung der "und"- bzw. "oder"-Zusammensetzung! Diese sind im Sinne der logischen UND-Verknüpfung bzw. der logischen ODER-Verknüpfung (siehe Ingenieur-Mathematik 1, Seite 14 f.) gemeint, was in der Umgangssprache oft nicht der Fall ist. Z.B.: "Rauchen *und* Trinken ist verboten!" heißt wohl, dass Rauchen oder Trinken auch einzeln verboten ist.

Beispiel 11.11 : Geburtstagsproblem

In einer Klasse sind 30 Schüler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) zwei Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben?

Lösung

Wir machen die Annahme, dass jeder Tag eines Jahres (1 Jahr = 365 Tage) mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{365}$ als Geburtstag einer Person in Frage kommt.

A ... Ereignis, dass mindestens zwei Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben.

$\bar{A}$ ... Ereignis, dass es keinen Tag gibt, an dem dies der Fall ist.

Denkt man sich die Schüler durchnummeriert, so gelten folgende Wahrscheinlichkeiten, wenn g jeweils die Anzahl der günstigen und m = 365 die Anzahl der möglichen Fälle für das betrachtete Ereignis ist:

$\frac{364}{365}$ = Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Schüler nicht am gleichen Tag wie der erste Schüler Geburtstag hat; denn g = 364, weil der Geburtstag des ersten Schülers wegfällt;

$\frac{363}{365}$ = Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Schüler an einem anderen Tag Geburtstag hat wie der erste oder zweite Schüler, wenn auch diese keine gleichen Geburtstage haben; denn nun ist g = 363, da 2 Tage als Geburtstage wegfallen.

$\frac{362}{365}$ = Wahrscheinlichkeit, dass der vierte Schüler an einem anderen Tag Geburtstag hat wie der erste, zweite oder dritte Schüler, wenn auch diese keine gleichen Geburtstage haben; da nun 3 Tage als Geburtstage wegfallen, ist g = 362.

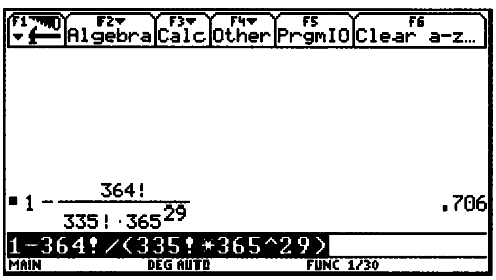
So fährt man fort bis zum letzten Schüler. Nach der UND-Regel gilt dann bei n Schülern:

$$P(\bar{A}) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365}.$$

Somit: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \ldots \cdot (366-n)}{365^{n-1}}.$

Die Berechnung ergibt: P(A) = 0,706, bei n = 30 Schülern. Schon bei n = 23 Schülern ist P(A) mit 0,507 erstmals über 50% !

Voyage 200



$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) =$$
$$= 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \ldots \cdot 336}{365^{29}} =$$
$$= 1 - \frac{364!}{335!\,365^{29}} = 0{,}706.$$

Man erweitert den Bruch mit 335!. Das Fakultätszeichen ! ruft man auf durch: 2ND 5 7 ENTER oder kürzer durch 2ND W .

Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein zusammengesetztes Zufallsexperiment lässt sich oft in eine Folge von einfacheren Zufallsexperimenten zerlegen. Man spricht dann von einem **mehrstufigen Zufallsexperiment**. Dieses kann durch ein **Baumdiagramm** veranschaulicht werden, wodurch auch die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten oft erheblich erleichtert wird.

Beispiel 11.12 : Mehrstufiges Zufallsexperiment (1)

Irrtümlicherweise wurden 3 alte, nicht mehr ausreichend funktionsfähige Batterien in eine Schachtel zu 9 neuwertigen Batterien geworfen. Alte und neuwertige Batterien sind äußerlich nicht unterscheidbar. Man entnimmt nun hintereinander zufällig drei Batterien.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine entnommene Batterie alt ist?

Lösung

Zu **a)** Man kann wie in Beispiel 11.9 vorgehen und das gesuchte Ereignis aus Teilereignissen zusammenzusetzen. Dies ist jedoch bei der vorliegenden Fragestellung bereits recht mühsam. Günstiger ist es, dass man zuerst alle möglichen Ziehungsfolgen feststellt und diese graphisch in einem **Baumdiagramm** veranschaulicht.

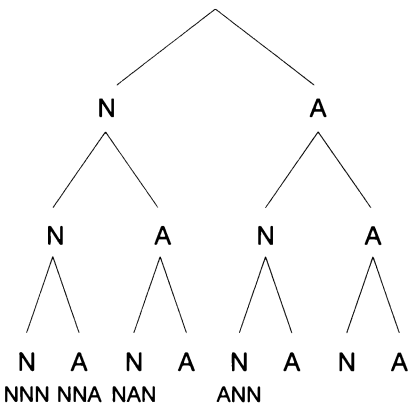


Abb. 11.4 Überblick über die möglichen Ziehfolgen

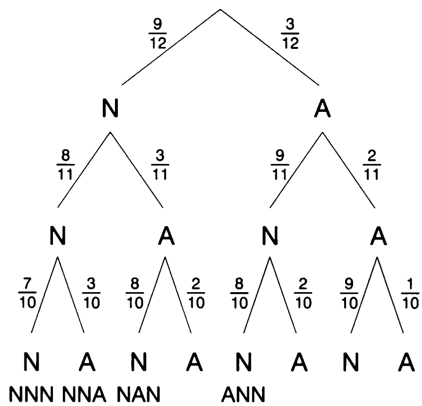


Abb. 11.5 Vollständiges Baumdiagramm

Das Baumdiagramm in Abb. 11.4 gibt einen Überblick über alle möglichen Ziehfolgen, graphisch durch einen "Pfad" durch den "Baum" gekennzeichnet. Das interessierende Ereignis "höchstens eine alte Batterie" tritt ein, wenn irgendeiner der Pfade NNN, NNA, NAN oder ANN durchlaufen wird.

Abb. 11.5 zeigt das vollständige Baumdiagramm. Bei jedem *Teil*pfad ist die Wahrscheinlichkeit für sein Durchlaufen angegeben. Am Anfang ist die Wahrscheinlichkeit, eine neuwertige Batterie zu ziehen, gleich $\frac{9}{12}$, die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer alten Batterie ist gleich $\frac{3}{12}$. Beim zweiten Zug ist das Ergebnis des ersten Zuges zu berücksichtigen, d.h. es treten bedingte Wahrscheinlichkeiten auf.

Stets gilt, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist, wenn die Wahrscheinlichkeiten aller von einem Punkt ausgehender Teilpfade summiert werden. Denn irgendein Teilpfad muss beschritten werden, was gerade ein sicheres Ereignis ist.

Der Vorteil der Verwendung eines Baumdiagramms zeigt sich in der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses. Die Wahrscheinlichkeit für das Durchlaufen eines bestimmten Pfades ist nach der UND-Regel das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs dieses Pfades. Da das Durchlaufen der Pfade NNN, NNA, NAN oder ANN wechselweise unvereinbare Ereignisse sind, ist weiters die Wahrscheinlichkeit für das Durchlaufen von NNN, NNA, NAN oder ANN nach der ODER-Regel für unvereinbare Ereignisse gleich der Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten von NNN, NNA, NAN, ANN:

$$P(\text{"Höchstens eine alte Batterie"}) = P(NNN) + P(NNA) + P(NAN) + P(ANN) =$$
$$= \frac{9}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} + \frac{9}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{3}{10} + \frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{8}{10} + \frac{3}{12}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{8}{10} =$$
$$= \frac{1152}{1320} = 0{,}873 = 87{,}3\%.$$

Wir fassen die Vorgehensweise in folgenden "Pfadregeln" zusammen, die auf der UND- bzw. ODER-Regel beruhen:

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten jener Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel 11.13 : Mehrstufiges Zufallsexperiment (2)

In einem Behälter sind 1 rote, 1 grüne und 1 weiße Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen einer Kugel die rote Kugel

a) schon beim ersten Mal, **b)** beim zweiten Mal, **c)** erst beim dritten Mal zu ziehen?

Lösung

Zu **a)** $P(\text{beim ersten Mal}) = \frac{1}{3}$.

Zu **b)** $P(\text{beim zweiten Mal}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Zu **c)** $P(\text{beim dritten Mal}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{3}$.

Begründe die Kontrolle: Die Summe der drei Wahrscheinlichkeiten aus a), b) und c) muss 1 sein!

Die Wahrscheinlichkeit, die rote Kugel beim ersten Mal, zweiten Mal oder dritten Mal zu ziehen, ist gleich! Ähnlich beantwortet man auch die dritte Frage von Seite 287: Die Wahrscheinlichkeit, den Herz-König beim ersten Mal zu ziehen, ist gleich jener beim zweiten Mal.

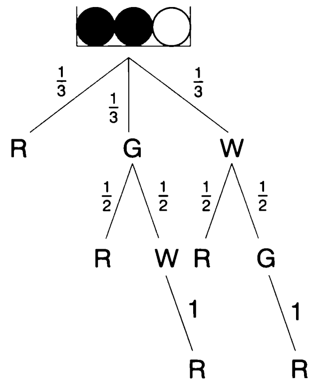


Abb. 11.6

11.3 Weitere Beispiele

Beispiel 11.14 : ODER-Regel für vereinbare Ereignisse

Eine ideale Münze wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim ersten- oder zweitenmal Zahl zu werfen?

Lösung

In der Fragestellung ist auch ein zweimaliges Werfen von Zahl eingeschlossen (nicht "entweder – oder"). Die Aufgabe kann unterschiedlich gelöst werden.

1. Lösungsvariante: A ... Zahl beim ersten Mal; B ... Zahl beim zweiten Mal.

P (A **oder** B) = P (A) + P (B) – P (A **und** B) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

2. Lösungsvariante: Mit Baumdiagramm.

In Abb. 11.7 bedeutet Z das Werfen von "Zahl" und W das Werfen von "Wappen". P = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Lösung auch über die Gegenwahrscheinlichkeit, da A **oder** B = nicht 0-mal Zahl ist. Schließlich kann man in diesem einfachen Beispiel über die Anzahl der günstigen und möglichen Fälle lösen: g = 3 und m = 4.

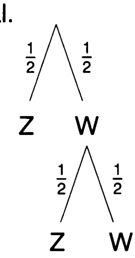


Abb. 11.7

Beispiel 11.15 : Vermischte Aufgaben

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Werfen eines idealen Würfels

a) zweimal "6"
b) nie "6"
c) mindestens einmal "6"
d) genau einmal "6"
e) höchstens einmal "6" zu werfen?

Lösung

A ... "6" beim 1. Wurf; B ... "6" beim 2. Wurf. A, B sind unabhängige Ereignisse.

P (A) = $\frac{1}{6}$; P (B) = $\frac{1}{6}$.

Zu **a)** Zweimal "6" = A **und** B; P (A **und** B) = P (A) · P (B) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Zu **b)** Nie "6" = $\overline{A}$ **und** $\overline{B}$; P (nie "6") = $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

Zu **c)** Mindestens einmal "6" = *nicht* nie "6"; mit b) folgt:
P (Mindestens einmal "6") = 1 – $\frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.
Lösung auch mit Hilfe von: Mindestens einmal "6" = A **oder** B;

Zu **d)** Wir lösen mit Hilfe des Baumdiagramms (Abb. 11.8), mit dem auch die anderen Aufgabenstellungen gelöst werden können:
P (genau einmal "6") = $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36}$.

Zu **e)** Höchstens einmal "6" = nicht zweimal "6"; mit a) folgt:
P (höchstens einmal "6") = 1 – $\frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.

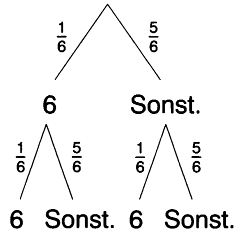


Abb. 11.8

Beispiel 11.16 : UND-Regel

Drei Würfel, ein roter und zwei weiße Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit dem roten eine gerade Augenzahl und mit den beiden weißen Würfeln die Augensumme 4 zu werfen?

Lösung

A ... Werfen einer geraden Augenzahl mit dem roten Würfel; $P(A) = \frac{1}{2}$.

B ... Werfen der Augensumme 4 mit den beiden weißen Würfeln
(Wurffolgen: 13, 22, 31); $P(B) = \frac{3}{36}$.

Die beiden Ereignisse A, B sind offenbar unabhängig; somit folgt nach der UND-Regel:
$P(A \text{ **und** } B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{36} = \frac{1}{24} = 4{,}2\%$.

Beispiel 11.17 : Mehrfache Anwendung der UND-Regel

In einem Behälter sind 7 rote und 3 weiße Kugeln. Man zieht ohne Zurücklegen hintereinander 3 Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine weiße und dann 2 rote Kugeln zu ziehen?

Lösung

A_1 ... weiße Kugel beim 1.Zug;

A_2 ... rote Kugel beim 2.Zug;

A_3 ... rote Kugel beim 3.Zug;

$P(A_1) = \frac{3}{10}$; $P(A_2|A_1) = \frac{7}{9}$ (7 rote Kugeln von nur noch 9 Kugeln);

$P(A_3|A_1 \textbf{ und } A_2) = \frac{6}{8}$ (6 rote Kugeln von nur noch 8 Kugeln);

zweifache Anwendung der UND-Regel:

$P(A_1 \textbf{ und } A_2 \textbf{ und } A_3) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = 0{,}175 = 17{,}5\%$.

Beispiel 11.18 : UND-Regel und Gegenwahrscheinlichkeit

Bei einer Probefertigung von Stanzteilen treten drei Fehlerarten auf:

F_1: Bruch; F_2: Stanzfehler; F_3: Materialfehler.

Es wird angenommen, dass die drei Fehlerarten *unabhängig* voneinander auftreten. Ihre Wahrscheinlichkeiten sind: $P(F_1) = 15\%$, $P(F_2) = 5\%$, $P(F_3) = 10\%$.

Ermittle den Anteil der Stanzteile, die

a) mit allen drei Fehlern behaftet sind,

b) die fehlerhaft sind (d.h. irgendeinen der drei Fehlerarten besitzen),

c) *nur* den Fehler F_1 besitzen.

Lösung

Zu **a)** P (alle 3 Fehler) = P (F_1 **und** F_2 **und** F_3) = 0,15·0,05·0,10 = 0,00075 = 0,075%.

Zu **b)** Fehlerhaft = nicht fehlerfrei;

fehlerfrei = $\overline{F}_1$ **und** $\overline{F}_2$ **und** $\overline{F}_3$;

P (fehlerfrei) = (1 – 0,15)·(1 – 0,05)·(1 – 0,1) = 0,727;

P (fehlerhaft) = 1 – 0,727 = 27,3%.

Zu **c)** Nur Fehler F_1 = F_1 **und** $\overline{F}_2$ **und** $\overline{F}_3$;

P (Nur Fehler F_1) = 0,15·(1 – 0,05)·(1 – 0,1) = 0,0128 = 12,8%.

Beispiel 11.19: Zuverlässigkeit eines Systems

Es liegt ein System von drei Schaltern vor, die stets in gleichartiger Weise beansprucht werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schalter (eine bestimmte Zeit) einwandfrei funktioniert, ist R = 0,85 (R wie Reliability = Zuverlässigkeit), und zwar unabhängig von den anderen Schaltern.

Wenn mehr als 1 Schalter ausfällt, hat dies den Ausfall des ganzen Systems zur Folge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Schaltersystem funktioniert (also höchstens ein Schalter ausfällt)?

Lösung

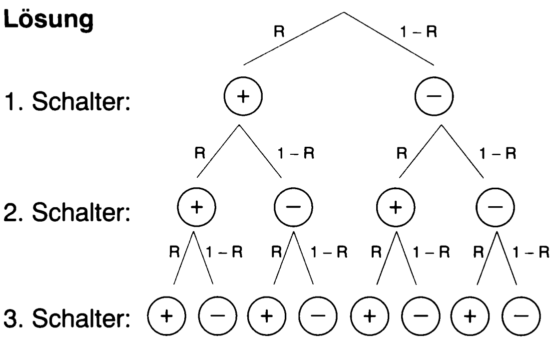


Abb. 11.9

Man kommt auch hier zu einer Mehrstufigkeit und damit zu einem Baumdiagramm, wenn man die Funktion der 3 Schalter gedanklich hintereinander betrachtet. In Abb. 11.9 bedeutet ein "+", dass der betreffende Schalter funktioniert, ein "–", dass dies nicht der Fall ist.

Man erkennt, dass zum Ereignis "Höchstens ein Schalter fällt aus" 4 Pfade gehören. Aufgrund der beiden Pfadregeln folgt:

P (Höchstens 1 Schalter fällt aus) = $R^3 + R^2 \cdot (1 - R) + R \cdot (1 - R) \cdot R + (1 - R) \cdot R^2 = 0{,}939$.

Das Schaltersystem funktioniert also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 94% während der betrachteten Zeit.

Aufgaben

11.5 Ein idealer Würfel wird geworfen. Sind die folgenden Ereignisse unvereinbar?

a) Werfen von "6", Werfen von "1".

b) Werfen von "6", Werfen einer geraden Augenzahl.

c) Werfen von "6", Werfen einer ungeraden Augenzahl.

11.6 Ein roter und ein grüner Würfel werden hintereinander geworfen. Sind die folgenden Ereignisse unabhängig?

a) Roter Würfel zeigt "6", grüner Würfel zeigt "6".

b) Roter Würfel zeigt "6", grüner Würfel zeigt "gerade Augenzahl".

c) Roter Würfel zeigt "6", Augensumme der beiden Würfel ist 12.

11.7 Wie kann das Ereignis "Ziehen von mindestens zwei fehlerhaften Einheiten" unter Verwendung des zugehörigen Gegenereignisses ausgedrückt werden?

11.8 Ein idealer roter und ein grüner Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) mit dem roten "6" und mit dem grünen "1" zu werfen,

b) mit einem Würfel "6" und mit dem anderen Würfel "1" zu werfen,

c) mit entweder dem roten oder dem grünen Würfel "6" zu werfen,

d) mit dem roten oder dem grünen Würfel "6" zu werfen,

e) höchstens die Augensumme 6 zu werfen,

f) dass ein Würfel "1" und der andere eine beliebige ungerade Augenzahl zeigt.

11.9 Drei ideale Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal Zahl und einmal Wappen zu werfen?

11.10 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen mit einem idealen Würfel

a) beim dritten Mal erstmalig "6",

b) frühestens nach zwei Würfen "6" geworfen wird?

11.11 Zwei ideale Würfel werden zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, *erst* beim zweiten Mal "6" zu werfen?

11.12 Vier ideale Münzen werden auf einmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) gleich oft "Wappen" und "Zahl" zu werfen?

b) dass genau drei Münzen die gleiche Seite zeigen?

11.13 Zwei große und zwei kleine Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit den beiden großen Münzen ein gleiches Wurfergebnis wie mit den beiden kleinen Münzen zu erzielen?

11.14 Ein roter und 2 grüne Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl des roten Würfels ungerade und dabei gleich der Augensumme der beiden grünen Würfel ist?

11.15 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei drei Würfen mit einem idealen Würfel mindestens einmal "5" oder "6" zu werfen?

11.16 Jemand möchte sich aus zwei Eiern eine Eierspeise machen. Im Kühlschrank sind insgesamt 5 Eier, von denen allerdings eines faul ist. Er nimmt zufällig zwei Eier. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwei genießbare Eier verwendet?

11.17 In einem Behälter sind 5 rote und 4 grüne Kugeln. Zufällig werden auf einmal zwei Kugeln herausgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine rote Kugel darunter ist?

11.18 Eine Prüfung enthält 3 Fragen, die nur mit "ja" oder "nein" zu beantworten sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Prüfungskandidat durch bloßes Raten zwei oder drei Fragen richtig beantwortet?

11.19 Ein Schüler schätzt die Erfolgsaussicht bei einer Prüfung auf 70% ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er spätestens beim zweiten Antreten Erfolg hat?

Aufgaben aus der Qualitätssicherung

11.20 In einem Behälter befinden sich 35 einwandfreie und 5 defekte gleichartige Dichtungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen zufälligen Ziehen einer Dichtung (ohne dazwischen zurückzulegen)

a) drei einwandfreie Dichtungen,
b) wenigstens eine fehlerhafte Dichtung,
c) höchstens eine fehlerhafte Dichtung zufällig zu erhalten?

11.21 Bei der Fertigung von Bolzen ist die Wahrscheinlichkeit für einen fehlerhaften Durchmesser gleich 4%, für eine fehlerhafte Länge 5%. Beide Fehler treten unabhängig auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) einen fehlerfreien Bolzen,
b) einen fehlerhaften Bolzen,
c) einen Bolzen mit nur fehlerhaftem Durchmesser zu fertigen?

11.22 Bei der Fertigung von Spulen treten zwei Fehlerarten A und B unabhängig voneinander auf. Die Wahrscheinlichkeit für Fehlerart A ist gleich 5%, für Fehlerart B gleich 8%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einer Spule

a) kein Fehler,
b) nur eine Fehlerart,
c) höchstens eine Fehlerart,
d) entweder Fehlerart A oder Fehlerart B,
e) mindestens eine Fehlerart auftritt?

11.23 Ein komplizierter Herstellungsprozess gelingt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg, wenn der Prozess fünfmal ausgeführt wird?
b) Wie oft muss er mindestens durchgeführt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 80% mindestens einen Erfolg zu haben?

11.24 Die Fehlerdiagnose bei einem bestimmten elektronischen Bauteil erfolgt in zwei Schritten: Im ersten Schritt wird der Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% entdeckt. Falls der erste Diagnoseschritt nicht erfolgreich war, wird im zweiten Schritt der Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% entdeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Fehler durch die beschriebene Fehlerdiagnose nicht entdeckt?

11.25 In einem Warenpaket von 40 Einheiten sind 4 Einheiten fehlerhaft. Man entnimmt zufällig auf einmal zwei Einheiten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
a) keine **b)** genau eine **c)** höchstens eine **d)** mindestens eine **e)** zwei fehlerhafte Einheit(en) zu ziehen?

11.26 Ein Unternehmen besitzt einen Lieferanten, der erfahrungsgemäß eine bestimmte Warensendung mit Wahrscheinlichkeit 90% einwandfrei sendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei (unabhängig voneinander zu betrachtenden) Warensendungen
a) beide einwandfrei sind **b)** nur eine **c)** mindestens eine **d)** höchstens eine **e)** keine **f)** erst die zweite einwandfrei ist?

11.27 In einem Behälter sind 5 einwandfreie und 2 defekte Glühbirnen. Man entnimmt nun zufällig dem Behälter so lange Glühbirnen, die man nicht mehr zurücklegt, bis man eine einwandfreie erhält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der entnommenen Glühbirnen **a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 ist?

11.28 In einer Fertigungsabteilung ist bekannt, dass im Schnitt 1 % Ausschuss erzeugt wird (ein erzeugtes Stück ist mit Wahrscheinlichkeit 1 % Ausschuss). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 Stück kein Ausschuss ist?

11.29 Bei der laufenden Überwachung einer Fertigung wird stündlich stichprobenweise geprüft. Dabei wird ein bestimmter aufgetretener Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% anzeigt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Fehler
a) erst bei der zweiten **b)** spätestens bei der zweiten **c)** nach der zweiten
d) spätestens bei der dritten **e)** nicht vor der dritten Prüfung entdeckt wird?

11.30 Die Herstellung bestimmter Werkstücke erfolgt an drei Maschinen. Maschine A produziert 40% bei 2% Ausschuss, Maschine B 30% bei 4% Ausschuss und Maschine C den Rest bei 5% Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig entnommenes Werkstück Ausschuss ist?

11.31 Eine Lieferung von 20 Einheiten wird nach folgendem "Doppelstichprobenplan" geprüft: Man entnimmt eine Zufallsstichprobe von 3 Einheiten. Ist wenigstens eine Einheit fehlerhaft, so wird die Lieferung zurückgewiesen. Nur wenn alle Einheiten einwandfrei sind, wird nochmals eine Zufallsstichprobe von wieder 3 Einheiten entnommen. Die Lieferung wird danach angenommen, wenn alle Einheiten einwandfrei sind, sonst zurückgewiesen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung angenommen wird, wenn die Lieferung
a) eine **b)** zwei fehlerhafte Einheiten enthält?

11.32 Ein elektronischer Bauteil enthält 50 Transistoren. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Transistor innerhalb von 100000 h Betriebszeit ausfällt, ist 0,0008. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Transistoren des Bauteils in der angegebenen Betriebszeit ausfällt?

11.33 Die Beleuchtung eines Korridors soll mit unabhängig voneinander wirkenden Glühbirnen eines bestimmten Typs erfolgen. Man weiß, dass Glühbirnen dieses Typs mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% vor Erreichen einer Lebensdauer von 1000 h ausfallen. Wie viele Glühbirnen müssen zur Beleuchtung verwendet werden, damit mindestens eine davon mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 0,9999 eine Lebensdauer von 1000 h erreicht?

11.34 Eine Anlage besteht aus zwei unabhängigen Teilen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Teil A während eines Zeitraumes störungsfrei arbeitet, ist 90%, bei Teil B ist diese Wahrscheinlichkeit gleich 80%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) beide Teile störungsfrei arbeiten **b)** nur Teil A **c)** nur Teil B
d) wenigstens einer der beiden Teile störungsfrei arbeitet?

11.35 In einem Gerät werden 4 Schalter stets gleichartig beansprucht. Die Ausfallswahrscheinlichkeit (während der Nutzungsdauer) liegt bei einem Schalter bei 4%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) kein Schalter ausfällt, **b)** mindestens ein Schalter ausfällt,
c) mehr als ein Schalter ausfällt?

11.36 Beim Betrieb einer bestimmten Anlage machen die unabhängig voneinander auftretenden Störfälle A, B, C mit Wahrscheinlichkeit 7%, 3% bzw. 1% während eines Tages ein Eingreifen durch das Bedienungspersonal nötig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im genannten Zeitraum
a) keine Störung **b)** nur Störfall A **c)** (irgend)eine Störung
d) mehr als ein Störfall auftritt?

11.37 Eine Baugruppe besteht aus drei Teilen. Jeder der drei Bauteile besitzt unabhängig von den anderen eine Intaktwahrscheinlichkeit R für eine bestimmte Betriebsdauer von 90%. Die Baugruppe funktioniert, wenn wenigstens zwei Bauteile funktionstüchtig sind. Berechne die Intaktwahrscheinlichkeit der Baugruppe.

Im Überblick: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Vorgang, dessen Ergebnis nicht oder nur in gewissen Grenzen voraussagbar ist. Die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** stellt Regeln auf, denen Zufallsexperimente unterliegen.

Statistische Festlegung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A: $P(A) \approx \frac{k}{n}$
k ist die Anzahl, wie oft das Ereignis A bei n Ausführungen des Zufallsexperimentes eingetreten ist. P (A) ist der zu erwartende Anteil der Versuchsausführungen, in denen A eintritt.

Klassische Festlegung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A in einem **Laplace-Experiment** (nur endlich viele, gleichwahrscheinliche Fälle)

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}} = \frac{g}{m}$$

Ein **sicheres** Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit 1; ein **unmögliches** Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.

A **und** B: Ereignis, bei dem A und B **zugleich** eintreten.

A **oder** B: Ereignis, bei dem **mindestens eines** der Ereignisse A oder B eintritt.

$\overline{A}$: Gegenereignis von A; tritt ein, wenn A nicht eintritt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A) = \frac{P(A \textbf{ und } B)}{P(A)}$: Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eintritt.

A, B heißen **unvereinbar**, wenn sie nicht gemeinsam auftreten können, d.h. wenn $P(A \textbf{ und } B) = 0$ ist.

A, B heißen **unabhängig**, wenn das Eintreten von A keinen Einfluss auf das Eintreten von B hat, d.h. wenn $P(B|A) = P(B)$.

Additionssatz ("**ODER-Regel**"):

$P(A \textbf{ oder } B) = P(A) + P(B) - P(A \textbf{ und } B)$ für beliebige Ereignisse;

$P(A \textbf{ oder } B) = P(A) + P(B)$ für unvereinbare Ereignisse.

Multiplikationssatz ("**UND-Regel**"):

$P(A \textbf{ und } B) = P(A) \cdot P(B|A)$ für beliebige Ereignisse;

$P(A \textbf{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$ für unabhängige Ereignisse.

Baumdiagramm: Wertvolle graphische Hilfe bei der Behandlung von mehrstufigen Zufallsexperimenten.

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

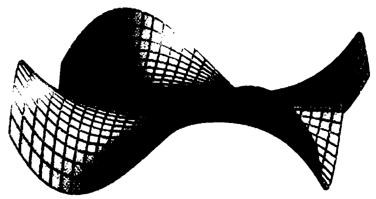
2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der **Summe** der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

12 Moderne Hilfsmittel

12.1 Einführung in Mathcad (Teil 1)

Die kennzeichnenden Eigenschaften von Mathcad können kurz wie folgt angegeben:

- Software für technische Berechnungen (symbolische, besonders aber sehr leistungsfähige numerische Problemlösungsfähigkeiten
- Übliche mathematische Schreibweise
- Unübertroffene Möglichkeiten bei der Dokumentation der Berechnungen
- Rechnungen auch mit Einheiten möglich
- Deutschsprachige Version vorhanden.



Rechnungen, Text und Graphiken können an jeder Stelle des "Arbeitsblattes" eingefügt werden. Auf diese Weise kann ein Arbeitsblatt nach Belieben mit Gleichungen, Diagrammen und Texterläuterungen versehen werden, so dass Mathcad auch als Schreibprogramm für technische Texte verwendet werden. Darüber hinaus kann ein Mathcad-Arbeitsblatt leicht ganz oder teilweise über die Zwischenablage in professionelle Textverarbeitungsprogramme wie etwa WORD übernommen werden.

Im Folgenden wird eine kurze Einführung in das Arbeiten mit Mathcad gegeben, die nur eine erste Bekanntschaft mit dieser Software sein kann. Die Inhalte beschränken sich auf Teile der elementaren Mathematik, Inhalte zur Differential- und Integralrechnung sowie Matrizenrechnung folgen in "Ingenieur-Mathematik 3".

Abb. 12.1 zeigt die Benutzeroberfläche von Mathcad. Sie besitzt den gleichen Aufbau wie übliche Windows-Programme. Dazu kommt noch die so genannte Rechenpalette, die alternativ zur Verendung das Ausführen aller mathematischen Operationen erleichtert. Sollte sie nicht eingeblendet sein, so kann dies im Ansicht-Menü und Anwählen des Eintrages Symbolleisten geschehen.

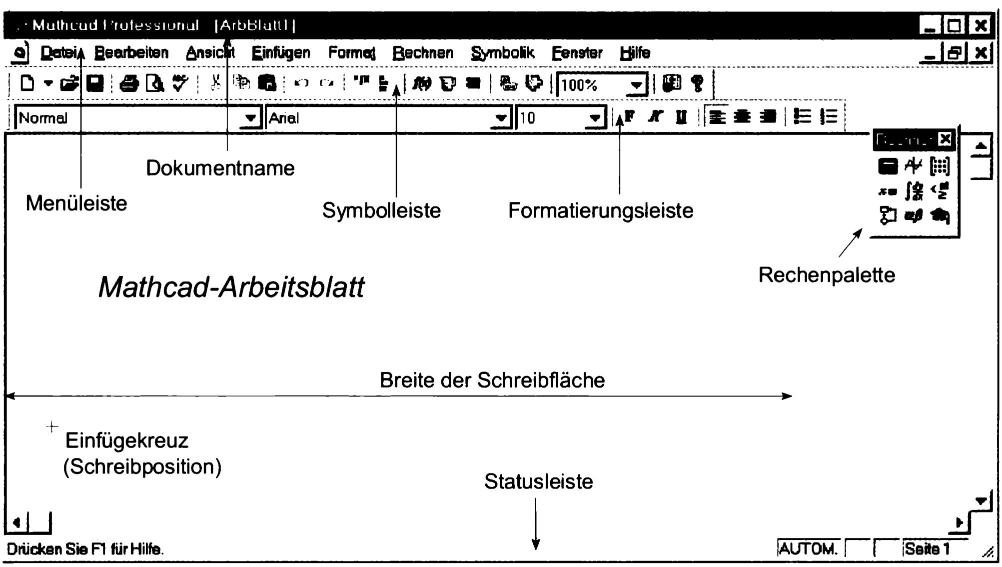


Abb. 12.1

Mit Hilfe der Rechenpalette können durch einen Mausklick weitere Paletten geöffnet werden. Die folgende Abbildung 12.2 zeigt diese Paletten. Es empfiehlt sich, nur benötigte Paletten geöffnet zu lassen und dies nach Möglichkeit rechts von der Randlinie des Arbeitsblattes.

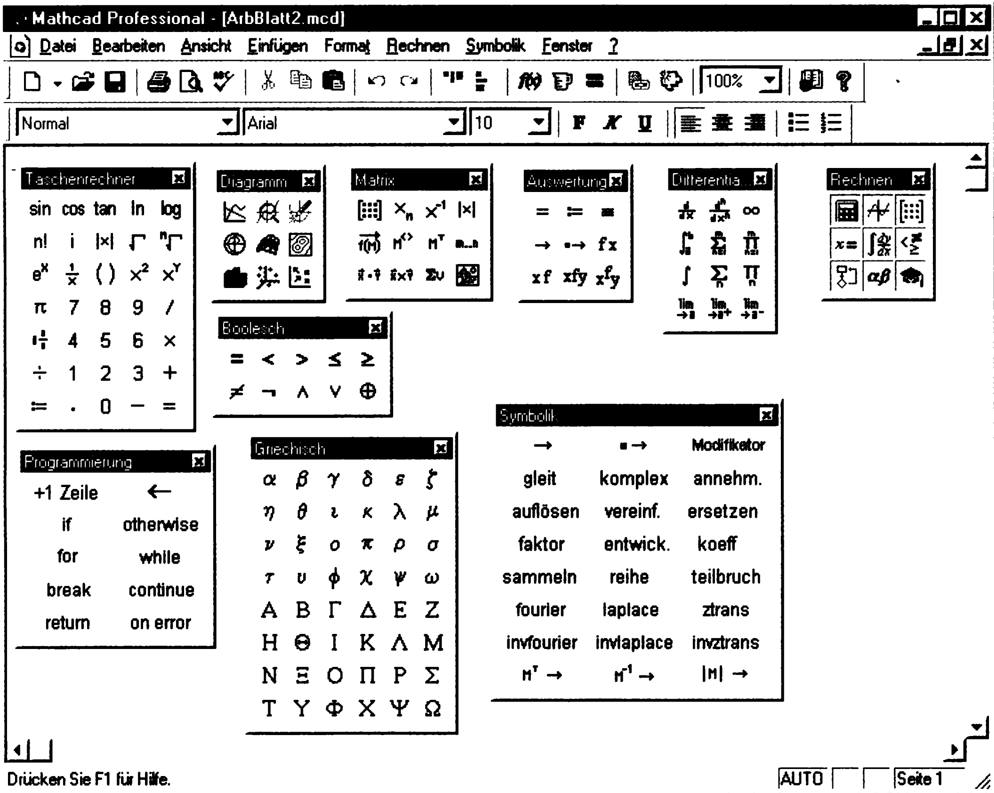
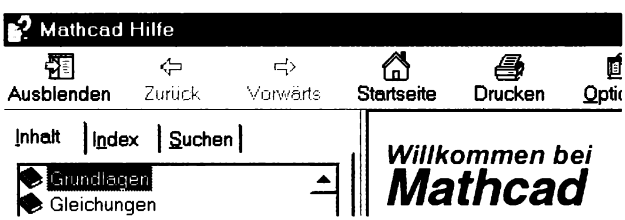


Abb. 12.2 Mathcad-Paletten

Das **Speichern**, **Öffnen**, **Seite einrichten** und **Drucken** von Arbeitsblättern sowie das **Kopieren**, **Einfügen**, **Rückgängigmachen** und **Suchen** erfolgt in der für Windows-Programme üblichen Weise. Die Standardendung für Arbeitsblätter ist .mcd (mcd steht für Mathcad-Dokument).



Hilfe erhält man durch Anklicken von ? in der Symbolleiste oder durch Drücken der F1-Taste.
Während der Anzeige einer Fehlermitteilung, erhält man Hilfe durch Drücken von F1.

Über das "**Informationszentrum**" (erreichbar über das Hilfe-Menü oder durch Anklicken von in der Symbolleiste) sind Referenztabellen (physikalische und technische Konstanten u.a.) sowie über 300 so genannte "Quicksheets" zugänglich. Letztere geben eine rasche Hilfe zu verschiedenen typischen Aufgabenstellungen. Teile von Quicksheets können auch in das eigene Arbeitsblatt eingefügt werden.

Auf der Mathcad-CD befindet sich unter dem Namen mathcad.pdf eine Online-Version des **Mathcad-Benutzerhandbuchs** mit dem Referenzhandbuch (Acrobat Reader zum Öffnen nötig).

Ein Arbeitsblatt kann drei verschiedene Arten von Bereichen enthalten:

- **Textbereiche** zur Erläuterung und Dokumentation
- **Rechenbereiche** zur Eingabe aller mathematischen Terme und Durchführung aller Berechnungen
- **Graphikbereiche** für 2D- und 3D-Graphiken.

Beginnt man zu **schreiben** (nach Anklicken der gewünschten Schreibposition mit der Maus, ersichtlich an der Lage des Einfügekreuzes), so befindet man sich automatisch in einem Rechenbereich. Durch **Drücken der Leertaste** geht der Rechenbereich in einen Textbereich über.

Drückt man *vor* dem Schreiben die ["] -Taste, so ist man sofort in einem Textbereich.

$\boxed{1+\frac{2}{3}}$

$1+\frac{2}{3}\rightarrow\frac{5}{3}$

Eine **symbolische Auswertung:**
Dies geschieht durch Eingabe des so genannten **symbolischen Gleichheitszeichen** → durch Drücken von [Strg] + [.] (bei gedrückter [Strg] -Taste [.] drücken) oder durch Anklicken des Auswertepfeils in der Symbolik-Palette. Nach einem Mausklick außerhalb des vorübergehend eingeblendeten rechteckigen Rahmens, der die Größe des Rechenbereiches anzeigt, erhält man das Ergebnis.

$\boxed{1+\frac{2}{3}}$

$1+\frac{2}{3}=1.667$

Eine **numerische Auswertung:**
Gibt man das numerische Gleichheitszeichen durch Drücken der [=] -Taste ein, so wird als Ergebnis (wieder nach einem Mausklick außerhalb des Rechenbereichs) eine Kommazahl zurückgegeben.

Mathcad setzt im Ergebnis einer numerischen Auswertung einen Platzhalter ▪ für die Einheit. Ersetzt man den Platzhalter nicht durch eine Einheit (siehe eventuell Seite 320), so verschwindet der Platzhalter bei einem Mausklick außerhalb des betreffenden Bereichs.

$x := 3 \qquad 2\cdot x = 6$

$x + 5 = 8$

Die **Definition einer Variablen** (Wertzuweisung) erfolgt nach Schreiben des Variablennamens mit Hilfe eines Doppelpunktes. Die Zuweisung gilt *rechts* sowie *unterhalb* der Definition im Arbeitsblatt. Zwischen 2 und x könnte das Multiplikationszeichen weggelassen werden.
Mathcad unterscheidet bei der Bezeichnung von Variablen zwischen Groß- und Kleinbuchstaben.

$a := 2 \qquad \boxed{b := a + 3}$

Diese Variable bzw. Funktion ist oben nicht definiert.

Die Definition von b muss rechts auf gleicher Höhe oder unterhalb der Definition von a erfolgen!!

$\pi = 3.142 \qquad e = 2.718$

$x + 5 = 8$

Vordefinierte Variable: Die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e.
π durch Eingabe von p und danach [Strg] + [G] (G wie Griechisch) oder aus Griechisch-Palette.

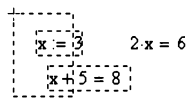
Symbolische Berechnu|

Während des Schreibens wird der Textbereich, ersichtlich an einem vorübergehend eingeblendeten rechteckigen Rahmen mit drei "Ziehpunkten" erweitert. Der Einfügebalken | in einem Textbereich kennzeichnet die aktuelle Schreibposition bzw. Position für das Einfügen oder Löschen von Textzeichen.

Soll sich ein Textbereich automatisch über die **gesamte Breite einer Seite** erstrecken, so geht man wie folgt vor: In den Textbereich klicken, Menü Format/Eigenschaften (alternativ rechte Maustaste drücken, Eigenschaften wählen), Registerkarte "Text", "Seitenbreite verwenden" aktivieren.

Markieren (Auswahl) von Bereichen:

Bei gedrückter Maustaste spannt man einen strichliertes Auswahlrechteck über die zu markierenden Bereiche. Dabei genügt ein teilweises Erfassen. Lässt man nun die Maustaste los, so ist jeder einzelne der so erfassten Bereiche durch einen strichlierten Rahmen markiert. War nur ein einziger Bereich zu markieren, so besteht das Auswahlrechteck aus durchgehenden Linien.



Einen einzelnen Bereich kann man auch markieren, indem man bei gedrückter [Strg] -Taste auf den Bereich klickt.

Verschieben von Bereichen:

Nach Markieren des Bereichs (der Bereiche) geht man mit dem Mauszeiger auf den Rand eines der strichlierten Rahmen, wodurch der Mauszeiger die Form einer Hand annimmt. Bei gedrückter Maustaste wird dieser Bereich (und die anderen markierten Bereiche) in die gewünschte Position gezogen.

Kopieren von Bereichen:

Nach Markieren des Bereichs (der Bereiche) Vorgangsweise wie üblich in Windows-Programmen.

Senkrechtes oder waagrechtes Ausrichten mehrerer Bereiche:

Nach Markieren der auszurichtenden Bereiche werden im Format-Menü die Optionen "Bereiche ausrichten" und danach "Vertikal" angewählt. So lange die strichlierte Markierung aufrecht ist, ist anschließend noch eine einheitliche Verschiebung der so markierten Bereiche möglich. In analoger Weise ist auch eine horizontale Ausrichtung, d.h. etwa eine Ausrichtung eines Rechen- und Textbereiches auf gleiche Höhe möglich.

Zuerst:		Nach senkrechter und waagrechter Ausrichtung:	
$x := 3$	Variablendefinition	$x := 3$	Variablendefinition
$\quad x + 5 = 8$		$x + 5 = 8$	

Löschen von Bereichen:

Bereich(e) markieren, dann [Strg] + [d] (bei gedrückter [Strg] -Taste d eintippen, d wie delete).

Trennen einander überlappender Bereiche:

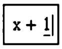
Format-Menü, Option "Bereiche trennen"

Bereiche in die Zwischenablage kopieren:

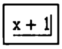
Bereich(e) markieren, kopieren wie in Windows-Programmen üblich; danach Einfügen in ein anderes Mathcad-Arbeitsblatt oder in etwa in ein WORD-Dokument (bei Berechnungen kann ein Doppelklick auf den eingefügten Bereich notwendig sein).

Beispiel einer Termeingabe: $\frac{x+1}{x \cdot y - 1} + 1$

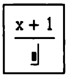
Während in der Textverarbeitung ein einfacher vertikaler Strich als Einfügemarke genügt, ist die übliche mathematische Schreibung "zweidimensional"; daher verwendet Mathcad für mathematische Terme *zwei Bearbeitungslinien*, eine waagrechte und eine vertikale.



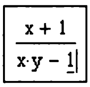
x + 1 [Leer] (Leertaste)



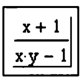
Die waagrechte Bearbeitungslinie umschließt den gesamten Ausdruck (ansonsten würde man nur 1 durch das Folgende dividieren)



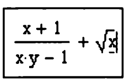
/ (Divisionszeichen)



Zwischen x und y das Multiplikationszeichen einfügen, da sonst xy als neuer Variablenname aufgefasst wird!



Dreimal [Leer] drücken, bei jedem Leerzeichen nehmen die Bearbeitungslinien einen *weiteren* Teil des Terms auf, bis schließlich der gesamte Bruch erfasst ist.



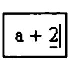
Wurzel aus der Taschenrechner-Palette oder durch Eintippen von \ ; nach Fertigstellen des Terms Mausklick außerhalb des Rechenbereichs.

Weitere Beispiele für Termeingaben (beachte dabei die Bearbeitungslinie!):

$\frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{3}} - 1\right)$	1 / 2 [Leer] * (e ^ x / 3 [Leer] [Leer] - 1 [Leer])
$a + \frac{3 \cdot b^2}{a + \frac{1}{3} + 0.8} + b$	a + 3 * b ^ 2 [Leer] [Leer] / a + 1 / 3 + 0 . 8 [Leer] [Leer] [Leer] + b
$\sin(30 \cdot \mathrm{Grad}) = 0.5$	s i n (30 * G r a d) = Fehlt die Angabe "Grad", so rechnet Mathcad im Bogenmaß. Das Multiplikationszeichen kann entfallen. Es kann auch das übliche °-Zeichen für das Gradmaß verwendet werden: siehe dazu Seite 320.
$1 - [a - 2 \cdot (4 + a)]$	1 - (a - 2 * (4 + a))

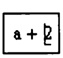
Terme bearbeiten

Beim Ändern eines Terms ist zwischen dem Einfügemodus und dem Schreibmodus zu unterscheiden:



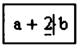
Horizontale Bearbeitungslinie nach links: **Schreibmodus**

Umschalten: Einfügetaste [Einfg], die wie ein Schalter wirkt



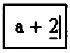
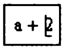
Horizontale Bearbeitungslinie nach rechts: **Einfügemodus**

Aufgabe: Der Faktor 2 soll durch 3 ersetzt werden



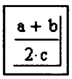
Vertikale Bearbeitungslinie hinter 2 plazieren, danach [←] und 3 schreiben.

Aufgabe: Ein Plus- soll durch ein Minuszeichen ersetzt werden.

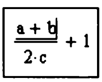
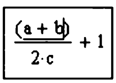
Vertikale Bearbeitungslinie hinter 2 plazieren (2 anklicken), Einfügetaste [Einfg], Rücktaste [←], Minuszeichen einfügen

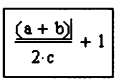
Aufgabe: Zum bestehenden Term soll 1 hinzugefügt werden.



So lange [Leer] drücken, bis die vertikale Bearbeitungslinie im Schreibmodus den gesamten Bruch erfasst hat. Soll 1 vor dem Bruch stehen, muss die vertikale Bearbeitungslinie im Einfügemodus sein. Danach zuerst das Operationszeichen und schließlich 1.

Aufgabe: Der bestehende Term $\frac{a + b}{2 \cdot c} + 1$ soll in $\frac{(a + b)^2}{2 \cdot c} + 1$ verändert werden.

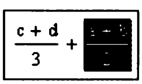
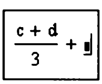


Zuerst den Zähler mit der horizontalen Bearbeitungslinie erfassen.

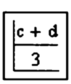
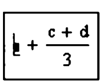
Danach das einfache Anführungszeichen ['] eingeben (oder Klammerpaar auf der Taschenrechner-Palette anklicken), wodurch Klammern gesetzt werden.

Bearbeitungslinie durch [Leer] erweitern, schließlich ^ 2

Aufgabe: Teil eines Terms verschieben

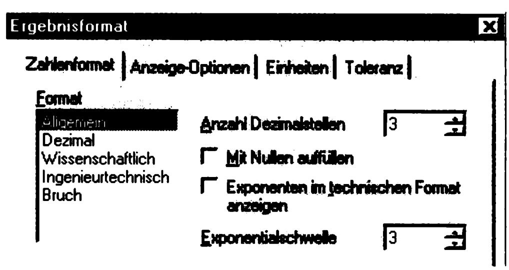
Teil des Terms durch Überstreichen mit der Maus markieren; in die Zwischenablage ausschneiden; durch [←] [←] oder [Entf] Pluszeichen löschen;

Gesamten Restterm durch eine horizontale Bearbeitungslinie im Einfügemodus erfassen; Pluszeichen einfügen; Teilterm aus der Zwischenablage einfügen.

Ergebnisformat

Jedes Ergebnis einer Rechnung, das angezeigt wird, kann formatiert werden. Dazu wählt man im Format-Menü die Option "Ergebnis...", wodurch man das nebenstehende Dialogfenster erhält.



Tipp: Will man den Wert eines Ergebnisses nur einmal kurz mit voller Genauigkeit sehen, so klickt man auf das Ergebnis, drückt [Strg] + [↑] + [N] und schaut auf die Statusleiste.

$\frac{100}{6} = 16.667 \qquad \frac{1}{30} = 0.033$

$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{0.006} = 166.667$

$\frac{1}{512} = 1.953\text{x } 10^{-3} \qquad \frac{1}{0.0003} = 3.333\text{x } 10^{3}$

Exponentialschwelle 4

$\frac{1}{512} = 0.002 \qquad \frac{1}{0.0003} = 3333.333$

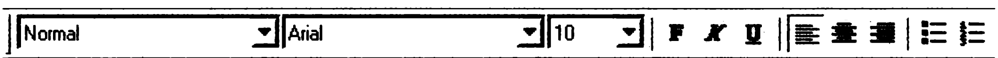
Bei dieser Einstellung werden berechnete Zahlen, die nicht innerhalb von 10^{-3} und 10^{3} (d.h. Exponentialschwelle 3) liegen, als Gleitkommazahlen angezeigt. Die Anzahl der Nachkommastellen ("Anzahl Dezimalstellen") ist 3. Am Ende auftretende Nullen werden nicht angezeigt. Soll dies geschehen, muss "Mit Nullen auffüllen" aktiviert werden.

Will man die Darstellung als Gleitkommazahl vermeiden, so ist die Exponentialschwelle zu erhöhen, etwa auf 4. Bei "Anzahl Dezimalstellen" = 3 wird nun allerdings 1/512 nur mehr mit einer geltenden (oder signifikanten) Ziffer angezeigt. Man kann dies ändern, wenn man gleichzeitig den Eintrag bei "Anzahl Dezimalstellen" erhöht.

Einzelnes Ergebnis formatieren: Zuerst den betreffenden Bereich anklicken. Dann im Format-Menü die Option "Ergebnis" wählen oder schneller auf das Ergebnis doppelklicken.

Formatierung von Textbereichen

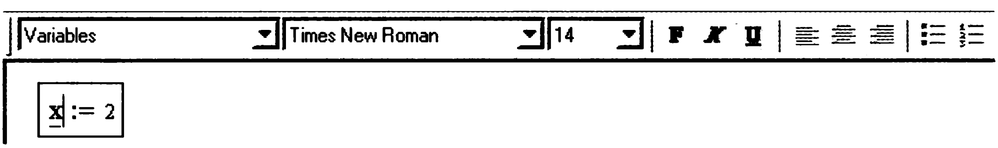
Einige Optionen zur Formatierung von Textbereichen (Schriftart, Schriftgröße, Fettdruck, u.a.) stehen bereits in der Formatierungleiste zur Verfügung:



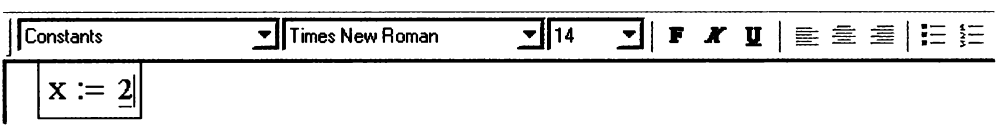
Weitere Möglichkeiten wie Hoch- und Tiefstellung oder Unterstreichung bietet das Dialogfenster Textformat; man erreicht es, wenn man im Format-Menü die Option "Text" wählt.

Formatierung von Gleichungen

Die in einer Gleichung oder Definition verwendete Schrift kann ebenfalls geändert werden. Dies kann auch mit der Formatierungleiste geschehen. Um etwa die Schrift von Variablen zu ändern, klickt in einem Rechenbereich auf eine Variable und ändert mit Hilfe der Formatierungsleiste:



Unabhängig davon kann auf diese Weise auch die Schrift für Konstanten geändert werden:



Symbolisches Umformen von Termen

Dies kann mit Hilfe der Symbolik-Palette erfolgen.

$a + 2 \cdot a \rightarrow 3 \cdot a$

Symbolische Auswertung mit Hilfe des symbolischen Gleichheitszeichens.

$a := 1 \qquad a + 2 \cdot a \rightarrow 3$

Das symbolische Gleichheitszeichen berücksichtigt alle vorhergehenden Definitionen von Variablen.

$a := a \qquad a + 2 \cdot a \rightarrow 3 \cdot a$

$a := 1$

Eine symbolische Auswertung wird jedoch trotzdem möglich, wenn man eine Neudefinition in der Form a := a vornimmt. Der numerische Wert der betreffenden Variablen bleibt jedoch erhalten.

$\frac{a^4 - 1}{a + 1} \rightarrow \frac{(a^4 - 1)}{(a + 1)}$

Mathcad hat keine Auswertung gefunden; eine Vereinfachung kann auch Ansichtssache sein.

Vereinfachen:

$\frac{a^4 - 1}{a + 1} \text{ vereinfachen} \rightarrow a^3 - a^2 + a - 1$

$\frac{1}{2a} + \frac{1 - 3a}{2 \cdot a \cdot (a - 1)} \text{ vereinfachen} \rightarrow \frac{-1}{(a - 1)}$

$\sqrt{a^2} \left| \begin{array}{l} \text{vereinfachen} \\ \text{annehmen, } a \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow a$

Mit so genannten Schlüsselwörtern kann man die Auswertung steuern. Nach Eingabe des Terms (noch im Rechenbereich befindlich) klickt man auf das Schlüsselwort "vereinfachen" in der Symbolik-Palette.

Hier wird als ein zweites Schlüsselwort "annehmen" aus der Symbolik-Palette unmittelbar nach dem ersten eingefügt. Der Platzhalter ist durch Annahmebedingung zu ersetzen (≥ aus der Booleschen Palette).

a könnte ja für auch eine negative Zahl stehen!

Entwickeln:

$(a + 2 \cdot b) \cdot (a - b) \text{ entwickeln} \rightarrow a^2 + a \cdot b - 2 \cdot b^2$

Anklicken des Schlüsselwortes "entwickeln"; wenn unvollständig von der Palette, dann ergänzen; Platzhalter (kleines schwarzes Feld) löschen, auf seine Bedeutung wird nicht eingegangen.

Faktorisieren:

$a^3 - a \text{ faktor} \rightarrow a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)$

$1638 \text{ faktor} \rightarrow 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$

Anklicken des Schlüsselwortes "faktor" auf der Symbolik-Palette. Platzhalter löschen, auf seine Bedeutung wird nicht eingegangen.

Substituieren (Ersetzen)

$a^2 + 2 \cdot a - 1 \text{ ersetzen, } a = b + 1 \rightarrow (b + 1)^2 + 2 \cdot b + 1$

$a^2 + 2 \cdot a - 1 \text{ ersetzen, } a = 1.8 \rightarrow 5.84$

Schlüsselwort "ersetzen" aus der Symbolik-Palette entnehmen und ausfüllen

Summen

$\sum_{k=1}^{n} k^2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (n + 1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (n + 1)^2 + \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{6}$

$q := 1.04 \qquad \sum_{i=0}^{8} \frac{100}{q^i} = 773.274$

Summensymbol aus der Differential/Integral-Palette entnehmen und ausfüllen

Hinweis: Statt einer symbolischen Auswertung mit Hilfe der Symbolik-Palette kann auch das **Symbolik-Menü** verwendet werden. In diesem Fall ist die Auswertung unabhängig von vorherigen numerischen Zuweisungen der Variablen.

Entwickeln mit dem Symbolik-Menü:

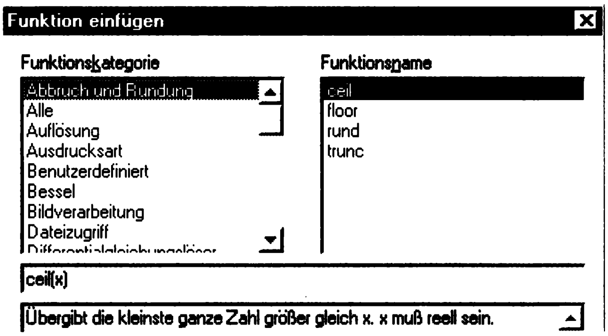
$(a + 2 \cdot b) \cdot (a - b)$

$a^2 + a \cdot b - 2 \cdot b^2$

Wichtig ist, dass der gesamte Term mit der Bearbeitungslinie markiert wird, da sonst nur der markierte Teil entwickelt wird. Danach wird im Symbolik-Menü die Option "Entwickeln" gewählt.
Wählt man im Symbolik-Menü die Option "Auswertungsformat", so kann man u.a. auch angeben, dass der ausgewertete Term in der gleichen Zeile wie der ursprüngliche Term steht.

Funktionen

Mathcad stellt eine große Anzahl von Funktionen zur Verfügung. Einen Katalog der Funktionen erhält man im Einfügen-Menü durch Anwählen der Option "Funktion" oder durch Anklicken des Symbols f(x) in der Menüleiste:



Nach Kategorien geordnet entnimmt man die Funktionsnamen mit einer kurzen Beschreibung.

Beispiele:

$\exp(2) = 7.389 \qquad e^2 = 7.389$ — Exponentialfunktion durch exp(x) oder e^x

$\ln(2) = 0.693 \qquad \log(2) = 0.301$ — Natürlicher sowie dekadischer Logarithmus

$\sin(45\mathrm{Grad}) = 0.707 \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$

$\tan(1) = 1.557$

Winkel im Bogenmaß, wenn nicht "Grad" unmittelbar nach der Winkelzahl oder nach einem Malzeichen angefügt wird

Aufgabe: Erstelle eine **Wertetabelle** der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{4} + x + 2$ für den Definitionsbereich [−1; 3] bei einer Schrittweite 0,5 und zeichne ihren **Graph**.

$x := -1, -0.5..3$

Zuerst wird x (oder eine Variable mit einem anderen Namen) als so genannte **Bereichsvariable** definiert. Dies ist nichts weiter als eine gleich abständige Folge von Zahlen, in unserem Fall bei einer Schrittweite von 0,5 also die Folge $\langle -1;\ -0,5;\ 0; \ldots 3 \rangle$. Die allgemeine Definition erfordert die Angabe des ersten und zweiten Wertes der Folge, getrennt durch einen Beistrich. Nach einem *Strichpunkt* folgt der Endwert. Fehlt der zweite Wert, so wird 1 als Schrittweite genommen.

$$f(x) := \frac{x^2}{4} + x + 2$$

x =	f(x) =
-1	1.25
-0.5	1.563
0	2
0.5	2.563
1	3.25
1.5	4.063
2	5
2.5	6.063
3	7.25

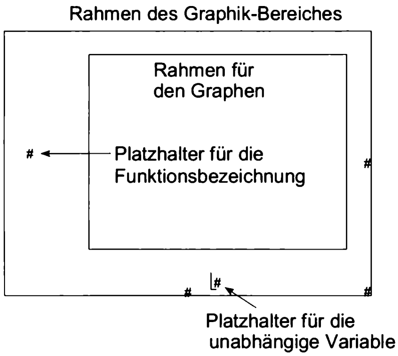
Definition der Funktion rechts neben oder unter der Bereichsvariablen x. Statt f könnte natürlich auch ein anderer Funktionsname gewählt werden.

Wertetabelle:

Die beiden Spalten der Wertetabelle erhält man durch Eingabe des numerischen Gleichheitszeichens = nach Eintippen von x bzw. f(x).

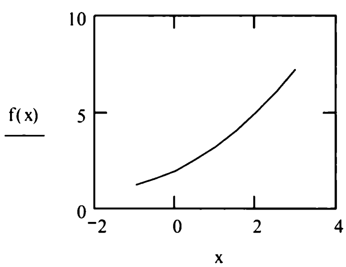
Die beiden Bereiche können nach erfolgter Markierung horizontal ausgerichtet werden, wenn man im Format-Menü die Option "Bereiche ausrichten" und dann "Horizontal" wählt (Seite 310).

Stören die unterschiedlichen Anzahlen der Nachkommastellen, so wählt man im Format-Menü die Option "Ergebnis" und aktiviert dann "Mit Nullen auffüllen" (Seite 313).

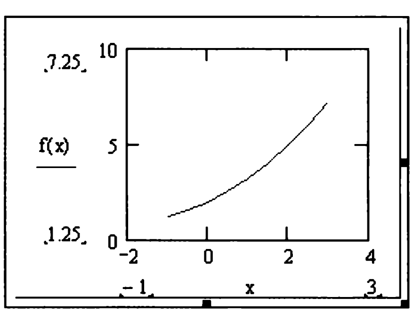


Zeichnen des **Graphen:**

Anklicken des Symbols auf der Rechen-Palette (oder Eintippen von @). Dadurch öffnet sich die Diagramm-Palette; dort das Symbol für ein (x,y)-Diagramm, , anklicken. Dadurch wird ein rechteckiger Graphik-Bereich für ein (x,y)-Diagramm erzeugt, dessen linker obere Eckpunkt mit der Lage des Einfügekreuzes zusammenfällt. Der Graphik-Bereich kann wie ein anderer Bereich auch nachträglich beliebig im Arbeitsblatt positioniert werden. Seine Größe kann überdies durch Ziehen mit der Maus an den drei Ziehpunkten geändert werden.

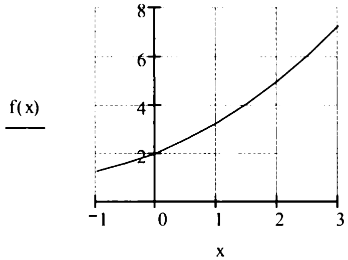


Fügt man x bzw. f(x) anstelle ihrer Platzhalter ein, und klickt auf eine Stelle außerhalb des Graphikbereiches, so erzeugt man die **Standardform** des Diagramms. Dabei zeichnet Mathcad den Funktionsgraphen durch Berechnung der Funktionswerte f(x) an den durch die Bereichsvariable x gegebenen Stellen und verbindet die so erhaltenen Punkte geradlinig. Daher wird ein Graph durch eine Verkleinerung der Schrittweite im Allgemeinen "glatter" werden.

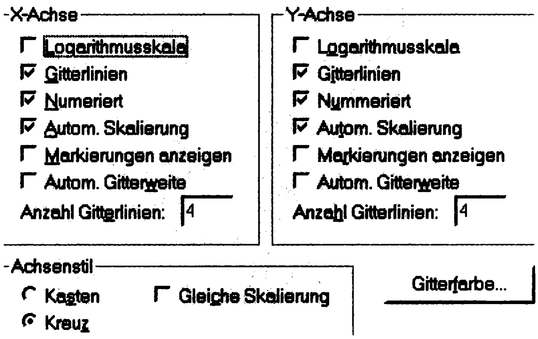


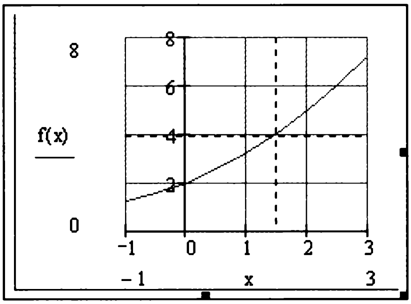
Änderung der Skalierung:

Anklicken des Graphikbereiches. Mathcad zeigt vier Zahlen jeweils zwischen zwei kleinen Ecksymbolen an, nämlich die x- bzw. y-Randwerte der gezeichneten Funktion y = f(x). Wir klicken −1 an, löschen diesen Wert und schreiben statt dessen wieder −1 (oder einen anderen gewünschten Wert). Die kleinen Ecksymbole verschwinden dort, der Beginn der x-Achse ist nun *fix* mit −1 festgelegt. Ähnlich legt man das Ende der x-Achse mit 3 fest. Entsprechend können die Grenzen der y-Achse mit 0 und 8 fixiert werden.



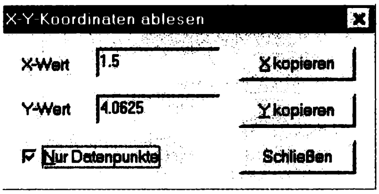
Weitere Änderungen können nach einem Doppelklick auf den Graphikbereich durchgeführt werden. Es öffnet sich ein Fenster mit mehreren Registerkarten. Wir füllen die erste wie folgt aus:



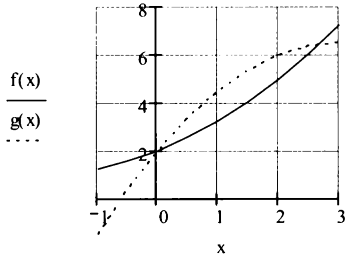


Koordinaten ablesen: Graphikbereich mit rechter Maustaste anklicken, "Koordinaten ablesen..." wählen, "Nur Datenpunkte" aktivieren und irgendeinen Punkt der Kurve anklicken.

Es erscheint ein Fadenkreuz-Cursor, der mit der Schrittweite der Bereichsvariablen x (unabhängige Variable) zum Ablesen des Koordinaten bewegt werden kann. Diese können auch einzeln durch Anklicken der entsprechenden Schaltfläche in die Zwischenablage kopiert werden und von dort in das Arbeitsblatt eingefügt werden.



$$g(x) := \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + 2$$



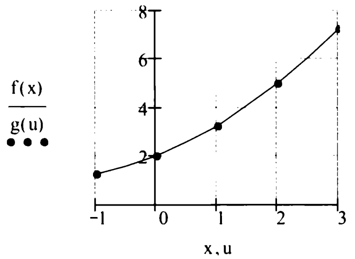
Zeichnen eines weiteren Graphen:

Funktion definieren, etwa g(x); danach Gaphikbereich der ersten Funktion anklicken, dort f(x) anklicken, Leer (damit f(x) insgesamt durch die Bearbeitungslinie erfasst ist), nach einem Beistrich g(x) schreiben, Klick außerhalb des Graphikbereiches.

Mathcad wählt für die "2.Spur" (= Graph der zweiten Funktion) ein bestimmtes Format. Spurenformate kann man ändern, wenn man nach einem Doppelklick auf den Graphikbereich die Registerkarte "Spuren" wählt und diese wunschgemäß ausfüllt.

$u := -1..3 \qquad g(x) := f(u)$

$u := -1..3 \qquad g(u) := f(u)$

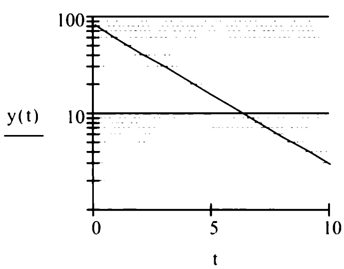


Hervorheben einzelner Kurvenpunkte einer Funktion f(x)

Dazu definiert man eine neue Bereichsvariable und dazu eine weitere Funktion, die an den Werten der neuen Bereichsvariablen mit f(x) übereinstimmt. Die neue Bereichsvariable (hier mit Schrittweite 1) und die neue Funktion werden dem Diagramm von f(x) hinzugefügt.
Nach einem Doppelklick auf die Graphik wählt man die Registerkarte "Spuren" und dort als Spur 2 als Format "Punkte" mit einer geeigneten Stärke.

Spur 1	kein	____	rot	Linien	1
Spur 2	kein	^^^	blau	Punkte	3

$t := 0..10 \qquad y(t) := 80 \cdot e^{-\frac{t}{3}}$



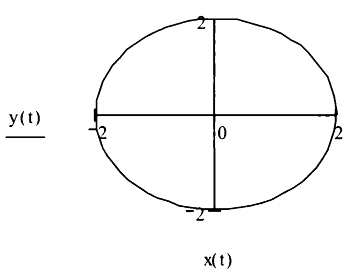
Logarithmische Skalierung:

Eine oder beide Achsen können auch logarithmisch geteilt werden. Dies soll am Beispiel einer ordinatenlogarithmischen Teilung gezeigt werden.
Bei der Bereichsvariablen t fehlt die Angabe der Schrittweite (nach 0 schreibt man nach einem Beistrich sofort 10). In diesem Fall gilt als Schrittweite 1. Nach einem Doppelklick auf die Graphik kann man die Formatierung der x-Achse unverändert lassen, ändert jedoch die Formatierung der y-Achse wie gezeigt und aktiviert als Achsenformat "Kreuz".

Y-Achse:
- [x] Logarithmusskala
- [x] Gitterlinien

$t := 0, 01..2 \cdot \pi$

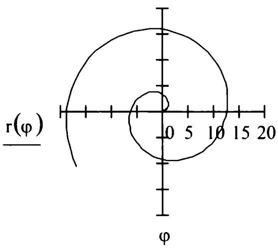
$x(t) := 2 \cdot \cos(t) \qquad y(t) := 2 \cdot \sin(t)$



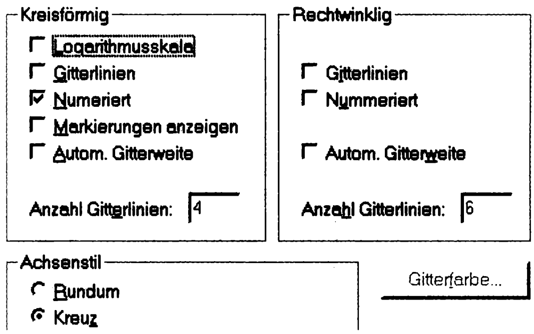
Kurve in Parameterdarstellung:

Liegt eine Kurve in Parameterdarstellung
x = x(t), y = y(t)
vor, so lauten nun die Einträge an den beiden Achsen x(t) bzw. y(t).

$\varphi := 0, 0.1..10 \qquad r(\varphi) := 2 \cdot \varphi$

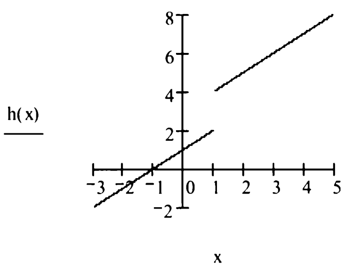


Kurve in Polarkoordinaten: $r = r(\varphi)$
Man kann auch in Mathcad den griechischen Buchstaben φ nehmen: j eintippen, danach Strg + G.
Statt des Symbols für ein (x,y)-Diagramm ist das Symbol ("Kreisdiagramm") der Diagrammpalette anzuklicken. Die weitere Formatierung ist analog jener bei einem (x,y)-Diagramms, d.h. zuerst Doppelklick auf den Graphik-Bereich und dann die Formatierung vornehmen. Im Beispiel wurde verwendet:



$x := -3, -2.99..5$

$$h(x) := \left|\begin{array}{l} x + 1 \ \text{ if } \ x \le 1 \\ x + 3 \ \text{ if } \ x > 1.01 \end{array}\right.$$



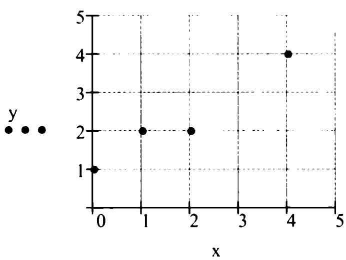
Abschnittsweise definierte Funktionen

Es soll etwa die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \le 1 \\ x + 3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

graphisch dargestellt werden. Hier kann man die Palette *Programmierung* heranziehen und dort die Schaltfläche *Zeile hinzufügen* drücken. Das $\le$-Zeichen entnimmt man der *Booleschen* Palette. Durch $x > 1.01$ statt $x > 1$ verhindert man die (fast) senkrechte Verbindungslinie zwischen dem unteren und oberen Teilstück des Graphen.

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

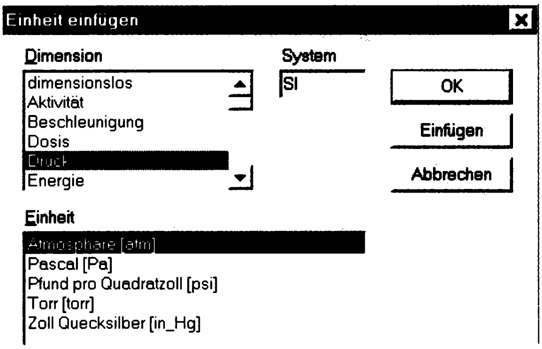


Streudiagramm (Darstellung diskreter Daten)

Wertepaare, etwa (0;1), (1;2), (2;2), (4;4), können als Punkte in einem Diagramm dargestellt werden; dazu werden jeweils zwei Vektoren x und y gebildet. Der Vektor x wird als unabhängige Variable, y als abhängige Variable eingefügt.
Statt Punkte können auch andere Symbole gewählt werden. Ebenfalls könnten an den Werten von x Stäbe mit der Höhe des zugehörigen Wertes von y gezeichnet werden, u.a.m.

Einheiten

Sämtliche Berechnungen können mit Maßeinheiten durchgeführt werden.



Eine Liste aller vordefinierten Einheiten findet man im Einfügen-Menü, Option "Einheit einfügen" (auch [Strg] + [U], U wie unit). Darüber hinaus können Einheiten selbst definiert werden.

Alle vordefinierte Einheiten können aber auch deaktiviert werden: Rechnen-Menü, Option "Rechenoptionen", Registerkarte "Einheitensystem", "Kein" aktivieren.

$\boxed{v := 12 \cdot \frac{km}{\blacksquare}}$

Um einer Konstanten eine Einheit hinzufügen, ist diese einfach mit der betreffenden Einheit zu *multiplizieren*. Das Multiplikationszeichen kann auch weggelassen werden. Die Einheit kann über die Tastatur eingetippt werden. Alternativ kann eine Einheit auch aus dem Einfügen-Menü gewählt werden, wenn man die Option "Einheit... " wählt.

$v := 12 \cdot \frac{km}{h} \quad t := 20 \cdot s \quad s := v \cdot t$

Mit Größen (Zahlen mit Einheiten) kann auch gerechnet werden.

Numerische Auswertung: $s := 66.667m$

$v := 90 \cdot \frac{cm}{min} \qquad v = 0.015ms^{-1}$

$v := 90 \cdot \frac{cm}{min} \qquad v = 0.054\frac{km}{h}$

Es kann sein, dass man als Einheit für v lieber km/h möchte. Dazu klickt man das Ergebnis an, dann den Platzhalter und fügt dort km/h oder km*h^-1 ein. Anschließend klickt man auf eine Stelle außerhalb des Ergebnisses.

$R := 10 \cdot \Omega \quad U := 2 \cdot V \quad I := \frac{U}{R} \quad I = 0.2\,A$

$\boxed{I = 0.2 \cdot A \blacksquare} \qquad I = 200mA$

Möchte man als Einheit "mA" statt "A", so markiert man den Platzhalter des Ergebnisses und schreibt dort mA.

$F := 200 \cdot N \qquad A := 50 \cdot cm$

$M := F \cdot a \qquad M = 100J$

Die Einheit "J" für ein Drehmoment ist unüblich. Man kann sie leicht durch "Nm" ersetzen.

Definition eines Newtonmeters: $Nm := J$

$\boxed{M = 100 \cdot J \blacksquare} \qquad M = 100Nm$

Definition der neuen Einheit Nm; diese steht nun unterhalb und rechts ihrer Definition überall zur Verfügung. Anklicken und Ersetzen des Platzhalters durch die neu definierte Einheit.

$^\circ := Grad \qquad \sin(30^\circ) = 0.5$

Definition der Bezeichnung ° (Tasten [↑] + [^]) für das Gradmaß

$s := 5 \cdot s \qquad t = 333.333m$

⚠ s ist nicht mehr die Einheitenbezeichnung für "Sekunde", wenn vorher s etwa als Weg definiert wurde!

$s := \frac{h}{3600} \quad t := 5 \cdot s \quad 4 \cdot s + t = 9s$

Die Variable s wird wieder neu als Zeiteinheit definiert (etwa über h als Name für die Zeiteinheit Stunde).

Definition einer Millisekunde: $ms := \frac{s}{1000}$

$0.038 \cdot s + 22 \cdot ms = 60ms$

Das Ergebnis wird zuerst in Sekunden angezeigt. Änderung in ms, wenn der Platzhalter im Ergebnis durch ms ersetzt wird.

$W := 5 \cdot kg \cdot 0.4 \cdot \frac{m^2}{s^2} \quad W = 2kgm^2s^{-2}$

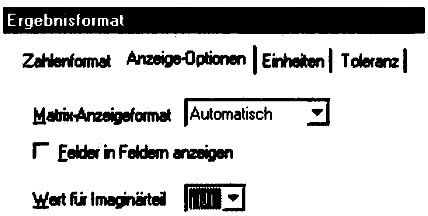
$W := 5 \cdot kg \cdot 0.4 \cdot \frac{m^2}{s^2} \quad W = 2\frac{kgm^2}{s^2}$

Möchte man lieber keine negativen Hochzahlen bei den Einheiten, so doppelklickt man auf das Ergebnis, wählt im Ergebnisformatfenster die Registerkarte "Einheiten" und aktiviert "Einheiten formatieren".

$W := 5 \cdot kg \cdot 0.4 \cdot \frac{m^2}{s^2} \quad W = 2J$

Möchte man aber das Ergebnis in der Form W = 2 J (W ist eine Arbeit), so müsste man in der Registerkarte "Einheiten" die Option "Einheiten wenn möglich vereinfachen" aktivieren.

Komplexe Zahlen



Mathcad verwendet voreingestellt i als Bezeichnung für die imaginäre Einheit. Man jedoch auf die Bezeichnung j umstellen: Format-Menü, die Option "Ergebnis..." wählen, danach die Registerkarte "Anzeige-Optionen":

$3 + 4j$

Die imaginäre Einheit j wird unmittelbar hinter den Imaginärteil 4 gesetzt; kein Multiplikationszeichen!

$\boxed{3 + 1j} \qquad 3 + j$

j allein darf nicht geschrieben werden, da es von Mathcad sonst als Variable gehalten wird.

$z_1 := 15 - 5j \quad z_2 := 3 + 4j$

$z_1 \cdot z_2 = 65 + 45j \quad \frac{z_1}{z_2} = 1 - 3j$

$\frac{1}{z_1} = 0.06 + 0.02j$

Eine Indizierung der Variablen z erreicht man, wenn man unmittelbar nach der Eingabe von z einen Punkt und dann den Index eintippt. Danach folgt der Doppelpunkt usw.

Davon zu unterscheiden ist die Indizierung der Elemente eines Vektors oder einer Matrix!

$z := 3 - 4j$

$Re(z) = 3 \quad Im(3 - 4j) = -4$

Real- und Imaginärteil

$z := -3 - 2j$

$|z| = 3.606$

Der Betrag einer komplexen Zahl wird mit Hilfe des Symbols der Taschenrechner-Palette gebildet. Man kann dieses Symbol zuerst aufrufen und den komplexen Term eingeben oder dies nachträglich nach Eintippen des Terms (nach seiner vollständigen Markierung mit der Bearbeitungslinie) tun.

$z := -3 - 2j$ $\quad ° := \text{Grad}$

$\boxed{\arg(z) = -2.554}$

$\arg(z) = -146.31°$

Bestimmung des Winkels eines komplexen Terms. Dieser wird im Bogenmaß angegeben, wenn man nicht nach Markierung des Platzhaltersymbols ° schreibt. Dies setzt allerdings voraus, dass man vorher das Zeichen ° als Einheit definiert hat.

$\left|\frac{3 - 2j}{1 - j}\right| = 2.55$

Betrag eines Terms

$z := 5 \cdot \exp(j \cdot 60°)$

Exponentialform einer komplexen Zahl; bei der Eingabe achten, dass j in der Form 1j geschrieben werden muss. Ferner ist bei einem Winkel im Gradmaß dieser mit der Bezeichnung Grad zu multiplizieren.

$z := 5 \cdot \exp(j \cdot 60°)$

$\mathrm{Re}(z) + j \cdot \mathrm{Im}(z) = 2.5 + 4.33j$

Umwandlung von der Exponentialform in die Komponentenform.

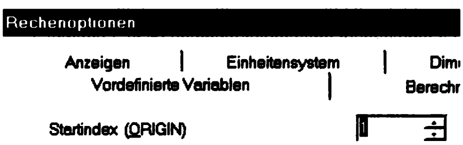
Oder

$z \text{ komplex} \rightarrow 5 \cdot \cos(60 \cdot \text{Grad}) + 5 \cdot i \cdot \sin(60 \cdot \text{Grad}) = 2.5 + 4.33j$

Mit dem Schlüsselwort "komplex" werden komplexwertige Ergebnisse in der Komponentenform ausgegeben.

Vektoren

Zur Indizierung der Koordinaten a_x, a_y und a_z eines Vektors verwendet Mathcad (natürliche) Zahlen. Vektoren selbst bezeichnen wir im Folgenden mit lateinischen Kleinbuchstaben, also etwa a, b, ... statt $\vec{a}$, $\vec{b}$, usw. Die Indizierung der Koordinaten beginnt in Mathcad standardmäßig mit 0. Dies kann jedoch geändert werden (wird im Folgenden vorausgesetzt).



Dazu wird im Rechnen-Menü Optionen gewählt und dort in der Registerkarte "Vordefinierte Variablen" der Startindex auf 1 gesetzt. Beispielsweise werden nun die Koordinaten a_x, a_y und a_z mit a_1, a_2 und a_3 bezeichnet.

Vektoren können als Matrizen mit nur einer Spalte aufgefasst werden.

$a_1 := 2 \qquad a_2 := 5$

$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Definition eines Vektors: Die Indizierung wird mit [eingeleitet. Es folgt der Index; danach der Doppelpunkt. Aufruf des Vektors durch das numerische (oder auch symbolische) Gleichheitszeichen.

$\boxed{b := \begin{pmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{pmatrix}}$

$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Alternative Definition eines Vektors als Matrix mit einer Spalte: Zuerst Vektornamen eintippen, danach folgt der Doppelpunkt.

auf der Rechenpalette anklicken, wodurch die Matrixpalette angezeigt wird, dort durch Anklicken von (oder Strg + M drücken) die Dialogbox zur Matrixeingabe öffnen, Zeilenanzahl eingeben, Spaltenanzahl gleich 1 setzen, dann "Einfügen" anklicken. Schließlich die Platzhalter mit den Vektorkoordinaten füllen, Dialogbox schließen.

$b_1 = 3 \qquad b_3 = 7$

Abrufen einer Vektorkoordinate durch Eingabe des Vektornamens, des [-Zeichens gefolgt vom Index und des numerischen Gleichheitszeichens =.

$P_l \qquad R_{\text{Messgerät}} \qquad u_{\text{prüf}}$

Zwischen einem echten Index zur Indizierung der Vektorkoordinaten und einem so genannten "Literalindex" ist sorgfältig zu unterscheiden. Letzterer ist nur ein tiefgestellter Text.

$$a := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a + 5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot a + c = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Einfache Rechenoperationen mit Vektoren. Mathcad lässt auch die Addition eines Vektors mit einer Zahl zu.

$$a \cdot c = 13$$

Skalarprodukt (Malzeichen *) oder auf der Matrixpalette $\vec{x}\cdot\vec{y}$ anklicken

$$d := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b \times d = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt: Symbol $\vec{x}\times\vec{y}$ aus der Matrixpalette entnehmen, für die beiden Platzhalter die Vektornamen einsetzen.

Lösen von Gleichungen/Gleichungssystemen

Gleichungen und Gleichungssysteme können in Mathcad auch *symbolisch* gelöst werden. Ist dies nicht möglich (vor allem deswegen, weil keine symbolische Lösungsverfahren bekannt sind), so versucht man es mit einem *numerischen* Lösungsverfahren. Letzteres ist in vielen praktischen Aufgabenstellungen der Fall.

Bei Gleichungen ist ein eigenes Gleichheitszeichen, das *"fette" Gleichungszeichen* zu nehmen. Man erhält es durch [Strg] + [+] oder entnimmt es aus der Booleschen Palette.

Lineare Gleichungen:

$$a = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{2}(1 - b \cdot x) \text{ auflösen}, x \rightarrow 2 \cdot \frac{(2 \cdot a + 1)}{(3 + 2 \cdot b)}$$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h) \text{ auflösen}, h \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(O - 2 \cdot \pi \cdot r^2)}{\pi \cdot r}$$

Nach Schreiben der Gleichung klickt man auf das Schlüsselwort "auflösen" der Symbolik-Palette und trägt in den Platzhalter die Gleichungsvariable (Unbekannte) ein.

Man kann auch zuerst das Schlüsselwort "auflösen" anklicken und anschließend in den linken Platzhalter die zu lösende Gleichung und in den rechten Platzhalter die Gleichungsvariable ein.

Quadratische Gleichungen oder Polynomgleichungen:

Die Lösung einer Polynomgleichung erfolgt in der Menge der komplexen Zahlen. Die Lösungen werden in einem Vektor zusammengefasst.

$$t^2 - 4 \cdot t + 3 = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v := 6m = 13 + m^2 \text{ auflösen}, m \rightarrow \begin{pmatrix} 3 + 2 \cdot i \\ 3 - 2 \cdot i \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 + 2i \\ 3 - 2i \end{pmatrix} \qquad v_0 = 3 + 2i \qquad v_1 = 3 - 2i$$

Man kann der Gleichung eine Variable (nicht notwendig die Gleichungsvariable) zuweisen. Dies hat den Vorteil, dass danach der Lösungsvektor bzw. eine einzelne Lösung für eine Weiterrechnung zur Verfügung steht.

$$y^3 - 5y^2 + 6y - 2 = 0 \text{ auflösen}, y \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 + 2^{\frac{1}{2}} \\ 2 - 2^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.414 \\ 0.586 \end{pmatrix}$$

Ein Mausklick auf den Rechenbereich (nach der symbolischen Berechnung), dann die Eingabe des numerischen Gleichheitszeichens und schließlich wieder ein Mausklick außerhalb des Rechenbereichs ergeben den Lösungsvektor in der Kommazahldarstellung.

$$3\ln\left(\frac{2}{x}\right) = a \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{2}{\exp\left(\frac{1}{3}\cdot a\right)}$$

$$4 \cdot e^{-2\cdot t} = \frac{1}{2} \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{1}{2}\cdot \ln(8) = 1.04$$

Eine einfache logarithmische Gleichung bzw. Exponentialgleichung, beide symbolisch lösbar.

$$\cos(x) - x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow .73908513321516064166$$

$$\cos(x) - x = 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{gleit}, 4 \end{array} \right. \rightarrow .7391$$

Es gibt kein symbolisches Lösungsverfahren; Mathcad löst numerisch.

Nach dem Schlüsselwort "auflösen" und der zugehörigen Gleichungsvariable kann zusätzlich das Schlüsselwort "gleit" aus der Symbolik-Palette eingegeben werden. Der Platzhalter steht für die Anzahl der geltenden Ziffern der Lösung.

$$\sin(2\cdot x) = \frac{1}{2} \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{1}{12}\cdot \pi$$

Mathcad findet eine symbolische Lösung.

Dagegen:

$$\sin(2\cdot x) = 0.5 \text{ auflösen}, x \rightarrow .26179938779914943654$$

Das Auftreten einer Kommazahl in der Gleichung bewirkt eine numerische Lösung!

Lineares Gleichungssystem:

Vorgabe

$4\cdot a + 3\cdot b + c = 1.8$

$a - b + 0.4\cdot c = 2.5$

$0.9\cdot a + 3\cdot b + c = 4.5$

$$x := \text{Suchen}(a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} -.87096774193548387097 \\ -.57155425219941348974 \\ 6.99853372434017595 31 \end{pmatrix}$$

Zuerst wird das Wort "Vorgabe" geschrieben. Zu beachten ist, dass man beim Schreiben in einem Rechenbereich bleibt und nicht durch Schreiben eines Leerzeichens in einen Textbereich kommt!

Danach kommt das lineare Gleichungssystem und schließlich das Wort "Suchen", wobei in Klammern die Gleichungsvariablen, getrennt durch einen Beistrich, stehen müssen (wieder auf Rechenbereich achten!)

$$x = \begin{pmatrix} -.871 \\ -.572 \\ 6.999 \end{pmatrix} \qquad x_2 = -0.572$$

Als Gleichungsvariable könnten statt a, b und c auch x_1, x_2 und x_3 verwendet werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Indizes hier nur tiefgestellte Zeichen sind. x_1, x_2 und x_3 dürfen in diesem Fall nicht mit den Koordinaten des Lösungsvektors x verwechselt werden!

$$\boxed{\sqrt{x+4} = 5 - \sqrt{x-3} \text{ auflösen}, x \rightarrow}$$

Kein symbolisches Ergebnis gefunden.

Mathcad findet keine symbolische Lösung. In solch einem Fall versucht man eine numerische Lösung. *Dazu ist die Gleichung so umzuformen, dass auf ihrer rechten Seite nur mehr null steht.*

Startwert: $x := 5$

$$\text{wurzel}\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{x+4} - 5, x\right) = 6.24$$

$u := 1$

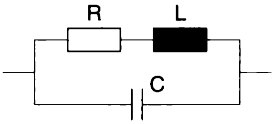
$$\text{wurzel}\left(e^{-u^2} + 1 - \sqrt{u}, u\right) = 1.349$$

Nötig ist die Angabe eines **Startwertes**, das der Ausgangspunkt für das numerische Lösungsverfahren ist.

Die verwendete Numerikfunktion heißt wurzel(f(x),x), wobei f(x) = 0 die zu lösende Gleichung ist; x bezeichnet die Gleichungsvariable. Nach Eintippen dieser Funktion schließt man mit dem numerischen Gleichheitszeichen ab.

Im Folgenden soll ein Anwendungsbeispiel für die Verwendung von Mathcad gegeben werden.

Ortskurven des Widerstandes und Leitwertes einer Wechselstromschaltung



$R := 25 \cdot \Omega$ $\quad L := 0.15 \cdot H$ $\quad C := 50 \cdot \mu F$

$f := 0 \cdot Hz..\ 200 \cdot Hz$

Die Kreisfrequenz ω wird als Funktion der Frequenz definiert: $\omega(f) := 2 \cdot \pi \cdot f$

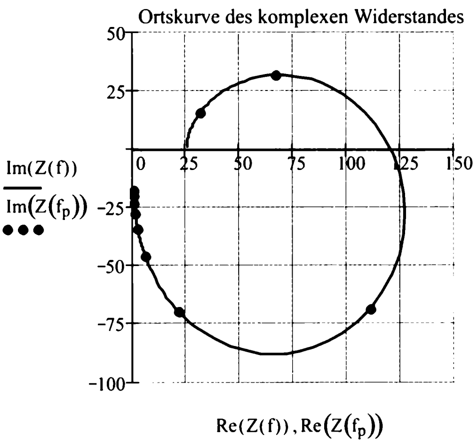
Um einzelne Punkte der Ortskurven hervorzuheben, soll eine Frequenz f_p mit einer Schrittweite von 20 Hz definiert werden: $f_p := 0 \cdot Hz, 20 \cdot Hz..\ 200 \cdot Hz$

Mit $Z_1(f) := R + j \cdot \omega(f) \cdot L$ und $Z_2(f) := \frac{1}{j \cdot \omega(f) \cdot C}$

sind der komplette Widerstand und Leitwert der Parallelschaltung:

$Z(f) := \frac{Z_1(f) \cdot Z_2(f)}{Z_1(f) + Z_2(f)}$ bzw. $Y(f) := \frac{1}{Z(f)}$

Die Ortskurve von Z(f) bzw. Y(f) gibt einen Überblick über das Frequenzverhalten; es handelt sich um eine Kurve in Parameterdarstellung in der komplexen Ebene mit der Frequenz f als Parameter.

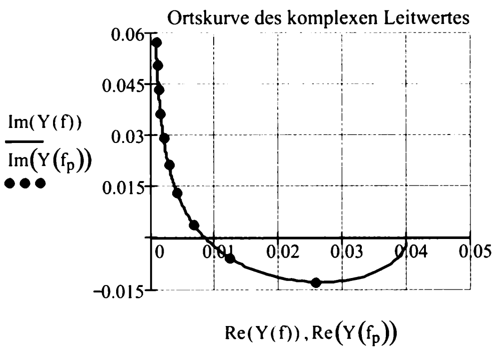


Koordinaten ablesen:

Mit rechter Maustaste auf das Diagramm klicken, “Koordinaten ablesen” wählen, “Nur Datenpunkte” aktivieren, Kurvenpunkt anklicken, Fadenkreuz mit Cursortaste rechts/links bewegen, Wechsel zwischen den beiden Graphen durch Cursortaste nach oben/unten. Für etwa f = 40 Hz liest man:

$Re(Z) = 66.552\ \Omega$

$Im(Z) = 31.907\ \Omega$



1.2 Excel-Anwendungen

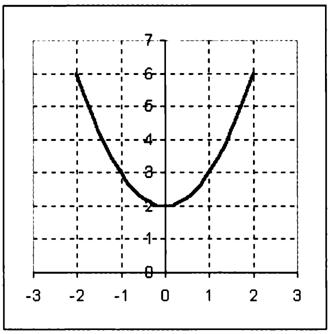
Tabellenkalkulationsprogramme haben sich als Universalwerkzeuge erwiesen, die auf Grund ihrer Benutzerfreundlichkeit und leichten Erlernbarkeit vielfach in Wirtschaft, Technik und Naturwissenschaft eingesetzt werden. Im Folgenden werden beispielhaft einige Anwendungen in EXCEL gezeigt.

1. Erstellen eines Funktionsgraphen

Die Funktion $y = x^2 + c$ ist für $c = 2$ im Intervall [−2, 2] graphisch darzustellen.

B4 | =A4^2+$E$1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Graph von $y = x^2+c$ mit			c =	2		
2							
3	x	y					
4	-2,00	6,00					
5	-1,80	5,24					
6	-1,60	4,56					
7	-1,40	3,96					
8	-1,20	3,44					
9	-1,00	3,00					
10	-0,80	2,64					
11	-0,60	2,36					
12	-0,40	2,16					
13	-0,20	2,04					
14	0,00	2,00					
15	0,20	2,04					
16	0,40	2,16					
17	0,60	2,36					
18	0,80	2,64					
19	1,00	3,00					
20	1,20	3,44					
21	1,40	3,96					
22	1,60	4,56					
23	1,80	5,24					
24	2,00	6,00					



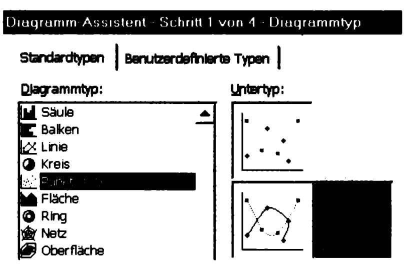
Vorgangsweise:

1. Wir beginnen mit dem Aufstellen einer Wertetabelle für die Funktion. Dazu schreibt man etwa in die Zelle A4 den Wert −2 und in die Zelle A5 den Wert −1,8 (Schrittweite 0,2). Dann markiert man beide Zellen mit der Maus und stellt den Cursor auf die rechte untere Ecke der Markierung. Schließlich zieht man die Markierung bei gedrückter linker Maustaste nach unten.

2. In die Zelle B4 schreibt man den Funktionsterm:
   = A4^2+$E$1, danach ENTER.
   Dann klickt man die Zelle B4 an und kopiert die dort enthaltene Formel nach unten, indem man wiederum bei gedrückter linker Maustaste die rechte untere Ecke der Zelle B4 nach unten zieht.

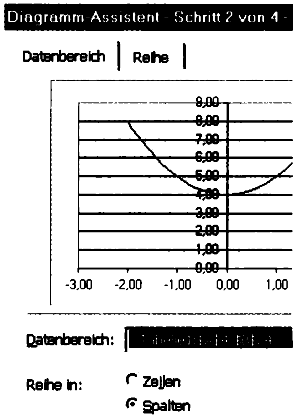
3. Für die graphische Darstellung markiert man den Zellbereich A4:B24 mit der Maus. Dann ruft man den so genannten *Diagramm-Assistenten* durch Anklicken des -Symbols in der Symbolleiste auf.

4. Im ersten Schritt wählen wir den Diagrammtyp *Punkt(XY)* und den Untertyp *Punkte mit interpolierten Linien ohne Datenpunkte*.

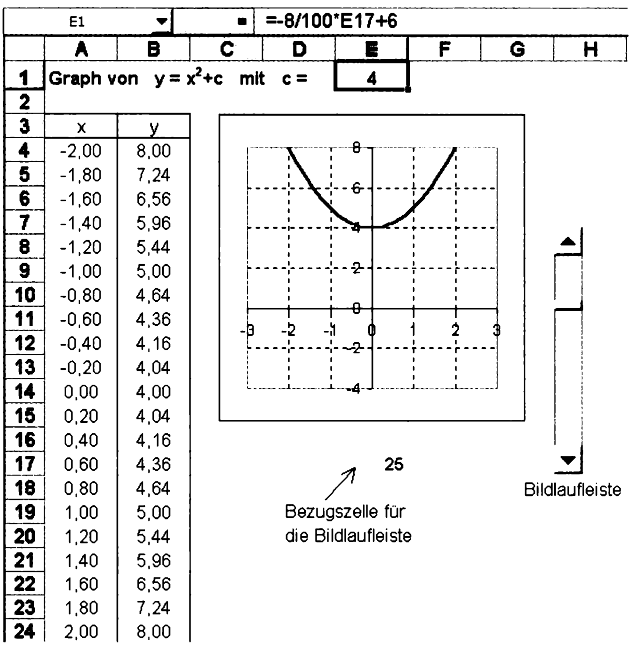


5. Im zweiten Schritt braucht hier nichts mehr unternommen werden. Im dritten Schritt können gewisse Beschriftungen vorgenommen werden. Im vierten Schritt könnte sofort *Fertigstellen* angeklickt werden, wodurch man eine Rohform des Funktionsgraphen erhält.

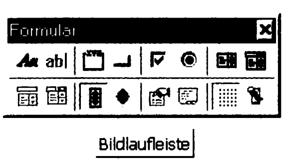
6. Nach Anklicken des Diagramms mit der linken Maustaste wird ein Rahmen sichtbar. Durch Ziehen an seinen Marken kann die Diagrammgröße verändert werden. Weitere Änderungen können mit der rechten Maustaste vorgenommen werden: Je nach dem, welchen Bereich des Diagramms man anklickt (die Diagrammfläche, die Zeichnungsfläche, die Kurvenlinie, eine Koordinatenachse, eine Gitternetzlinie), erhält man ein Kontextmenü zur weiteren Gestaltung des Diagramms nach eigenen Vorstellungen.



Ändert man nun den Wert für c in der Zelle E1, so ändert sich der Funktionsgraph entsprechend mit. Solche Änderungen können vorteilhaft mit Hilfe einer **Bildlaufleiste** (auch Schieberegler genannt) durchgeführt werden. Eine solche soll nun für Änderungen von c etwa zwischen –2 und 6 eingerichtet werden.

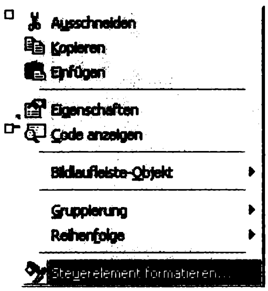


	x	y
4	-2,00	8,00
5	-1,80	7,24
6	-1,60	6,56
7	-1,40	5,96
8	-1,20	5,44
9	-1,00	5,00
10	-0,80	4,64
11	-0,60	4,36
12	-0,40	4,16
13	-0,20	4,04
14	0,00	4,00
15	0,20	4,04
16	0,40	4,16
17	0,60	4,36
18	0,80	4,64
19	1,00	5,00
20	1,20	5,44
21	1,40	5,96
22	1,60	6,56
23	1,80	7,24
24	2,00	8,00

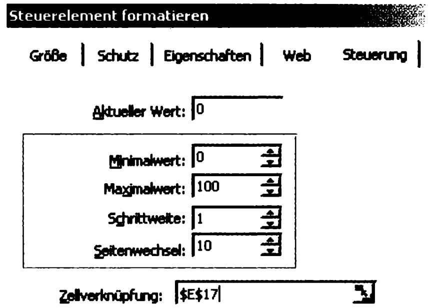


Wir wählen im Menü *Ansicht* die Option *Symbolleiste* und dann *Formular*. Man erhält die *Formular* - Symbolleiste, die in unterschiedlicher Form angezeigt werden kann.

Klickt man nun das Symbol Bildlaufleiste an, so verändert sich der Cursor in die Form eines aus dünnen Linien gebildeten Kreuzes. Dieses positioniert man an die gewünschte Stelle der Bildlaufleiste und zieht eine Bildlaufleiste mit gedrückter Maustaste waagrecht oder senkrecht auf. Wir tun letzteres.



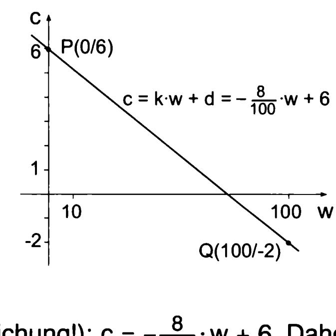
Klickt man nun mit der rechten Maustaste auf die Bildlaufleiste, so öffnet sich ein Kontextmenü. Dort wählt man *Steuerelement formatieren...* .



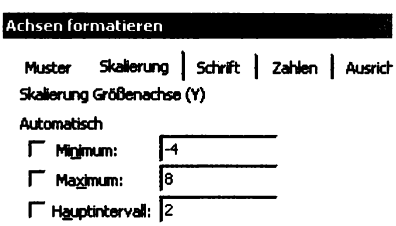
Man findet voreingestellt Werte für den Minimalwert, den Maximalwert sowie die Schrittweite. Diese können übernommen werden. Die Stellung der Bildlaufleiste ist nun durch einen Wert w (= Aktueller Wert) zwischen 0 und 100 gegeben, veränderbar in Schritten von 1. Der jeweils aktuelle Wert kann in einer "Bezugszelle" ausgegeben und nutzbar gemacht werden. Als diese Bezugszelle vereinbaren wir etwa E17. Bestätigt man mit OK, so wird der aktuelle Wert w der Bildlaufleiste in Zelle E17 angezeigt (eventuell erst nach Betätigen der Leiste). Dieser Wert kann durch Anklicken der Marken ◀ und ▶ der Bildlaufleiste mit der Maus (der Cursor nimmt die Form einer Hand an) verändert werden. Eine andere Möglichkeit ist, dass man den "Griff" der Bildlaufleiste mit dem Handcursor verschiebt.

Wir stellen zuerst fest, dass bei einer Stellung der Bildlaufleiste "ganz unten" ihr Wert w gleich 100 ist. Ziel ist nun, den Wert von c als lineare Funktion des Wertes w in der Bezugszelle E17 zu bilden. Dazu sollen folgende Forderungen vorgegeben werden, die wir in Form einer Wertetabelle schreiben:

c	w
-2	100
6	0



Die gesuchte Beziehung lautet (Geradengleichung!): $c = -\frac{8}{100} \cdot w + 6$. Daher schreibt man in die Zelle E4 für c: = 8/100*E17+6. Die Bildlaufleiste kann nun im gewünschten Sinn eingesetzt werden. Man kann übrigens die Bezugszelle verstecken, indem man das Diagramm darüber legt.



Es empfiehlt sich, die automatische Skalierung der y-Achse zu deaktivieren. Dazu klickt man mit der rechten Maustaste die y-Achse im Diagramm an. Im Kontextmenü wählt man *Achse formatieren*. In der Registerkarte *Skalierung* setzt man den Kleinstwert etwa auf −4 und den Höchstwert auf 8. Damit bleibt die Skalierung der y-Achse bei einer Veränderung von c bestehen.

2. Graphische Darstellung der allgemeinen Sinusfunktion $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Nach Erstellen einer Wertetabelle von $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ für t zwischen $-\pi$ und π mit einem Wert für A in Zelle D10, für ω in Zelle E10 und für φ in Zelle F10 wird die Funktion gezeichnet. Die Parameter A, ω und φ sollen durch eine Bildlaufleiste (einen Schieberegler) geändert werden können. Für die Parameteränderungen sollen folgende Vorgaben eingehalten werden:

	Wertebereich	Schrittweite
A	0 bis 5	0,5
ω	0 bis 10	0,5
φ	$-\pi$ bis π	$\pi/4$

Für alle drei Bildlaufleisten soll der Minimalwert 0 sein. D11, E11 und F11 seien die Bezugszellen für die Werte von A, ω bzw. φ. Damit könnten sich zwischen den Bezugszellen und den ihnen entsprechenden Parameterzellen E10, F10 und G10 die folgenden Folgerungen für die Bildlaufleisten ergeben:

	Maximalwert	Schrittweite	Parameterzelle
A	100	10	=5–5/100*D11
ω	100	5	=10–10/100*E11
φ	80	10	=PI()–2*PI()/80*F11

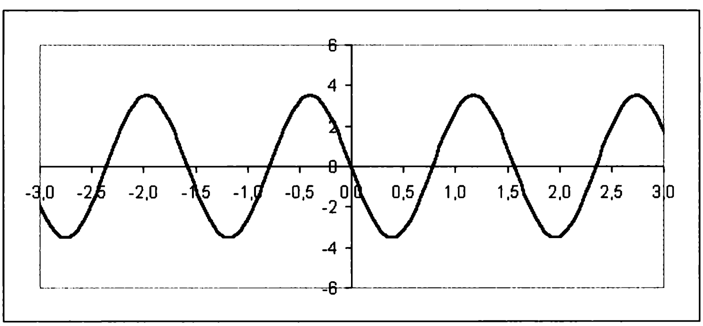
Die Parameterzellen D10, E10 und F10 werden nun entsprechend umgeschrieben.

B4 =$D$10*SIN($E$10*A4+$F$10)

Graph von y = A.sin(ω.t+φ)

	A	B
3	t	y
4	-3,14	0,00
5	-3,08	-0,87
6	-3,02	-1,69
7	-2,95	-2,40
8	-2,89	-2,96
9	-2,83	-3,33
10	-2,76	-3,49
11	-2,70	-3,44
12	-2,64	-3,17
13	-2,58	-2,70
14	-2,51	-2,06
15	-2,45	-1,29
16	-2,39	-0,44
17	-2,32	0,44
18	-2,26	1,29
19	-2,20	2,06
20	-2,14	2,70
21	-2,07	3,17
22	-2,01	3,44
23	-1,95	3,49
24	-1,88	3,33

	D	E	F	
9	A	ω	φ	
10	3,5	4	-3,1416	← Parameterzellen
11	30	60	80	← Bezugszellen

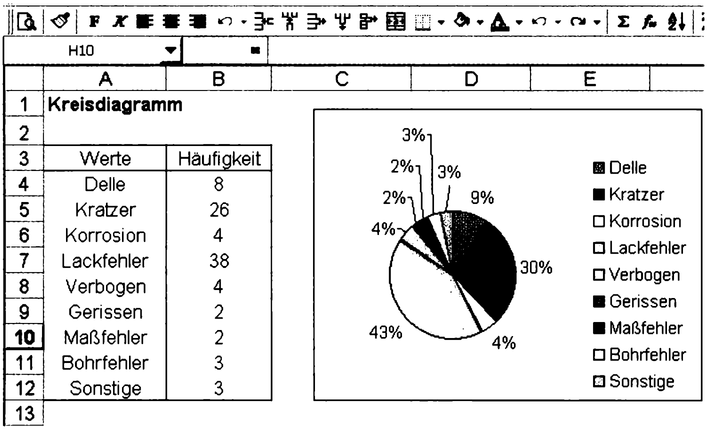


Das Diagramm kann über die Bezugszellen für die Bildlaufleisten gelegt werden, so dass die Bezugszellen unsichtbar sind.

3. Beschreibende Statistik

Graphische Darstellung einer Stichprobe eines qualitativen Merkmals

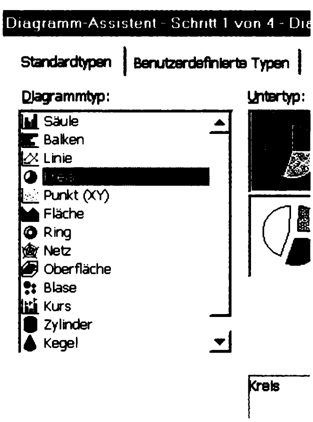
Beispiel 10.3, Seite 275

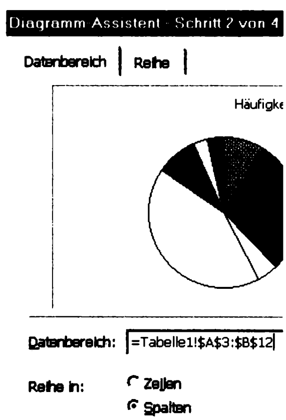


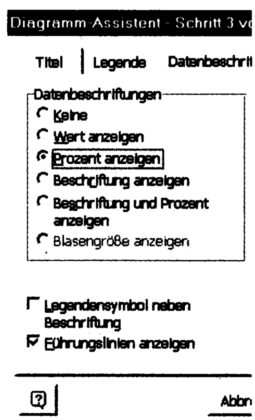
Werte	Häufigkeit
Delle	8
Kratzer	26
Korrosion	4
Lackfehler	38
Verbogen	4
Gerissen	2
Maßfehler	2
Bohrfehler	3
Sonstige	3

Mögliche Vorgangsweise:

1. Aufruf des Diagrammassistenten durch Anklicken des -Symbols in der Symbolleiste.
2. Wahl des Diagrammtyps "Kreis" und Untertyps "Kreis" (letzterer ist voreingestellt). Wählt man hier "Säule" und als Untertyp etwa "Säulen (gruppiert)", so erhält man ein Säulendiagramm. Hat man vorher die Häufigkeiten absteigend sortiert (Menü Daten, Option Sortieren...), so ergibt sich ein **Paretodiagramm**. Klickt man danach auf eine Säule und drückt dann die rechte Maustauste, so kann man im Menüpunkt "Datenreihe formatieren" die Registerkarte "Optionen" wählen und dort "Abstand" auf null setzen.
3. Im zweiten Schritt Eingabe des Datenbereichs durch Markieren mit der Maus.
4. Im dritten Schritt können Titel, Legende und die Datenbeschriftung festgelegt werden.
5. Im letzten Schritt "Ende" anklicken (Diagramm in der aktuellen Tabelle).







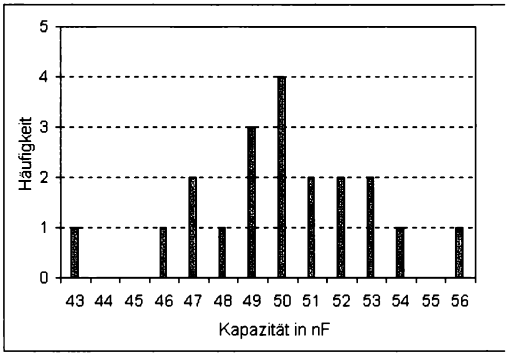
Im Allgemeinen wird die Form des Diagramms noch nicht wunschgemäß sein. Nach Anklicken des Diagramms mit der linken Maustaste wird ein Rahmen sichtbar. Durch Ziehen an seinen Marken kann die Diagrammgröße verändert werden. Weiters werden je nachdem, wohin man im Diagramm mit der rechten Maustaste klickt, Kontextmenüs aufgerufen, mit den verschiedene Änderungen (etwa Formatierungen an den Beschriftungen) vorgenommen werden.

Kennwerte und graphische Darstellung einer ***kleinen*** *Stichprobe eines quantitativen Merkmals*

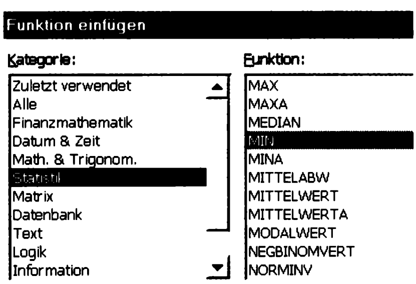
Beispiel 10.1, Seite 273

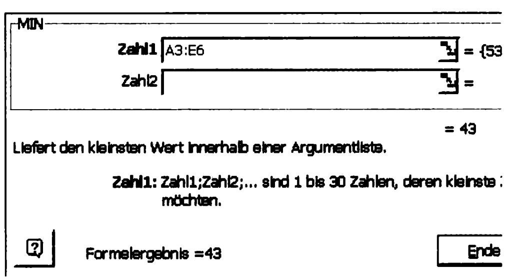
B10 =MIN(A3:E6)

	A	B	C	D	E
1	**Kleine Stichprobe**				
2	Daten:				
3	53	47	52	49	50
4	50	47	43	48	50
5	51	53	54	56	52
6	46	49	51	50	49
7					
8				Mögliche Werte	Häufigkeit
9					
10	x_{min} =	43		43	1
11	x_{max} =	56		44	0
12	xquer =	50		45	0
13	Median =	50		46	1
14	s=	2,99		47	2
15				48	1
16				49	3
17				50	4
18				51	2
19				52	2
20				53	2
21				54	1
22				55	0
23				56	1



Wir geben die Daten etwa in den Bereich A3:E6 ein.
Ermittlung von *Stichprobenwerten:* Zum Bestimmen des Minimums x_{min} der Stichprobenwerte markieren wir zuerst eine Zeile, etwa B10. Durch Anklicken des Symbols *f* in der Symbolleiste wird der so genannte *Funktions-Assistent* aktiviert. Es öffnet sich ein Fenster zum Einfügen einer Funktion (siehe unten). Wir wählen nun im linken Teilfenster als Kategorie *Statistik*, klicken in das rechte Teilfenster, tippen m (um zu den Titeln mit dem Anfangsbuchstaben M) zu kommen und wählen danach "MIN" und bestätigen schließlich mit OK. Es öffnet sich ein Fenster zum Ausfüllen. In das Feld für "Zahl1" wird der Datenbereich A3:E6 eingegeben (am Besten durch Markieren mit der Maus). Anklicken von *Ende* liefert das Minimum in der Zelle B10.





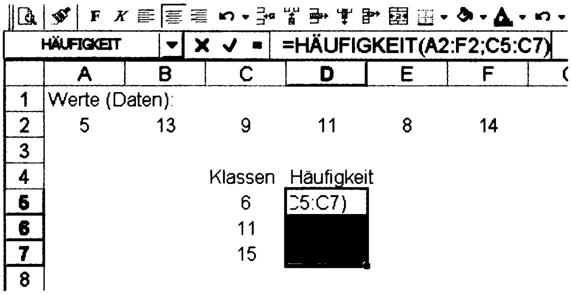
In ähnlicher Weise werden nacheinander das Maximum x_{max}, der Mittelwert $\bar{x}$, der Median $\tilde{x}$ und die Standardabweichung s der Stichprobenwerte in weitere Zellen eingefügt. Die zugehörigen Funktionsnamen zum Einfügen analog wie MIN lauten: MAX, MITTELWERT, MEDIAN und STABW.

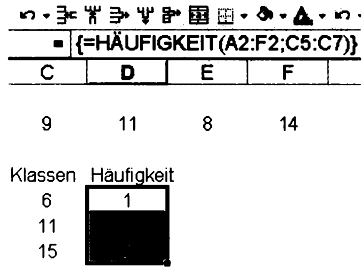
Mit EXCEL kann nun schnell eine Häufigkeitstabelle der Stichprobenwerte erzeugt werden. Dazu verwenden wir die leistungsstarke EXCEL-Funktion HÄUFIGKEIT(Daten; Klassen), welche die Häufigkeitsverteilung von Daten bei gegebenen Klassen als einspaltige Matrix (Spaltenvektor) liefert. Dies soll zuerst an Hand einer einfachen Aufgabe erläutert werden.

Folgende Werte (Daten) mögen vorliegen: 5, 8, 9, 11, 13 und 14. Sie sind in der Abbildung durch farbige Punkte dargestellt. Weiters sollen durch die Zahlen 3, 6, 11 und 15 auf der Zahlengerade drei "Klassen" gebildet werden.

Es soll nun bestimmt werden, wie viele der Werte in jeder dieser drei Klassen liegen. Dazu ist eine Entscheidung zu fällen, wie ein Wert gezählt wird, der auf eine Klassengrenze fällt. Wir vereinbaren, dass ein solcher Wert stets in die links liegende Klasse aufgenommen wird. So liegt etwa der Wert 11 in der 2.Klasse.

Zur Angabe der einzelnen Klassen genügt es, ihre oberen Klassengrenzen 6, 11 und 15 mitzuteilen. In die 1. Klasse fallen alle Werte, die höchstens gleich 6 sind.





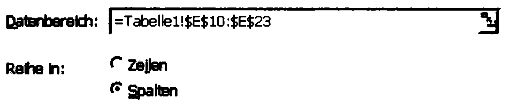
Vorgangsweise:

1. Nach Eingabe der Werte (Daten) werden die drei oberen Klassengrenzen untereinander in eine Spalte, etwa in A2:F2 geschrieben.
2. Nun markiert man drei untereinander liegende Zellen einer Spalte, etwa D5:D7, und klickt dann in die Eingabezeile. Dort schreibt man =HÄUFIGKEIT(A2:F2; C5:C7), d.h. man gibt in runden Klammern zuerst den Datenbereich und nach einem Strichpunkt den Bereich mit den oberen Klassengrenzen ein. Die Eingabe der beiden Bereiche kann durch Markieren der entsprechenden Zellen mit der Maus erfolgen. Die Funktion HÄUFIGKEIT() kann auch mit Hilfe des Funktionsassistenten eingegeben werden.
3. Wichtig ist nun der Abschluss durch $\boxed{\text{Strg}}$ + $\boxed{\uparrow}$ + $\boxed{\text{ENTER}}$ (d.h. bei gedrückter Strg- und Hochstellen-Taste die Enter-Taste drücken). Dadurch werden die Häufigkeiten in die zuvor markierten Zellen D5 bis D7 ausgegeben. Die Formel in der Eingabezeile hat als Zeichen für eine Matrixformel geschwungene Klammern.

Beispiel 10.1 kann nun weiter gelöst werden. Zuerst schreiben wir alle *möglicherweise* zwischen x_{min} und x_{max} auftretenden Stichprobenwerte in eine Spalte, etwa in D10:D23. Diese Werte werden nun als "Klassen" (eigentlich obere Klassengrenzen) in der Funktion HÄUFIGKEIT() eingegeben. Diese Funktion ermittelt nun beispielsweise alle Stichprobenwerte (Daten), die in der Klasse]46, 47] liegen, d.h. größer als 46 und höchstens gleich 47 sind. In dieser Klasse liegen zwei Stichprobenwerte, beide sind gleich 47. Wir erhalten auf diese Weise gerade die Häufigkeit des Wertes 47 in der Stichprobe. Entsprechendes gilt für die weiteren Klassen.

Das Zeichnen des Diagramms wird durch Anklicken des -Symbols in der Symbolleiste eingeleitet.

Im ersten Schritt wählt man als Diagrammtyp "Säule" und als Untertyp wie voreingestellt "Säule (gruppiert)".



Danach gibt man im zweiten Schritt die Häufigkeiten als Datenbereich an. Nun wechselt man (noch im zweiten Schritt) von der Registerkarte "Datenbereich" auf die Registerkarte "Reihe" zur Beschriftung der Rubrikenachse (= x-Achse) mit den Werten zwischen x_{min} und x_{max}:

Schließlich können im 3. Schritt noch diverse Beschriftungen des Diagramms durchgeführt werden. Im 4.Schritt braucht nur noch "Ende" angeklickt werden. Nach Wunsch können noch die Diagrammgröße verändert sowie weitere Formatierungen durch entsprechendes Anklikken mit der rechten Maustaste vorgenommen werden.

*Kennwerte und graphische Darstellung einer **großen** Stichprobe eines quantitativen Merkmals*

Beispiel 10.4, Seite 276

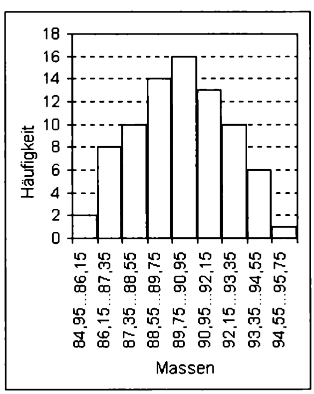
Die Vorgangsweise ist wie jene im vorigen Beispiel 10.1, Seite 273 (Kleine Stichprobe). Als Beschriftung der Rubrikenachse (= x-Achse) kann man die eigens dafür geschriebenen Texte 84,95...86,15 usw. wählen:

Diagrammassistent – 2.Schritt, Registerkarte "Reihe".

Um den Abstand der Säulen auf Null zu setzen, klickt man mit der rechten Maustaste eine Säule an, wählt "Datenreihe formatieren", dann die Registerkarte "Optionen" und setzt dort den Abstand gleich null.

J14 = {=HÄUFIGKEIT(A3:J10;F14:G22)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Große Stichprobe**									
2	Daten:									
3	93,0	88,2	92,1	91,0	86,9	93,8	91,0	92,0	87,4	92,1
4	92,7	93,3	88,8	91,5	90,4	88,1	89,7	88,9	92,7	91,4
5	89,6	89,4	87,3	86,5	90,8	90,3	86,9	91,2	89,3	90,4
6	94,2	90,4	90,8	91,9	90,8	92,4	88,3	92,0	87,3	93,8
7	90,6	88,0	94,0	90,9	88,0	93,1	91,7	89,7	92,7	89,5
8	90,7	89,3	89,3	86,5	88,9	87,5	88,2	88,7	90,2	86,3
9	93,9	86,4	90,6	87,9	85,0	89,1	91,8	92,3	87,9	95,4
10	89,7	90,9	90,4	91,2	85,5	90,7	93,6	89,9	92,9	92,2
11										
12						Obere Klassengrenzen		Beschriftung		Häufigkeit
13										
14	x_{min} =		85			86,15		84,95...86,15		2
15	x_{max} =		95,4			87,35		86,15...87,35		[illegible]
16	Klassenbreite =		1,2			88,55		87,35...88,55		[illegible]
17	Beginn der Klassen =		84,95			89,75		88,55...89,75		[illegible]
18	Mittel =		90,25			90,95		89,75...90,95		[illegible]
19	Median =		90,4			92,15		90,95...92,15		[illegible]
20	s =		2,29			93,35		92,15...93,35		[illegible]
21						94,55		93,35...94,55		[illegible]
22						95,75		94,55...95,75		[illegible]
23										

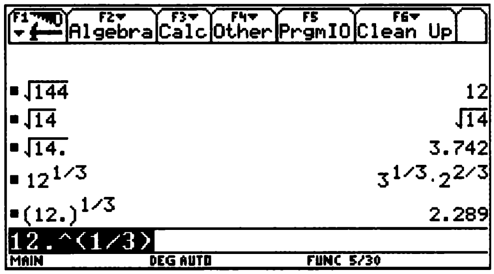


12.3 Grundlagen des CAS-Rechners Voyage 200 (TI-89)

Wurzeln

Die Eingabe einer Wurzel erfolgt als Potenz: Z.B.: $\sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}}$.

Für die Quadratwurzel existiert eine eigene Funktionstaste: 2ND X

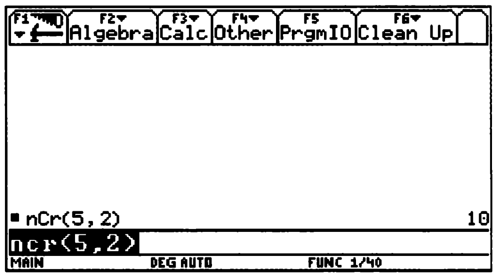


Binomialkoeffizienten

a) Zeichenweises Eintippen über die Tastatur:

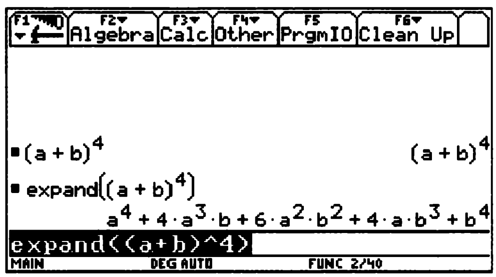
b) Aus dem Math-Menü: 2ND 5 7 3.

c) Aus dem Katalog: 2ND 2.



Binomischer Lehrsatz

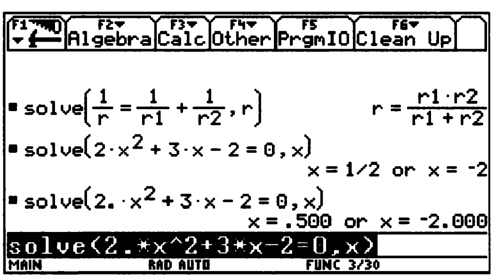
Expand-Anweisung: F2 3

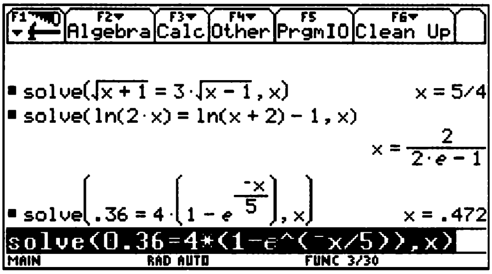


Gleichungen

a) Lösung mit **solve()**: F2 1 oder Eintippen
Lösungen reell; bei mehreren Lösungen wird versucht, alle Lösungen zu finden; es kann jedoch unendlich viele Lösungen geben (z.B. goniometrische Gleichungen). Das Lösungsintervall (Grundmenge der Gleichung) kann durch den Operator "|" (Tasten 2ND K eingeschränkt werden. Bei der Einstellung AUTO und wenn keine Kommazahlen in der Gleichung auftreten, wird eine exakte Lösung versucht (symbolische Lösung).
Ist eine solche Lösung nicht möglich, werden numerische Näherungslösungen angestrebt.

Angabe der Lösung numerisch, wenn in der Gleichung eine Kommazahl auftritt.

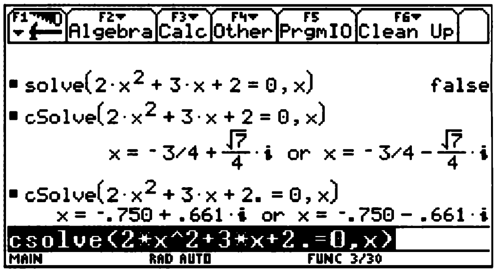




Lösung einer Wurzelgleichung, einer logarithmischen Gleichung und einer Exponentialgleichung.

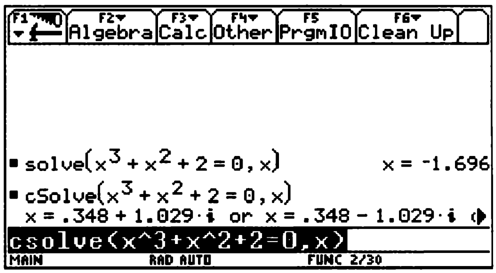
b) Lösung mit **cSolve():** F2 A 1 oder Eintippen

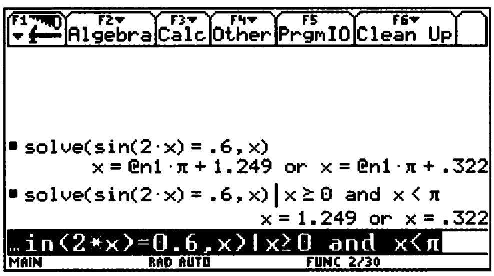
Die Lösungen können auch *komplex* sein; auch hier wird versucht, alle Lösungen zu finden.



Werden keine reellen Lösungen gefunden, so gibt solve() "false" zurück.

Die Polynomgleichung $x^3 + x^2 + 2 = 0$ besitzt eine reelle und zwei komplexe Lösungen.
Obwohl ein symbolisches Lösungsverfahren existiert, werden die Lösungen aus praktischen Gründen numerisch angegeben.

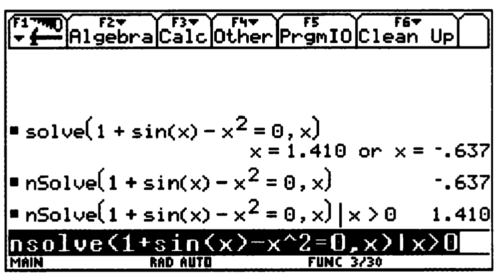




Bei der goniometrischen Gleichung sin(2x) = 0,6 gibt es in ℝ unendlich viele Lösungen. Dies kommt durch @n1, @n2, usw. (stehen für ganze Zahlen) zum Ausdruck. Durch "|" kann das Lösungsintervall eingeschränkt werden (≥ durch 2ND + 2 E oder ◆ ·).

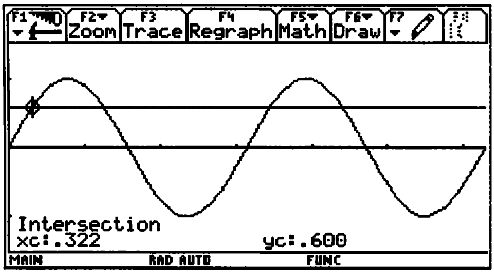
c) Lösung mit **nSolve():** F2 8 oder Eintippen

Schrittweise Ermittlung *einer* reellen numerischen Näherungslösung. nSolve() ist häufig viel schneller als solve(). Bei mehreren Lösungen kann eine nicht gewünschte Lösung angezeigt werden. Dies wird vermieden, wenn durch "|" die Lösungssuche auf ein Intervall eingeschränkt wird, das nur die gesuchte Lösung enthält.



In der Gleichung $1 + \sin x - x^2 = 0$ möge beispielsweise die positive Lösung interessieren. Für diese Gleichung gibt es keine symbolische Lösung; solve() kann daher nur numerisch lösen.
Deutlich schneller erfolgt die Lösung mit nSolve(); ermittelt wird jedoch die kleinere der beiden Lösungen; dies wird vermieden, wenn man das Lösungsintervall entsprechend einschränkt.

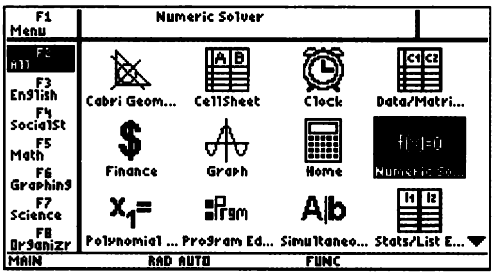
d) Graphische Lösung gezeigt am Beispiel: sin(2x) = 0,6

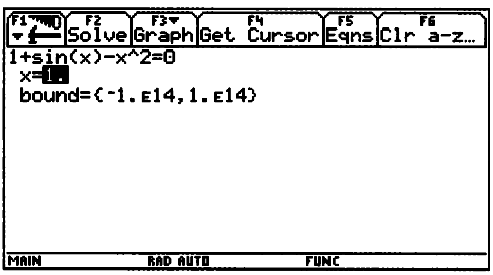


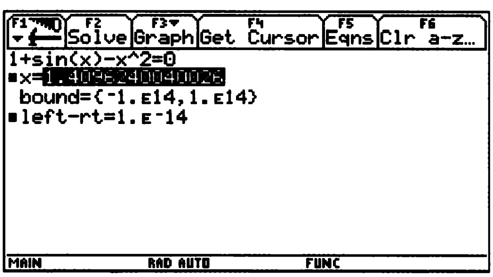
Nach Öffnen des y-Editors gibt man
y1(x) = sin(2x) und y2(x) = 0,6 ein. Nach Festlegen des Zeichenbereichs mit dem Window-Editor zeichnet man die beiden Graphen.

Danach: **F5** **5** (5: Intersection), Auswählen der beiden Graphen sowie Angabe eines Intervalls, in dem die gewünschte Lösung liegt.

e) Lösung mit dem **Numeric Solver**





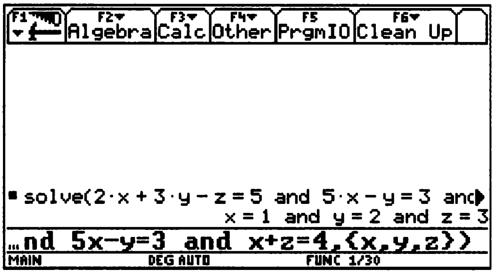


Zum Unterschied zu nSolve() kann beim Numeric Solver (Gleichungslöser) neben der Angabe des Lösungsintervalls noch ein Startwert für die gewünschte Näherungslösung angegeben werden.
Aufruf von der graphischen Benutzeroberfläche oder bei dessen Deaktivierung mit **APPS** **9** (9:Numeric Solver). Falls vorhanden wird die zuletzt eingegebene Gleichung angezeigt.

Man gibt nun die gewünschte Gleichung in die Zeile eqn ein, danach **ENTER**. Optional kann, um eine Lösung schneller zu erhalten, ein Startwert für die Lösung sowie die Grenzen eines Intervalls, in dem die gewünschte Lösung liegt, eingegeben werden. Die Grenzen sind zwischen geschwungene Klammern zu setzen. Oft genügt jedoch der Startwert.

Zum Lösen setzt man den Cursor auf die unbekannte Variable und drückt **F2** (Solve). left – rt zeigt die Differenz der linken und der rechten Gleichungsseite beim Einsetzen der gefundenen Lösung an.

Gleichungssysteme



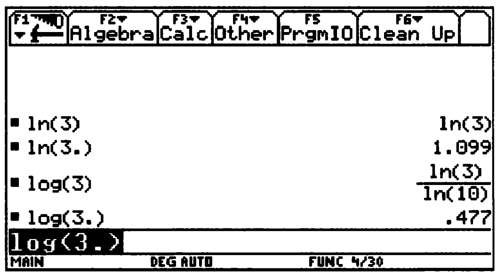
Die Lösung etwa des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ 5x - y \quad &= 3 \\ x \quad + z &= 4 \end{aligned}$$

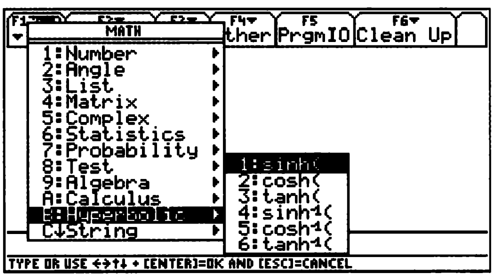
kann ebenfalls mit solve() erfolgen. Zischen den Gleichungen wird "and" eingetippt. Nach einem Beistrich werden die Unbekannten in geschwungenen Klammern, getrennt durch einen Beistrich, angeführt.

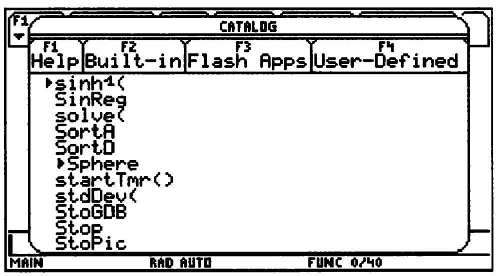
Logarithmen

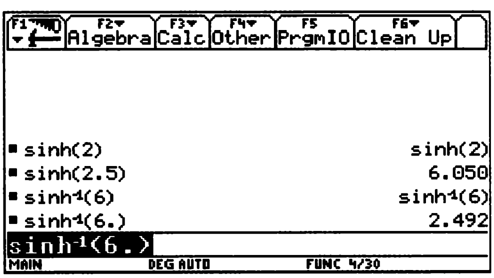
Die Berechnung des natürlichen Logarithmus erfolgt über die Funktionstaste, durch zeichenweises Eintippen über die Tastatur oder aus dem Katalog.
Die Berechnung des dekadischen Logarithmus erfolgt durch zeichenweises Eintippen über die Tastatur oder aus dem Katalog.



Hyperbel– und Areafunktionswerte





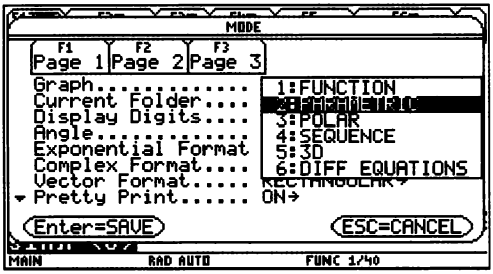


Die Eingabe kann aus dem Math–Menü (2ND 5 B) oder aus dem Katalog (2ND 2), bei den Hyperbelfunktionswerten auch zeichenweise über die Tastatur erfolgen.

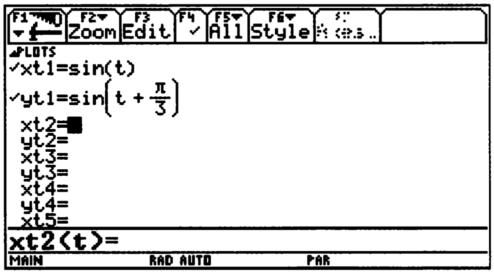
Kurve in Parameterdarstellung

Beispiel: Es ist der Graph von $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, $0 \leqslant t < 2\pi$, zu zeichnen.

MODE-Menü (MODE)

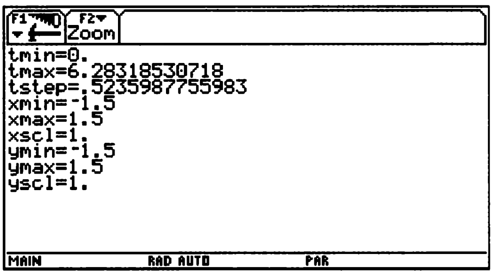


y-Editor: ◆ W



Graph: PARAMETRIC; Angle: RADIAN

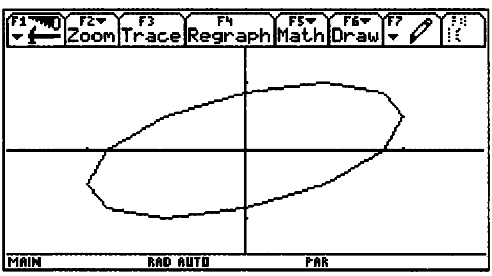
Window-Editor: ◆ E



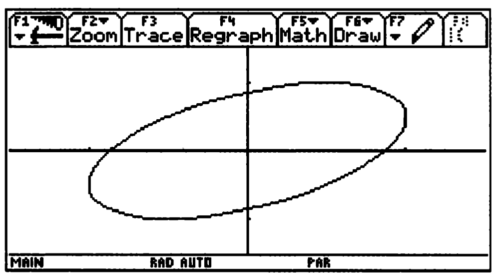
tmin: Kleinster Wert des Parameters t
tmax: Größter Wert des Parameters t
tstep: Schrittweite; hier $\frac{\pi}{6}$
xmin, xmax, ymin und ymax: Grenzen des Zeichenbereichs
xscl, yscl: Abstand zwischen den Strichmarken auf der x- bzw. y-Achse

Graphik: ◆ R

tstep = $\frac{\pi}{6}$



tstep = $\frac{\pi}{24}$



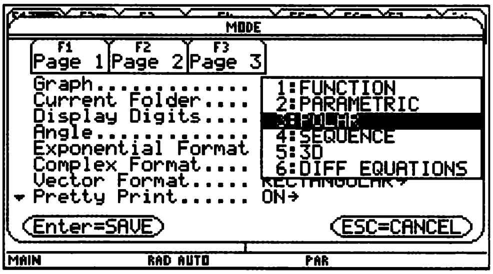
Die Schrittweite $\frac{\pi}{6}$ ist zu groß gewählt, daher erscheint der Graph "eckig".

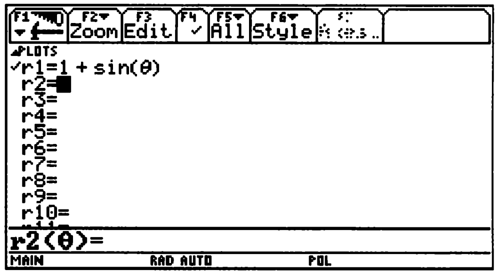
Möchte man ferner auf beiden Achsen die gleiche Skalierung, so wählt man F2 (Zoom Menü) 5 (5:ZoomSqr).

Kurve in Polarkoordinaten

Beispiel: Es ist der Graph von $r = 1 + \sin\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, darzustellen.

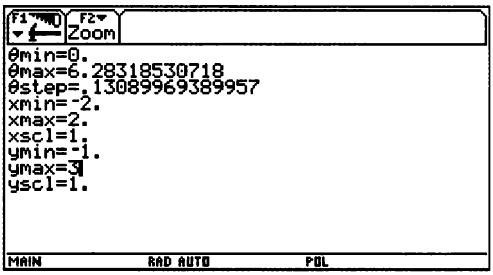
MODE-Menü (MODE) y-Editor: ◆ W





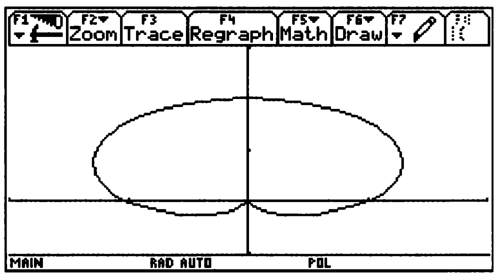
Graph: POLAR; Angle: RADIAN

Window-Editor: ◆ E



θmin: kleinster Wert von θ
θmax: größter Wert von θ
θstep: Schrittweite; hier $\frac{\pi}{24}$
xmin, xmax, ymin und ymax: Grenzen des Zeichenbereichs
xscl, yscl: Abstand zwischen den Strichmarken auf der x- bzw. y-Achse.

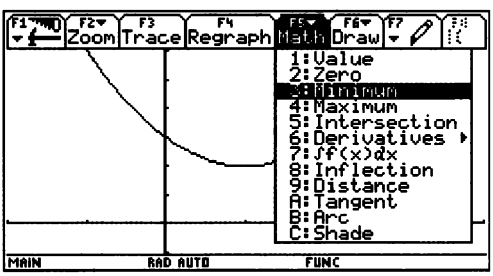
Graphik: ◆ R

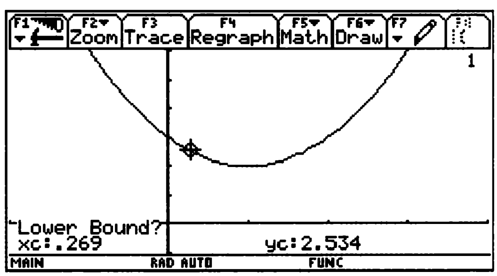


Möchte man auf beiden Achsen die gleiche Skalierung, so wählt man **F2** (Zoom Menü) 5 (5:ZoomSqr).

Lokale Minima und Maxima von Funktionen

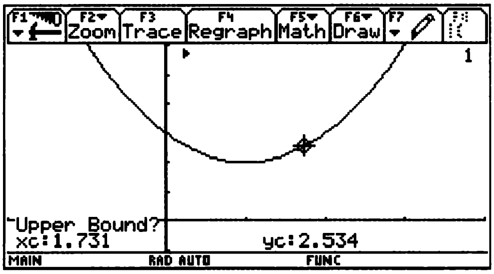
Beispiel: Ermittle das Minimum der Funktion $y = (x - 1)^2 + 2$.

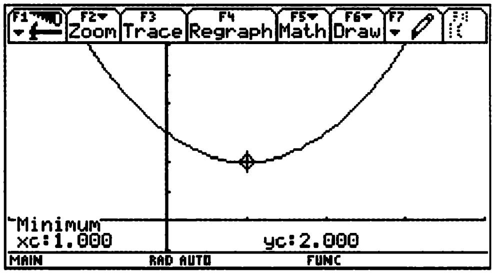




Nach dem Zeichnen des Graphen im Graphikfenster **F5** drücken, danach 3 (3:Minimum).

Mit dem Cursor die untere Grenze (Lower Bound) eines Intervalls angeben, das die Minimalstelle enthält, mit **ENTER** bestätigen.



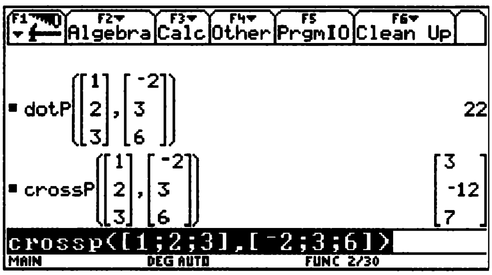


Danach mit dem Cursor die obere Intervallgrenze (Upper Bound) angeben und mit **ENTER** bestätigen.

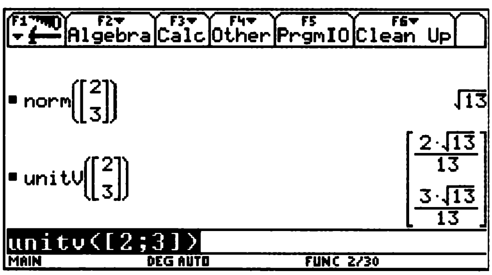
Komplexe Zahlen: Siehe Seite 197 und Seite 201

Vektorrechnung

Die Berechnungen können sowohl mit Zeilen- als auch mit Spaltenvektoren erfolgen. Bei der Eingabe eines Zeilenvektors setzt man zwischen die Vektorkoordinaten *Beistriche*, bei jener eines Spaltenvektors *Strichpunkte*. Die Eingabe der Befehle erfolgt am Einfachsten entweder zeichenweise über die Tastatur oder aus dem Katalog.



Skalarprodukt und Vektorprodukt der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}$.

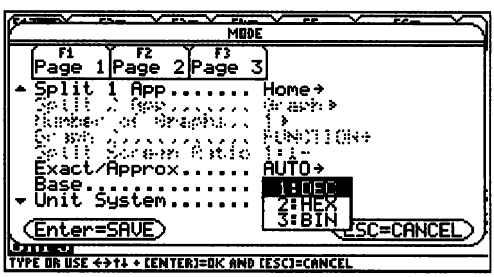


Betrag des Vektors $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ und Einheitsvektor zu $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

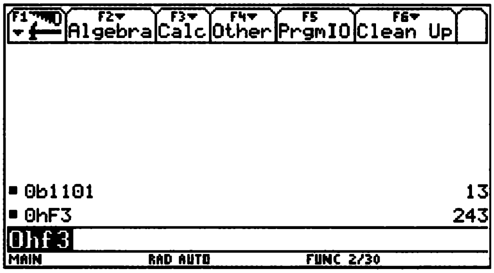
Binär- und Hexadezimalzahlen

Einstellung der Basis des Zahlensystems durch **MODE** (MODE-Menü), **F2** (Page 2):

1: DEC Dezimalsystem
2: HEX Hexadezimalsystem
3: BIN Binärsystem



Die Anzeige des Ergebnisses von Operationen mit ganzen Zahlen erfolgt stets im eingestellten Zahlensystem, egal in welchem Zahlensystem die Eingabe erfolgt.



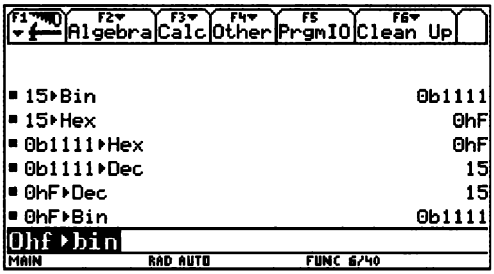
Anzeige bei Einstellung des Dezimalsystems.

Eingabe einer Dualzahl:

Präfix 0b (Null sowie b), danach folgt die Dualzahl.

Eingabe einer Hexadezimalzahl:

Präfix 0h (Null sowie h), danach folgt die Hexadezimalzahl.
Die Zeichen b und h im Präfix sowie die Hex-Ziffern A bis F können mit Klein- oder Großbuchstaben geschrieben werden.



Konvertieren in andere Zahlensysteme:

1) Zeichenweise über die Tastatur: Konvertierungsoperator ▶ durch 2ND Y; danach Bin, Hex bzw. Dec

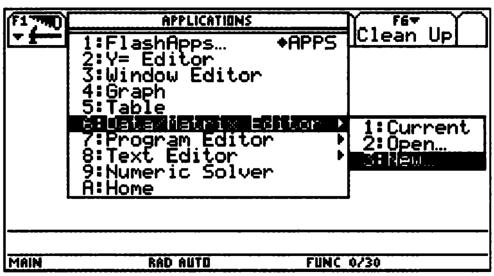
2) 2ND 5 (Math-Menü), D (D: Base)

Beschreibende Statistik

Beispiel: Aus einer Lieferung von Dichtungen wird eine Stichprobe von 11 Einheiten entnommen und der Außendurchmesser d (in mm) gemessen:

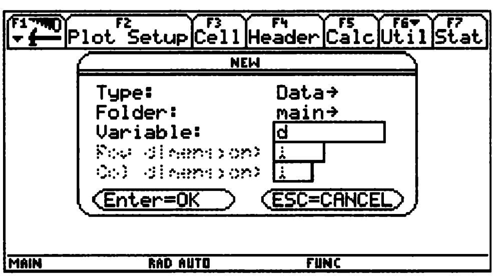
9,8	9,5	9,6	9,6	9,7	9,7	9,8	9,6	9,9	9,4	9,5

Lage- und Streuungsmaße

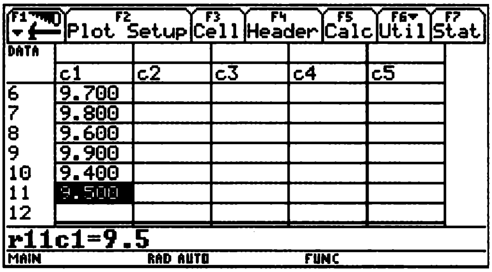


Eingabe der Stichprobenwerte im Daten/Matrix-Editor:

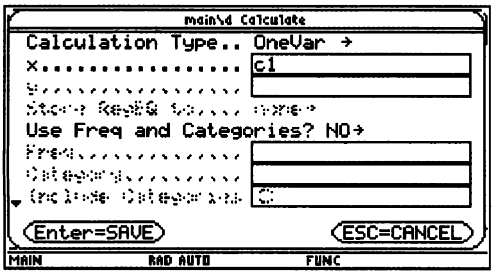
APPS 6 (6: Data/Matrix-Editor) 3 (3:New)
Man kann auch von der APPS-Fläche ausgehen und dort das Data/Matrix-Symbol wählen.



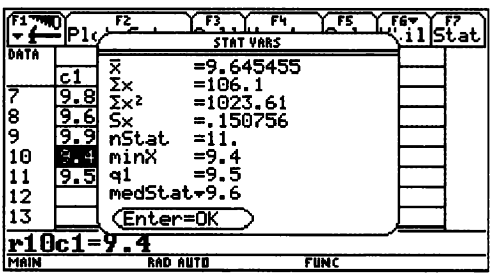
Variablentyp: Data (voreingestellt);
Variable: Name der Daten (Stichprobe) eingeben.
Nach **ENTER ENTER** erscheint eine leere Tabelle.



Die Spalten der Tabelle sind mit c1, c2, c3, .. (c wie column) bezeichnet. Wir geben die Stichprobenwerte etwa in Spalte 1 ein. Änderungen können durch Überschreiben leicht durchgeführt werden. Herauslöschen eines Wertes nach Markieren der Zelle durch F6 2 1. Löschen aller Werte: F1 8. Änderungen der Spaltenbreite durch F1 9.



Mit F6 gelangt man in ein Fenster zur Festlegung der weiteren Berechnung:
Als Calculation Type wird OneVar eingestellt. Bei x wird c1 angegeben. Ansonsten sind hier keine weiteren Angaben erforderlich.
Nach ENTER ENTER werden die Berechnungen durchgeführt und angezeigt.



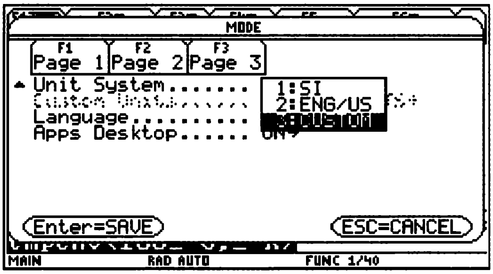
Durch Drücken des Cursors nach unten werden noch q3 und maxX angezeigt.

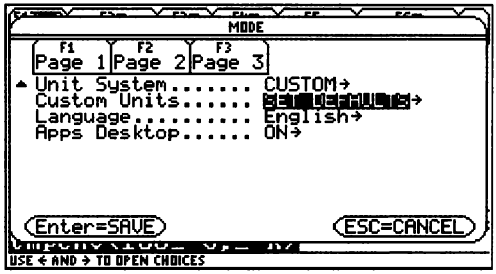
Dabei bedeuten:

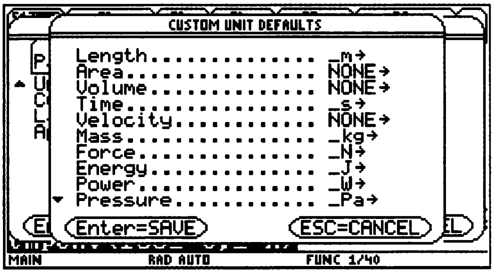
$\bar{x}$	Mittelwert
$\sum x$	Summe der x-Werte
$\sum x^2$	Summe der Quadrate der x-Werte
s_x	Standardabweichung
nstat	Anzahl der x-Werte
minX	Minimum der x-Werte
q1	erstes Quartil
medStat	Median oder Zentralwert, 2. Quartil
q3	drittes Quartil
maxX	Maximum der x-Werte

Rechnen mit Einheiten

Die Einheiten können zeichenweise über die Tastatur mit einem vorgestellten Unterstrich (2ND P) oder aus dem Menü UNITS (◆ P) eingefügt werden.
Die Abkürzungen der Einheiten sind nicht immer jene des SI-Systems. Um bei den gewohnten Einheiten zu bleiben, stellt man im MODE-Menü, Page 3, bei Unit System 3: CUSTOM ein.





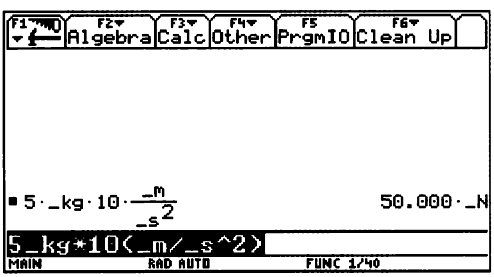


Drückt man nach Markierung von SET DEFAULTS bei Custom Units die Cursortaste nach rechts, so wird bei jeder Größe die voreingestellte Einheit angezeigt. Durch Drücken der Cursortaste nach rechts kann diese Voreinstellung geändert werden.

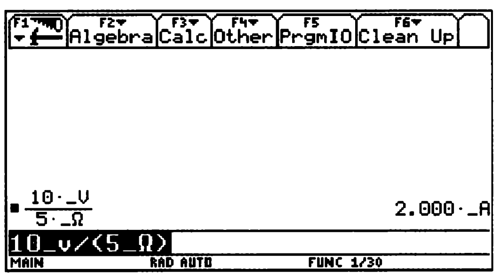
Bei vielen Größen wird man aber NONE als "Einheit" beibehalten. Das bedeutet, dass eine solche Größe in den eingestellten Einheiten ihrer Komponenten angezeigt wird, wenn sie sich als Rechenergebnis ergibt.
So ist das Ergebnis der Flächenberechnung A = 2 m·3 m = 6 m^2, wenn als Einheit für eine Fläche NONE eingestellt ist.

Mit **ENTER ENTER** werden die Änderungen gespeichert und das MODE-Menü verlassen.

Beispiel: $F_G = m \cdot g$



Beispiel: $I = \frac{U}{R}$



Ω durch 2ND G ↑ W oder aus dem UNITS-Menü

Mathematische Zeichen (Auswahl)

Symbole aus der Logik, Mengenlehre, Arithmetik und Algebra

$\wedge$	und
$\Rightarrow$	wenn, dann; hinreichend für
$\in$	ist Element von
∞	unendlich
$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$	
z, $\underline{z}$	Komplexe Zahl
Re z	Realteil von z
z^*	konjugiert komplexe Zahl von z
$\vee$	oder (nicht ausschließend)
$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn; notwendig und hinreichend für
$\|a\|$	Betrag von a
n!	n Fakultät, n Faktorielle
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient
j, i	imaginäre Einheit
Im z	Imaginärteil von z
$\|z\|$	Betrag von z

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen mit 0 bzw. ohne 0
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{C}$	Menge der rationalen, Menge der reellen, Menge der positiven reellen, Menge der komplexen Zahlen
$[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$	abgeschlossenes, offenes, links offenes bzw. rechts offenes Intervall

Geometrie und Vektorrechnung

$\overline{AB}$	Länge der Strecke AB
$\vec{a}_0$	Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$
$\|\vec{a}\|$	Betrag des Vektors $\vec{a}$
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt
$\overset{\frown}{AB}$	Länge des Bogens AB
$\overrightarrow{OP}$	Ortsvektor des Punktes P
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Einheitsvektoren der Koordinatenachsen
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt

Funktionen

$\log_a x$	Logarithmus zur Basis a
lg x	Zehnerlogarithmus oder dekadischer Lagarithmus von x
arccos x	Arkuskosinus von x
sinhx	Hyperbelsinus von x
tanh x	Hyperbeltangens von x
arcosh x	Areakosinus von x
ln x	Natürlicher Logarithmus von x
arcsin x	Arkussinus von x
arctan x	Arkustangens von x
cosh x	Hyperbelkosinus von x
arsinh x	Areasinus von x
artanh x	Areatangens von x

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\bar{x}$	arithmetischer Mittelwert
q_i	i-tes Quartil
R	Spannweite
P (B|A)	Bedingte Wahrscheinlichkeit
$\tilde{x}$	Median oder Zentralwert, 2. Quartil
s	(Stichproben-)Standardabweichung
P (A)	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$\overline{A}$	Gegenereignis von A

Griechisches Alphabet

α	A	Alpha	η	H	Eta	ν	N	Ny	τ	T	Tau
β	B	Beta	ϑ	Θ	Theta	ξ	Ξ	Xi	υ	Y	Ypsilon
γ	Γ	Gamma	ι	I	Iota	ο	O	Omikron	φ	Φ	Phi
δ	Δ	Delta	κ	K	Kappa	π	Π	Pi	χ	X	Chi
ε	E	Epsilon	λ	Λ	Lambda	ϱ	P	Rho	ψ	Ψ	Psi
ζ	Z	Zeta	μ	M	My	σ	Σ	Sigma	ω	Ω	Omega

Englische Bezeichnungen

Symbols and Operations

$\mathbb{N}$	set of positive whole numbers and zero	$\log_a 3$	logarithm of 3 to the base a
$\mathbb{Z}$	set of integers	$\log 3$	logarithm of 3 to the base 10
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	set of rational, real, complex numbers	$\ln 3$	natural logarithm of 3
$\{\}$	empty set	$z = a + b \cdot j$	complex number (rectangular form); a ... real part, b ... imaginary part
$\in$	is an element of		
$[a, b]$, $]a, b[$	closed, open intervall	$j^2 = -1$	j squared equals -1
-3	negative three	$z^* = a - b \cdot j$	conjugate of z
$3 + 4 = 7$	3 plus 4 equals 7	$z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$	exponential form of z, r ... absolute value, φ ... argument
$7 - 3 = 4$	7 minus 3 equals 4		
$3 \cdot 4 = 12$	3 times 4 equals 12		
$12 : 3 = 4$	12 divided by 3 equals 4	a_1	a sub one, a one
$\frac{3}{4}$	3 over 4	$\sum_{i=1}^{n} a_i$	sum over a sub i from i equals 1 to n
0.4; 5.2	point four; five point two		
15%	fifteen percent	$n!$	n factorial
$\|a\|$	absolute (value of) a	$\binom{n}{k}$	n over k, binomial coefficient
$a > 1$	a greater than 1		
$a \geqslant 1$	a greater than or equal to 1	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$	2x3 matrix, 2-by-3 matrix (2 rows, 3 columns)
$a < 1$	a less than 1		
$a \leqslant 1$	a less than or equal to 1		
$3^2, 5^3$	3 squared, 5 cubed	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	scalar product, dot product
3^n	3 to the power of n	$\vec{a} \times \vec{b}$	vector product, cross product
a^{-2}	a to the minus 2	$y = f(x)$	y equals f of x
$\sqrt{3}$	square root of 3	∞	infinity
$\sqrt[n]{a}$	n^{th} root of a	$\bar{x}, \tilde{x}$	x bar, x tilde

Basic Vocabulary

parantheses, round brackets	runde Klammern	statistics	Statistik
square brackets	eckige Klammern	population	Grundgesamtheit
curly brackets,braces	geschwungene Kl.	sample	Stichprobe
percentage	Prozentsatz	sample size	Stichprobenumfang
result	Ergebnis	absolute, relative frequency	absolute, relative Häufigkeit
exponential function	Exponentialfunktion	chart	Karte, graphische Darstellung
logarithmic function	logarithmische F.		
trigonometric function	Kreisfunktion	arithmetic mean	arithmet. Mittel
sine, cosine, tangent	Sinus, Kosinus, Tangens	median	Median, Zentralwert
		quartile	Quartil
parametric curve	Kurve in Parameter-darstellung	range	Spannweite, Wertebereich
polar curve	Kurve in Polarkoordinaten	standard deviation	Standardabweichung
		variance of a sample	(Stichproben-)Varianz
interest	Zinsen	bar chart	Stabdiagramm
simple interest	einfache Zinsen	pie chart	Kreisdiagramm
principal	Kapital	histogramm	Histogramm
rate of interest	Zinsatz	probability calculus	Wahrscheinlichkeits-rechnung
compound interest	Zinseszinsen		

Formelsammlung

Binomischer Lehrsatz

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ sowie $\binom{n}{0} = 1$;

$n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

k-Fakultät oder k-Faktorielle: $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$; $0! = 1$

Wurzeln

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ sowie $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, Radikand $a \geqslant 0$.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$ (teilweises Wurzelziehen)

$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ (Faktor unter eine Wurzel bringen)

Quadratische Gleichung

Allgemeine Form: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ $(a \neq 0)$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Normalform: $x^2 + p \cdot x + q = 0$: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$ sowie $x_1 . x_2 = q = \frac{c}{a}$

Produktform eines quadratischen Terms (eines Polynoms vom Grad 2):
$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ bzw. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Logarithmen

$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$, $b > 0$, Basis $a > 0$, $a \neq 1$; wichtigste Basen: $a = 10$ oder $a = e$.
$10^{\lg b} = b$; $e^{\ln b} = b$
$\lg 10 = 1$; $\ln e = 1$; $\lg 1 = 0$; $\ln 1 = 0$
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\lg x}{\lg a}$; speziell: $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0{,}4343 \cdot \ln x$

Logarithmische Rechengesetze ($u, v > 0$, $n \in \mathbb{R}$):
(1) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$ (2) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$ (3) $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$.

Hyperbel- und Areafunktionen

$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ für $x \geqslant 1$
$y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + x}{1 - x}$ für $|x| < 1$

Kreisfunktionen

Grundbeziehungen: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$.

Periodizität ($k \in \mathbb{Z}$):

$\sin(\alpha + k\cdot 360°) = \sin(\alpha + k\cdot 2\pi) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + k\cdot 360°) = \cos(\alpha + k\cdot 2\pi) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha + k\cdot 180°) = \tan(\alpha + k\cdot \pi) = \tan\alpha$

Kreisfunktionen negativer Winkel:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

Vorzeichen in den vier Quadranten:

Quadrant	1.	2.	3.	4.
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−

1. Summensatz:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Kreisfunktionswerte doppelter Winkel:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

2. Summensatz:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

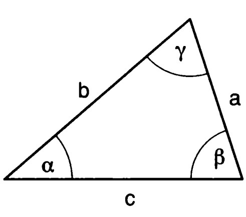
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$; $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot(1 - \cos 2\alpha)$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot(1 + \cos 2\alpha)$

Trigonometrie des schiefwinkligen Dreiecks



Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$

Trigonometrische Flächenformel: $A = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$.

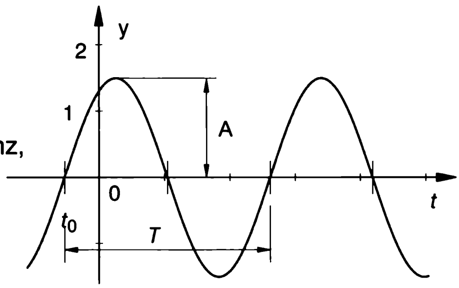
Allgemeine Sinusfunktion

$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

A … Amplitude, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ … Kreisfrequenz,

T … Periode, φ … Nullphasenwinkel

$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ … Nullstelle zur Bestimmung der Verschiebung



Summe gleichfrequenter Sinusschwingungen:

$A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1 \cdot A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ und $\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$

Komplexe Zahlen

$z = a + b \cdot j$ Komponentenform, a Realteil, b Imaginärteil, j imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$.

$z^* = a - b \cdot j$ konjugiert komplexe Zahl zu $z = a + b \cdot j$

$a + b \cdot j = c + d \cdot j \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Polarformen:

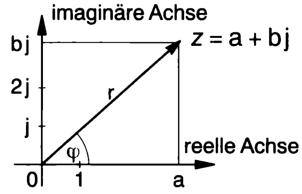
$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{j \cdot \varphi} = r \cdot \underline{/\varphi}$

trigonometrische Form Exponentialform Versorform

Euler'sche Formel: $e^{j \cdot \varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$

Formel von Moivre ($n \in \mathbb{Z}$):

$(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)$



Komponentenform → Polarform: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

Polarform → Komponentenform: $a = r \cdot \cos\varphi$; $b = r \cdot \sin\varphi$

Wurzelziehen:

w heißt n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}^*$) von $z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$, wenn $w^n = z$:

$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j \cdot \varphi_k}$ mit $\varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

Vektorrechnung

Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen:

$\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in der Ebene bzw. $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ im Raum

Komponentendarstellung:

$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ in der Ebene bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ im Raum

Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ in der Ebene bzw.

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ im Raum

Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung $\vec{a}$: $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$ in der Ebene

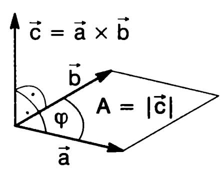
$= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$ im Raum

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$

Normalvektor zu $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ in der Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix}-a_y\\a_x\end{pmatrix}$ hat den gleichen Betrag wie $\vec{a}$ und geht aus diesem durch Linksdrehung hervor.

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$:



(1) $\vec{c}$ steht *normal* zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$

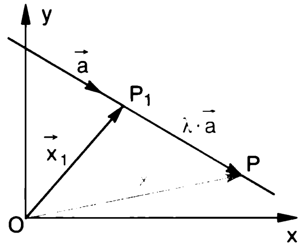
(2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix};$$

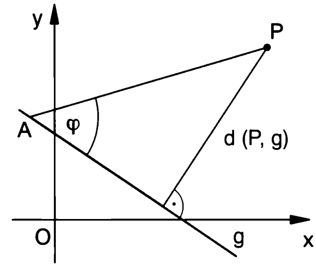
$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; $\vec{a}$ kollinear $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ $(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$

Gerade (in der Ebene oder im Raum):
$\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$

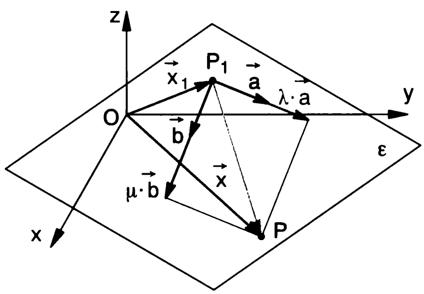


Abstand d(P,g) eines Punktes P von einer Geraden g (in der Ebene oder im Raum):

$d(P,g) = \overline{AP} \cdot \sin \varphi$
(A beliebiger Punkt von g)



Ebene ε in Parameterdarstellung:
$\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$



Allgemeine Ebenengleichung (a, b, c nicht alle gleich 0): $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$

Abstand d (g, h) zweier windschiefer Geraden g und h:

g: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$; h: $\vec{x} = \vec{x}_2 + \mu \cdot \vec{b}$:
$d(g, h) = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0|$

Finanzmathematik

Einfache Zinsrechnung: Zinssatz $i = p\% = \frac{p}{100}$

Zinsen für ein Jahr: $Z = K_0 \cdot i$; Zinsen für t Tage: $Z = K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360}$.

Zinsenszinsrechnung:

Aufzinsungsfaktor $q = 1 + i$; Endwert nach n Jahren: $K_n = K_0 . q^n$; Barwert: $K_0 = \frac{K_n}{q^n}$

Beschreibende Statistik

n Stichprobenumfang

Lagekennwerte von Stichproben:

(Arithmetischer) Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

Quartile: Stichprobendaten zuerst aufsteigend ordnen

Median oder Zentralwert $\tilde{x}$ (= 2. Quartil q_2):

a) n ungerade: $\tilde{x}$ = Wert in der Mitte der Liste

b) n gerade: $\tilde{x}$ = Mittelwert der beiden Werte in der Mitte der Liste

Erstes Quartil q_1: Median der unteren Hälfte der Liste
Drittes Quartil q_3: Median der oberen Hälfte der Liste

Streuungskennwerte von Stichproben:

(Stichproben-)Standardabweichung s:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2 \right)}$$

Spannweite $R = x_{max} - x_{min}$

Interquartilsabstand $d = q_3 - q_1$

Klassierte Daten:

k Anzahl der Klassen, x_j Klassenmitte und n_j Anzahl der Daten der j-ten Klasse

$$\overline{x} \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{k} n_j \cdot x_j \qquad s \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot x_j^2 - n \cdot \overline{x}^2 \right)}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Festlegung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A:

a) Statistisch: $P(A) \approx \frac{k}{n}$, n Anzahl der Durchführungen eines Zufallsexperimentes, wobei k-mal das Ereignis A eintrat.

b) Bei einem Laplace-Experiment: $P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}} = \frac{g}{m}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(B|A) = \frac{P(A \textbf{ und } B)}{P(A)}$

Additionssatz **("ODER-Regel")**:

P (A **oder** B) = P (A) + P (B) – P (A **und** B) für beliebige Ereignisse

P (A **oder** B) = P (A) + P (B) für *unvereinbare* Ereignisse

Multiplikationssatz **("UND-Regel")**:

P (A **und** B) = P (A) · P (B|A) für beliebige Ereignisse

P (A **und** B) = P (A) · P (B) für *unabhängige* Ereignisse

Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $\overline{A}$ von A: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Literatur- und Quellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

Blankennagel, J., Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik, Band 2 der Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1985

Bolt, B.: Was hat der Bagger mit Mathematik zu tun? Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1995

Driver, R.D,.Why Math? Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg 1984

Greuel, O., Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker, 12. Auflage, Carl Hanser Verlag, München – Wien 1990

Humenberger, J., Reichel, H.-Ch., Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik, Band 31 der Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1995

Kastner, B., Fraser, S., Raumfahrt und Mathematik, Aufgabensammlung mit Lösungen, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1993

Kranzer, W., So interessant ist Mathematik, Aulis-Verlag Deubner, Köln 1989

Lewisch, I., Posamentier, A., Mathematisches Fachwörterbuch, Englisch-Deutsch, Deutsch-Englisch, R.Oldenbourg Verlag, Wien 1996

Mathematik für Techniker, 2. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig – Köln, 1994

Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, 7. Auflage, Vieweg Verlagsgesellschaft, Braunschweig/Wiesbaden 1996

Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Übungen, 3. Auflage, Vieweg Verlagsgesellschaft, Braunschweig/Wiesbaden 1994

Raake, R.: Mathcad in der Schule, paetec Gesellschaft für Bildung und Technik, Berlin 2002

Schmidt, W.: Mathematikaufgaben. Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1984

Kröpfl/Peschek/Schneider/Schönlieb, Angewandte Statistik, Carl Hanser Verlag, München – Wien 1994

Preuß,W., Wenisch, G., Lehr- und Übungsbuch Mathematik, Band 1, Fachbuchverlag Leipzig – Köln 1995

Rapp, H., Mathematik: Grundlagen für die Fachschule Technik, Vieweg Verlagsgesellschaft, Braunschweig/Wiesbaden 1996

Scheid, H., Duden Rechnen und Mathematik, 5. Auflage, Bibliographisches Institut Mannheim 1994

Wörle, H., Rumpf, H.-J., Ingenieur-Mathematik in Beispielen, Band 1, Oldenbourg Verlag, München 1976

Quellenverzeichnis

[1] Herget, W.: Kurvendiskussion – was sonst? In: Mathematik lehren, Heft 76, S. 66

[2] Shell Centre: Sketing and Interpreting Graphs, Shell Centre for Mathematics Education, Nottingham

[3] I. Paasche, Praxis der Mathematik 1/1996

Stichwortverzeichnis